**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**
**имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

# ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Саитова Рената Рустемовна**

Класс: **11**

Технический балл: **65**

Дата проведения: **21 марта 2021 г.**

**Результаты проверки:**

| № | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Оценка | 15 | 15 | 15 | 0 | 0 | 5 | 15 |

чистовик 5

на разных 15 местах и мы получим нужные числа (кол-во единиц от начала до первой перегородки-первое число; от перегородки до перегородки-второе, и от конца до последней-третье число

Таких вариантов - $\frac{15 \cdot 14}{2}$ (15 мест для 1 перегородки, 14 для второй)

$\frac{\cdot}{2}$ потому что так учитываются повторения (первая на месте второй, а вторая на месте первой)

Тогда $\frac{15 \cdot 14}{2} = 105$ таких троек, но на каждую тройку есть своя двойка ~~Д:В~~ В:В

$\Downarrow$

$k = 105 \cdot 3 = 315$

Чистовик 9

$x^2+xy=y^2$

$x=\frac{-y\pm\sqrt{5y^2}}{2}=y\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$

$\frac{\sqrt{5}-1}{2}>\frac{1}{2}$, так как $\sqrt{5}>2$

$\frac{\sqrt{5}-1}{2}<\frac{36}{61}$, так как $61\cdot\sqrt{5}-$
$-61<72 \Leftrightarrow 61\cdot\sqrt{5}<133 \Leftrightarrow 18605<$

$<$ не подходит

V По аналогии, вел. проедет
$2\cdot(x+y)+x$, мот $3(x+y)+x$

$\frac{x}{y}=\frac{2(x+y)+x}{3(x+y)+x}$

$4x^2+3xy=3xy+2y^2$

$\cancel{4x^2}$ $x=\frac{y}{\sqrt{2}}\cdot\frac{y}{\cancel{x}}=\sqrt{2}<1{,}75<\frac{61}{32}$

VI $\frac{x}{y}=\frac{2(x+y)+y}{3(x+y)+y}$

$3x^2+4xy=3y^2+2xy$

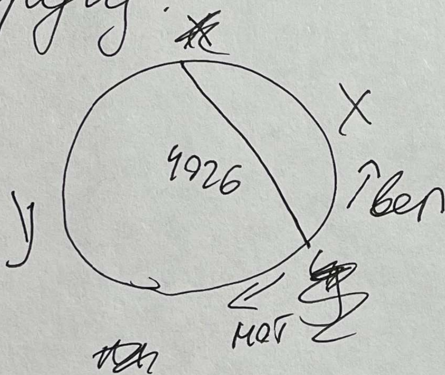
$3x^2+2xy-3y^2=0$

Листовик 7

№ 61

~~Из условий про 36е и под 61е до 72~~

Ясно, что мотоциклист едет быстрее. по скорости отличается в меньше чем в 2 раза. Тогда когда они ехали друг на встречу другу:

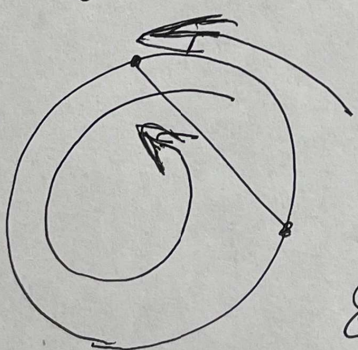



Пускай длины дуг x, y.

Тогда $v_{велосип.} = \frac{x}{y}$

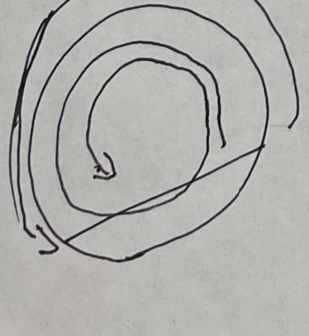
Теперь когда они ехали в одном направлении

I



невозможно, мотоциклист за ~~это~~ тоже время проехал больше чем в прошлом случ

II



один проехал y, другой x+y+y, но тогда мотоциклист более чем в 2 раза быстрее велосипедиста

