МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Сергеева Алёна Андреевна**

Класс: **11**

Технический балл: **75**

Дата проведения: **21 марта 2021 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	15	0	15	0

Вариант 210209

Чистовик

Задача 1.

$f(x) = x^2 + 18x + 72 = a$

$f(f(x)) = f(x)^2 + 18 \cdot f(x) + 72 = a^2 + 18a + 72 = b$

$f(f(f(x))) = b^2 + 18b + 72 = c.$

$f(f(f(f(x)))) = c^2 + 18c + 72 = d = 0$

1) $c^2 + 18c + 72 = 0$

$D/4 = 81 - 72 = 9 = 3^2$

$c = -9 \pm 3$

$\left[\begin{array}{l} c = -6 \\ c = -12 \end{array}\right.$

2) • $c = -6$:

$b^2 + 18b + 72 = -6$

$b^2 + 18b + 78 = 0$

$D/4 = 81 - 78 = 3$

$b = -9 \pm \sqrt{3}$

$\left[\begin{array}{l} b = -9 + \sqrt{3} \\ b = -9 - \sqrt{3} \end{array}\right.$

• $c = -12$

$b^2 + 18b + 72 = -12$

$b^2 + 18b + 84 = 0$

$D/4 = 81 - 84 = -3 < 0$

$\Rightarrow$ нет действ. корней.

3) • $b = -9 + \sqrt{3}$

$a^2 + 18a + 72 = -9 + \sqrt{3}$

$a^2 + 18a + 81 - \sqrt{3} = 0$

$D/4 = 81 - 81 + \sqrt{3} = \sqrt{3}$

$a = -9 \pm \sqrt[4]{3}$

$\left[\begin{array}{l} a = -9 + \sqrt[4]{3} \\ a = -9 - \sqrt[4]{3} \end{array}\right.$

• $b = -9 - \sqrt{3}$

$a^2 + 18a + 72 = -9 - \sqrt{3}$

$a^2 + 18a + 81 + \sqrt{3} = 0$

$D/4 = 81 - 81 - \sqrt{3} = -\sqrt{3} < 0$

$\Rightarrow$ нет. действ. корней.

Чистовик

4) • $a = -9 + \sqrt[4]{3}$

$x^2 + 18x + 72 = -9 + \sqrt[4]{3}$

$x^2 + 18x + 81 - \sqrt[4]{3} = 0$

$D/4 = 81 - 81 + \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{3}$

$x = -9 \pm \sqrt[8]{3}$

$\left[\begin{array}{l} x = -9 + \sqrt[8]{3} \\ x = -9 - \sqrt[8]{3} \end{array}\right.$

• $a = -9 - \sqrt[4]{3}$

$x^2 + 18x + 72 = -9 - \sqrt[4]{3}$

$x^2 + 18x + 81 + \sqrt[4]{3} = 0$

$D/4 = 81 - 81 - \sqrt[4]{3} = -\sqrt[4]{3} < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ нет. рац. корней.

Ответ: $x = -9 + \sqrt[8]{3}$;

$x = -9 - \sqrt[8]{3}$.

Задача 2.

$x = 2^1 + 2^0 + 2^{-1} + 2^{-2} + \ldots + 2^{-2021}$

$\sqrt{2x + 4\sqrt{2x-4}} + \sqrt{2x - 4\sqrt{2x-4}}$

• $2x = 2 \cdot (2^1 + 2^0 + \ldots + 2^{-2021}) = 2^2 + 2^1 + 2^0 + \ldots + 2^{-2020} =$

$= (2^1 + 2^0 + \ldots + 2^{-2021}) - 2^{-2021} + 2^2 = x - 2^{-2021} + 2^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x = x - 2^{-2021} + 2^2$

$x = 2^2 - 2^{-2021} = 4 - 2^{-2021}$

$\Rightarrow 2x = 8 - 2^{-2020}$

• $\sqrt{2x + 4\sqrt{2x-4}} = \sqrt{8 - 2^{-2020} + 4\sqrt{8 - 4 - 2^{-2020}}} =$

$= \sqrt{4 - 2^{-2020} + 4\sqrt{4 - 2^{-2020}} + 4} = \sqrt{\left(\sqrt{4 - 2^{-2020}}\right)^2 + 4\sqrt{4 - 2^{-2020}} + 4} =$