Чистовик 3

Докажем лемму по индукции:

База $n=1$: просто решим квадратное уравнение

Переход:

Пусть для $n=k$, мы доказали, что решением уравнения $f^k(x)=0$ является $x=-3\pm\sqrt[2^k]{3}$

Тогда $f^{k+1}(x)=f^k(f(x))=0$,

значит этот $x=-3\pm\sqrt[2^k]{3}$ по предположению индукции

Тогда $(x+3)^2 = f(x)+3=\pm\sqrt[2^k]{3}$, значит

$(x+3)^2=\sqrt[2^k]{3}$, тогда $x+3=\pm\sqrt[2^{k+1}]{3}$, переход доказан

Тогда ответом задачи будет

утверждение леммы для $n=5$

то есть $x=-3\pm\sqrt[32]{3}$

№3

$P(x)=x^5+Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E$, где

$A, B, C, D, E \in \mathbb{N}$

$P(1)=1+A+B+C+D+E=21$

$(I)\ A+B+C+D+E=20$

$P(-1)=-1+A-B+C-D+E=11$

$(II)\ A+C+E-B-D=12$

$I-II$

Чистовик 6

№ 7

Ответ: выигрывает Аня

Док-во:

Пусть Аня первым ходом выберет зеленые камни и уберет 2021 зеленый камень. Всего осталось нечетное число 2021 красных камней и один зеленый. Очевидно, что тот, кто возьмет зеленый камень, и при этом кол-во красных будет отлично от нуля, тот проиграет. Так как 0 делится на любое число, значит, Аня и Петя будут брать только из красных камней, но брать они могут ровно один камень за ход, так как зеленых всего 1 ⇒ по принципу четности после 2020 хода Аня оставит Пете по одному ~~на~~ камню каждого цвета ⇒

⇒ чтобы не взял Петя, Аня берет последний камень, одерживая тем самым победу

* (Чистовик 19)

$x = \frac{-2y \pm \sqrt{4y^2+36y^2}}{6} = \frac{-y + y\cdot\sqrt{10}}{3} = \frac{y\cdot(\sqrt{10}-1)}{3}$

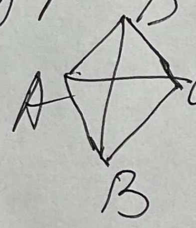
$\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{10}-1}{3} > \frac{36}{61}$. Противоречие

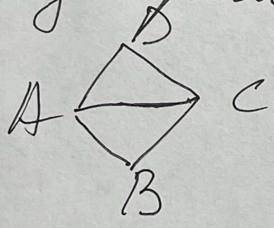
Очевидно, что и дальше $\frac{y}{x}$ будет увеличиваться при увеличении числа кругов

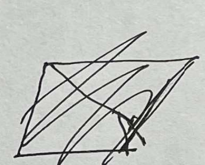
Значит ситуация описанная в условии невозможна и такого приема не существует

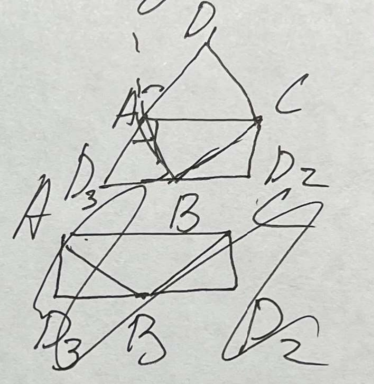
№6

Развернем нашу пирамиду:



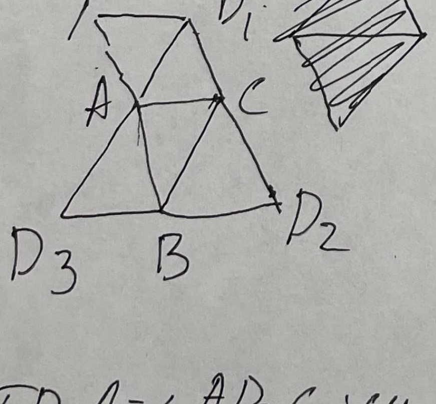



D разложилась на $D_1$, $D_2$, $D_3$ ⇒

⇒ $AD_1 = AD_3$ (ребро), $CD_2 = CD_3$, $DD_1 = DD_2$

аналогично ~~$\angle D_1AD_3$~~ $\angle D_1$, $\angle D_1AD_3 = \angle D_1BD_2$ (условие)