$= \sqrt{\left(\sqrt{4 - 2^{-2020}} + 2\right)^2} = \sqrt{4 - 2^{-2020}} + 2$

Чистовик

- $\sqrt{2x+4\sqrt{2x-4}} = \sqrt{8-2^{-2020}-4\sqrt{8-2^{-2020}-4}} =$

$= \sqrt{4-2^{-2020}-4\sqrt{4-2^{-2020}}+4} = \sqrt{\left(\sqrt{4-2^{-2020}}\right)^2-4\sqrt{4-2^{-2020}}+4} =$

$= \sqrt{\left(\sqrt{4-2^{-2020}}-2\right)^2} = \left|\sqrt{4-2^{-2020}}-2\right|$

сравним: $\sqrt{4-2^{-2020}}-2 \overset{?}{\vee} 0$

$\sqrt{4-2^{-2020}} \overset{<}{\vee} 2$ (возв. в кв. т.к. обе части >0)

$4-2^{-2020} \overset{<}{\vee} 4$

$0 \overset{<}{\vee} 2^{-2020}$

$\Rightarrow \sqrt{4-2^{-2020}}-2<0 \Rightarrow$

$\sqrt{2x-4\sqrt{2x-4}} = 2-\sqrt{4-2^{-2020}}$

- $\sqrt{2x+4\sqrt{2x-4}} + \sqrt{2x-4\sqrt{2x-4}} = \cancel{\sqrt{4-2^{-2020}}}+2+2-\cancel{\sqrt{4-2^{-2020}}} =$

$= 4$

Ответ: 4.

Задача 3.

$P(x) = x^5+Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E$

A, B, C, D, E – целые положительные

$\begin{cases} P(-1)=8 \\ P(1)=22 \end{cases}$

Чистовик.

$$\begin{cases} P(-1) = -1 + A - B + C - D + E = 8 \\ P(1) = 1 + A + B + C + D + E = 22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A - B + C - D + E = 9 & * \\ A + B + C + D + E = 21 & ** \end{cases}$$

1) сложим (*) и (**)

$2A + 2C + 2E = 30$

$A + C + E = 15$

2) вычтем из (**) (*)

$2B + 2D = 12$

$B + D = 6$

Найдём все положительные целые решения:

1) для B и D:

т.к. B и D хотя бы 1, то надо разделить между ними оставшиеся 4 единицы:

всего пер чисел $\overline{C_2^4} = C_{2+4-1}^4 = C_5^4 = 5$

2) для A, C, E:

т.к. A, C, E хотя бы 1, то надо разделить между ними оставшиеся 12 единиц:

всего пер. чисел: $\overline{C_3^{12}} = C_{14}^{12} = \frac{\overset{7}{\cancel{14}} \cdot 13}{\cancel{2}} = 91$

По правилу произведения всего комплектов A, B, C, D, E:

$91 \times 5 = \boxed{455}$

✓ Все комплекты подходят т.к. для P(-1) и для P(1) выполняются условия $\begin{cases} -1 + (A+C+E) - (B+D) = 8 \\ 1 + (A+C+E) + (B+D) = 22 \end{cases}$ т.к. в котором комплекте $\begin{cases} A+C+E = 15 \\ B+D = 6 \end{cases}$

а т.к. все комплекты различны, то каждый образует свой многочлен

Ответ: 455 многочленов.

$\boxed{4}$

Чистовик.

Задача 4

$V_м$ - скорость мотоциклиста

$V_в$ - скорость велосипедиста

$$S = \begin{cases} S_1 = 4026м \text{ - расстояние при движении навстречу.} \\ S_2 = 4026м \text{ - расстояние при движении „вдогонку"} \end{cases}$$

L - длина трассы

R - радиус трассы

$t_м = 36мин$ - время мотоциклиста

1) ~~Радит~~ Т.к. при движении только мотоциклиста он проезжает ровно один круг до новой встречи, то $V_м = \frac{L}{36}$ м/мин

Для велосипедиста аналогично:

$$\frac{L}{72} \text{(м/мин)} < V_в < \frac{L}{61} \text{(м/мин)}$$

2) Для движения навстречу: пусть велосипедист проезжает k м до встречи, тогда мотоциклист проедет $(L-k)$м

тогда т.к двигались они одинаковое время, то

$$\frac{k}{V_в} = \frac{L-k}{V_м} \Rightarrow V_в = \frac{k \cdot V_м}{L-k}$$

Отсюда: $\frac{1}{72} < \frac{k \cdot V_м}{L-k} < \frac{1}{61}$

$$\begin{cases} \frac{k \cdot L}{36(L-k)} < \frac{L}{61} \\ \frac{k \cdot L}{36(L-k)} > \frac{L}{\cancel{72}_2} \end{cases} \quad \begin{cases} 61k < 36L - 36k \\ 2k > L-k \end{cases} \quad \begin{cases} k < \frac{36L}{97} \\ k > \frac{L}{3} \end{cases}$$

Чистовик

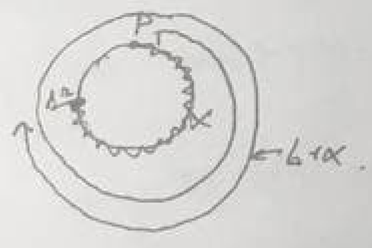
3.