Отложим угол $\angle CAD_3$ от $D_1A$ и возьмем точку T так, чтобы $AD_1 = AD_3$ и ~~AB~~ $AC = AT$.




Тогда $\triangle ATD_1 = \triangle ACD_3$ по двум сторонам и $\angle$ между ними ⇒ $D_3C = D_1T = CD_2$

$\angle TAC = \angle D_1DD_2$

$\angle AD_3C + \angle AD_1B + \angle DD_2C =$

$= \angle D_3CD_2$

$\angle TD_1A = \angle AD_3C$; сумму углов всех граней пирамиды $4\cdot180 = 620$. Если сумму углов вершин попарно равны то сумма углов $3A$ и $3D = 360\cdot\frac{620}{2}$

Тогда $\angle TD_1D + \angle BD_2C = \angle AD_1C + \angle CD_2D + \angle BD_3A$; тогда $\angle TD_1D + \angle D_1BD + BD_2C = 360°$ ⇒ $D_1T = D_2C$ и они параллельны

Вариант 210205

Чистовик 1

№2

$$\sqrt{2x+4\cdot\sqrt{2x-4}} + \sqrt{2x-4\cdot\sqrt{2x-4}} =$$

1) $\sqrt{2x+4\cdot\sqrt{2x-4}} = \sqrt{(2x-4)+4+4+4\sqrt{2x-4}} =$

$= \sqrt{\left(\sqrt{(2x-4)}+2\right)^2}$

2) $\sqrt{2x-4\cdot\sqrt{2x-4}} = \sqrt{(2x-4)+4-4\cdot\sqrt{2x-4}} =$

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} =$$

$$= \sqrt{(x-1)+1+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{(x-1)+1+2\sqrt{x-1}} =$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2} =$$

$$= \left|\sqrt{x-1}+1\right| + \left|\sqrt{x-1}-1\right|$$

Понятно, что $x > 1$, потому что $x = 2^0 +$ $+ \ldots$, значит ~~корни~~ существуют

Тогда осталось открыть модуль

1) $|\underbrace{\sqrt{x-1}}_{\geqslant 0} + \underbrace{1}_{>0}| = \sqrt{x-1}+1$

2) $\left|\sqrt{x-1}-1\right|$, покажем, что $x-1 \leq 1$,

тогда $\sqrt{x-1} \leq 1$ и $\sqrt{x-1}-1 \leq 0$

Чистовик 2

$x = 2^0 + 2^{-1} + 2^{-2} + \cancel{2^{-3}} \dots + 2^{-2021} = 1 + \frac{1}{2} +$

$+ \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{2021}}$, мы знаем, что

сумма $\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$, с этой суммы мы

забрали что-то и значит $x \leq 2 \Rightarrow x - 1 \leq 1$,

тогда

$|\sqrt{x-1} - 1| = 1 - \sqrt{x-1}$

Наше выражение равно $\sqrt{x-1} + 1 - \sqrt{x-1} + 1 =$

$= 2$

~~Ответ: 2~~

№ 1

Пусть $\cancel{f^{n}(f(f(x)))}$ $f^n(x) = \underbrace{f(f(f \dots (f_x)))}_{n \text{ раз}}$,

где $f(x) = x^2 + 6x + 6$

Лемма: решением уравнения

$f^n(x) = 0$ является $\cancel{x = -3 \pm \sqrt[2^n]{3}}$

$x = 3 \pm \sqrt[2^n]{3}$ $\cancel{x = -3 \pm \sqrt[2^n]{3}}$

$\cancel{x = -3 \pm \sqrt[2^n]{3}}$

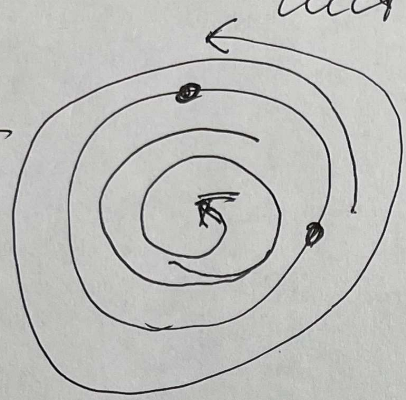
Док-во:

Заметим, что $f(x) + 3 \stackrel{*}{=} (x+3)^2$, значит

этот $x \geq -3$

Чистовик 8

III



Тогда вел. проехал $x+y+x$, мот. $2(x+y)+x$

Значит $\frac{v_{вел}}{v_{мот}} = \frac{2x+y}{3x+2y} \Rightarrow$

~~Раз~~

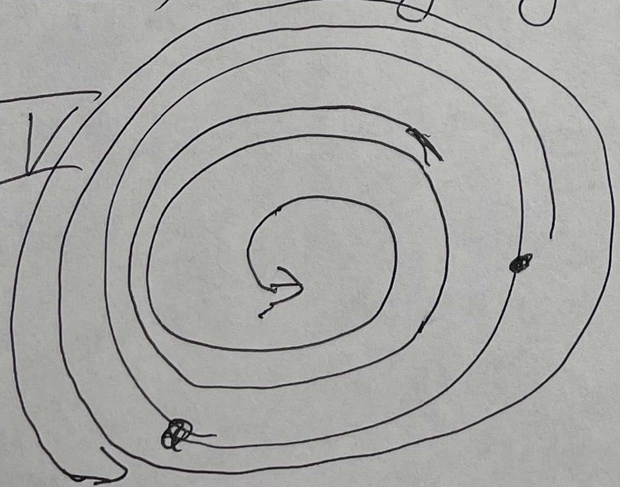
$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{2x+y}{3x+2y}$$

$$\Rightarrow 3x^2+2xy = 2xy+y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \cancel{\frac{y}{3}}\ \frac{y}{\sqrt{3}}$$

Тогда $\frac{y}{x} = \sqrt{3} < 1{,}75 = \frac{7}{4} = \frac{56}{32} < \frac{61}{32}$, не подходит

IV



Тогда вел. проехал $x+y+y$, мот. $2(x+y)+y$

$$\frac{v_{вел}}{v_{мот}} = \frac{x+2y}{2x+3y} = \frac{x}{y}$$

$$2y^2+xy = 2x^2+3xy$$

Чистовик 11

Тогда => $TD_1D_2C$ – параллелограм =>

=> $TC = D_1D_2$ => в треугольнике $TAC$ и в $\triangle D_1BD_2$ – равнобедренные с равными углами при вершине и равными основаниями => они равны

$TA = AC = BD_2 = BD_1$

Тогда $ATD_1B$ и $ACD_2B$ – две равнобокие трапеции с равными сторонами => они равны => $S_{ATD_1B} =$

$= S_{ACD_2B}$ => $S_{ACD_2B} = S_{BAD_3C}$

Тогда в пирамиде ~~$S_{ADC} + S_{DTC} = S_{DAD}$~~

$S_{ABC} + S_{BDC} = S_{DAB} + S_{DAC}$ =>

=> $S_{ABC} + S_{BDC} = \frac{S}{2}$

Чистовик 4

$$2 \cdot (B+D) = 8$$

$$\Downarrow$$

$$B+D=4$$

$$\Downarrow$$

$$A+C+E=16$$

Любые числа, которые подойдут сюда:

$$\begin{cases} B+D=4 \\ A+C+E=16 \end{cases}$$

будут и подходить в наш многочлен.