Когда ~~мото~~ двинутся в одном направлении:

Пусть велосипедист проедет x, тогда мотоциклист проедет на 1 круг больше (между двумя последующими встречами)

а т.к. время одинаковое, то

$$\frac{\cancel{x}}{v_в} = \frac{L+x}{v_м}$$



$$v_в = \frac{x\cdot v_м}{L+x} \Rightarrow$$

$$\frac{L}{72} < \frac{x\cdot L}{36(L+x)} < \frac{L}{61}$$

$$\begin{cases} \frac{x\cdot L}{36(L+x)} < \frac{L}{61} \\ \frac{x\cdot L}{36(L+x)} > \frac{L}{72} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 61x < 36L+36x \\ 2x > L+x \end{cases} \quad \begin{cases} x < \frac{36L}{25} \\ x > L \end{cases}$$

а т.к. расстояние между последующими встречами равны

и $\begin{cases} x < \frac{L}{2}+L \\ k < \frac{L}{2} \end{cases}$ а от точки можно отложить только одну хорду данной длины в точку, лежащую на полуокружности,

то $\underline{x = L+k}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x < \frac{36L}{97}+L \\ x > \frac{1}{3}L+L \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \frac{133L}{97} \\ x > \frac{4}{3}L \end{cases} \quad \left(\frac{133L}{97} < \frac{36L}{25}\right)$$

4.

$$\frac{\frac{S}{2}}{R} = \sin\alpha \Rightarrow \boxed{R = \frac{S}{2\sin\alpha}}$$

$$k = \frac{2\pi R}{2\pi}\cdot 2\alpha = \frac{L}{2\pi}\cdot 2\alpha = \frac{L}{\pi}\cdot\alpha$$

$$\Rightarrow R = \frac{S}{2\sin\left(\pi\cdot\frac{k}{L}\right)}$$

$$\begin{cases} k < \frac{36L}{97} \\ k > \frac{L}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{k}{L} < \frac{36}{97} \\ \frac{k}{L} > \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{k}{L} < \frac{108}{291} \\ \frac{k}{L} > \frac{97}{291} \end{cases}$$

Чистовик

б) т.к. $\kappa = L + k$, то

$$\begin{cases} \text{из п.2} & \frac{S_б}{S_м} = \frac{k}{L-k} \\ \text{из п.3} & \frac{S_б}{S_м} = \frac{L+k}{2L+k} \end{cases} \Rightarrow \frac{k}{L-k} = \frac{L+k}{2L+k}$$

$$2Lk + k^2 = L^2 - k^2$$

$$L^2 - k^2 - 2Lk - k^2 = 0$$

$$2k^2 + 2Lk - L^2 = 0$$

Решим кв. относительно k:

$$D/4 = L^2 + 2L^2 = 3L^2$$

$$k = \frac{-L \pm \sqrt{3}L}{2}$$

$$\left[\begin{array}{l} k = \frac{-L + \sqrt{3}L}{2} \\ k = \frac{-L - \sqrt{3}L}{2} \end{array} \right.$$ не подходит т.к. $k > 0$

$\Rightarrow k = \frac{-L + \sqrt{3}L}{2}$, тогда из п. 4.

$$\frac{-\cancel{L} + \sqrt{3}\cancel{L}}{2} = \frac{\cancel{L}}{\pi} \cdot \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = \frac{S}{2\sin\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\pi\right)} = \frac{2013}{\sin\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\pi\right)}$$

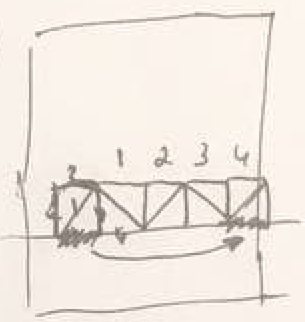
Ответ: $R = \frac{2013}{\sin\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\pi\right)}$

Задача 2

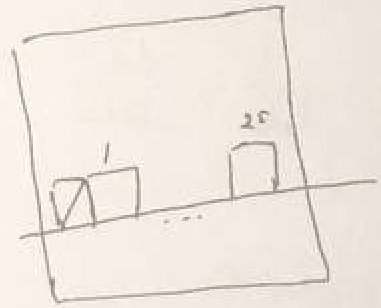
Чистовик.