Значит нужно найти кол-во ~~пятерок~~ „пятерок", которые нам подходят

$$B+D=4$$

$$\Downarrow$$

Все варианты легко перебираются

1+3

2+2 3 варианта

3+1

$$A+C+E=16$$

Используем метод перегородок

Нам нужно расположить две перегородки

Черновик 1

№1

$f(x) = x^2 + 6x + 6$

$D = 36 - 24 = 12$

$x_1 = \frac{-6 \pm \sqrt{12}}{2} = -3 \pm \sqrt{3}$

$f(f(f(f(f(x))))) = 0$

$-3 \pm \sqrt{3}$

$x_1 = -3 - \sqrt{3}$

$x_2 = -3 + \sqrt{3}$

№3

$P(-1) = 11$

$-B - D = 11 - 16 + 1$

$-B - D = -4$

$x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^3 + Dx + E$

$P(-\ ) = 11$

$2A + 2C + 2E = 32 \Rightarrow A + C + E = 16$

$P(1) = 21$

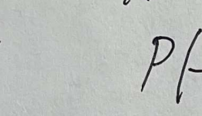
$A + C + E = 16$

$-1 + A - B + C - D + E = 11$

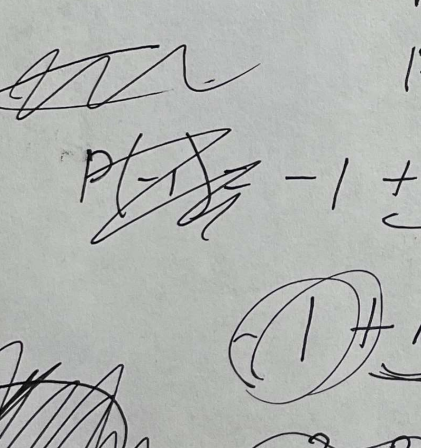
$1 + A + B + C + D + E = 21$

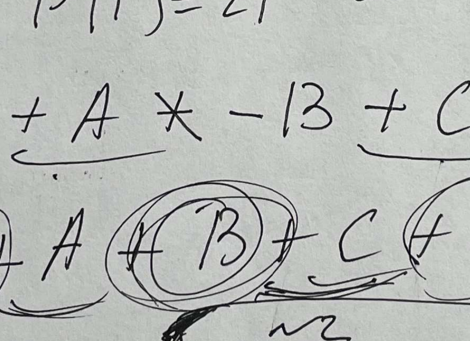
№2

$\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$



№4



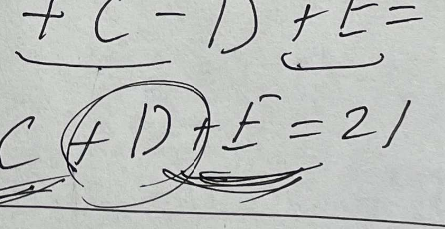



$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$

№3

$A + C + E = 16$

$-B - D = -4$



Чистовик 3

Докажем лемму по индукции:

База $n=1$: просто решим квадратное уравнение

Переход:

Пусть для $n=k$, мы докажем, что решением уравнения $f^k(x)=0$ является $x=-3\pm\sqrt[2^k]{3}$

Тогда $f^{k+1}(x)=f^k(f(x))=0$,

значит этот $x=-3\pm\sqrt[2^k]{3}$ по предположению индукции

Тогда $(x+3)^2=f(x)+3=\pm\sqrt[2^k]{3}$, значит $(x+3)^2=\sqrt[2^k]{3}$, тогда $x+3=\pm\sqrt[2^{k+1}]{3}$, переход доказан

Тогда ответом ~~для~~ задачи будет утверждение леммы для $n=5$

то есть $x=-3\pm\sqrt[32]{3}$

№3

$P(x)=x^5+Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E$, где

$A$

$A, B, C, D, E \in \mathbb{N}$

$P(1)=1+A+B+C+D+E=21$

$(I)\ A+B+C+D+E=20$

$P(-1)=-1+A-B+C-D+E=11$

$\text{II}\quad A+C+E-B-D=12$

$\text{I}-\text{II}$