Задача 5.

1)



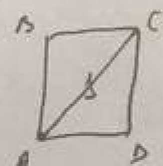
2)



1. За каждую „кантовку" квадрат пачкает одну свою площадь, т.к. при повороте вокруг вершины он перемещается так, ~~что~~ с предыдущим положением у него ровно одна общая сторона (всё это при условии, что его кантуют всегда в одну сторону)

2. Тогда в первом случае окрасили 5 площадей квадрата; во втором 26 площадей (считая с первым его положением)

3. Площадь в первом случае:



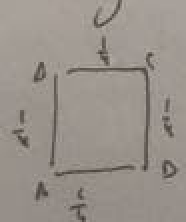
$AC = 1 = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{2AD^2} \Rightarrow$

$2AD^2 = 1 \Rightarrow AD = \frac{\sqrt{2}}{2} = AB = BC = CD \Rightarrow$

$S_{кв_1} = AB \cdot BC = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow S_{общ_1} = 5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$.

4. Площадь во втором случае:



$P = 1 \Rightarrow AB = BC = CD = AD = \frac{P}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow S_2 = AB \cdot BC = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$

$\Rightarrow S_{общ_2} = \frac{1}{16} \cdot 26 = \frac{26}{16} = \frac{13}{8}$

$\Rightarrow$ ~~$S_{общ_1} - S_{общ_2} = \frac{13}{8}$~~

$S_{общ_1} - S_{общ_2} = \frac{5}{2} - \frac{13}{8} = \frac{20}{8} - \frac{13}{8} = \frac{7}{8}$

Ответ: во втором случае удалось испачкать на $\frac{7}{8}$ меньше, чем в первом.

8

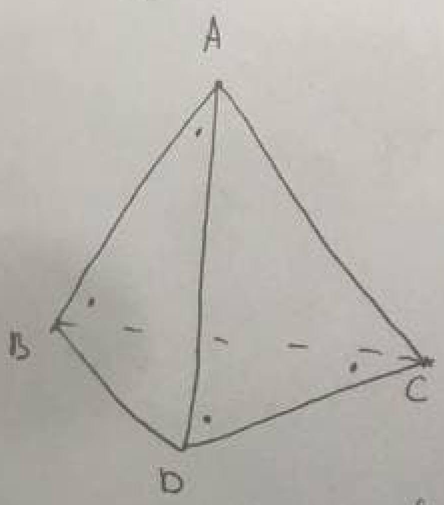
Чистовик.

Задача 7.

$2022 = 2\cdot 3\cdot 337$

$2026 = 2\cdot 1013$

Задача 6.



$$\begin{cases} \angle ABD + \angle ABC + \angle CBD = \angle BAD + \angle BAC + \angle CAD \\ \angle ADB + \angle ADC + \angle BDC = \angle ACD + \angle ACB + \angle BCD \end{cases}$$

$$S_{ABD} + S_{ACD} = S$$

$$S_{ABD} + S_{ADC} = \frac{1}{2}\cdot AD\,(BD\cdot\sin BDA + DC\cdot\sin ADC) =$$

$$= \frac{1}{2}\,AD\,(AB\cdot\sin BAD + AC\cdot\sin CAD)$$

$$S_{ABD} = \frac{1}{2}AD\cdot AB\cdot\sin BAD = \frac{1}{2}AD\cdot BD\cdot\sin ADB$$

$$S_{ACD} = \frac{1}{2}AD\cdot AC\cdot\sin CAD = \frac{1}{2}AD\cdot CD\cdot\sin ADC.$$

$$S_{ABC} + S_{BDC} = \frac{1}{2}BC\,(BD\cdot\sin CBD + AB\cdot\sin ABC) = \frac{1}{2}BC\,(CD\cdot\sin BCD + AC\cdot\sin ACB)$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}BC\cdot AB\cdot\sin ABC = \frac{1}{2}BC\cdot AC\cdot\sin BCA$$

$$S_{BDC} = \frac{1}{2}BC\cdot BD\cdot\sin CBD = \frac{1}{2}BC\cdot CD\cdot\sin BCD$$

Ответ: $2S$