МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Соловьев Егор Дмитриевич**

Класс: **11**

Технический балл: **70**

Дата проведения: **21 марта 2021 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	0	5	5	15

Чистовик 1 вариант 210205

(3) $P(x) = x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$ $\quad A, B, C, D, E \in \mathbb{Z} \geq 0.$

$P(-1) = -1 + A - B + C - D + E = 11$

$P(1) = 1 + A + B + C + D + E = 21$ $\quad (+) \Rightarrow$

$2A + 2C + 2E = 32$

$A + C + E = 16$

$1 + B + D + 16 = 21$

$B + D = 4$

Имеем:

$$\begin{cases} A + C + E = 16 \\ B + D = 4 \end{cases}$$

Кол-во способов решить уравнение $A + C + E = 16$ это перегородки: То есть это количество способов расставить на 15 позиций 2 перегородки, то есть C_{15}^2

Для $B + D = 4$ это расставить 1 перегородку на 3 позиции, то есть C_3^1

Всего: $C_{15}^2 \cdot C_3^1 = \frac{14 \cdot 15}{2} \cdot \frac{3 \cdot 2}{2} = 7 \cdot 15 \cdot 3 = 315$

Ответ: 315

Чистовик 2

1) $f(x) = x^2+6x+6 = x^2+6x+9-3 = (x+3)^2-3$

Заметим, что:

$f(f(x)) = ((x+3)^2-3+3)^2-3 = (x+3)^4-3$

$f(f(f(x))) = f((x+3)^4-3+3)^2-3 = (x+3)^8-3$

~~Значит, если мы возьмем 4 раза функцию~~

Заметив, что взяв функцию f от получившейся функции, мы получим ту же функцию, но уже $(x+3)^n$ будет в квадрате $(x+3)^{2n}$ (т.е. у функции $(x+3)^n$ степень будет увеличиваться в 2 раза)

Тогда:

$f(f(f(f(f(x))))) = (x+3)^{32}-3=0$

$(x+3)^{32}=3$

$x+3 = \pm\sqrt[32]{3} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3+\sqrt[32]{3} \\ x=-3-\sqrt[32]{3} \end{array}\right.$

Ответ: $x=-3+\sqrt[32]{3}$
$x=-3-\sqrt[32]{3}$

Чистовик 3

(2) $x = 2^0 + 2^{-1} + 2^{-2} \ldots + 2^{-2021} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \ldots \frac{1}{2^{2021}} > 1$

$\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$

$\sqrt{x - 1 + 2\sqrt{x-1} + 1} + \sqrt{x - 1 - 2\sqrt{x-1} + 1}$

$\sqrt{(\sqrt{x-1} + 1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1} - 1)^2}$

$\sqrt{x-1} > \sqrt{1-1} > 0 \quad \sqrt{x-1} + 1 > 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{(\sqrt{x-1} + 1)^2} = \sqrt{x-1} + 1$

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \ldots + \frac{1}{2^{2021}}$ – Геометрич. прогресс.

$b_1 = 1 \quad q = \frac{1}{2}$

$$x = S_{2022} = \frac{1 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2022}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2022}\right) < 2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x - 1 < 1 \Rightarrow \sqrt{x-1} < 1 \Rightarrow \sqrt{x-1} - 1 < 0 \Rightarrow$

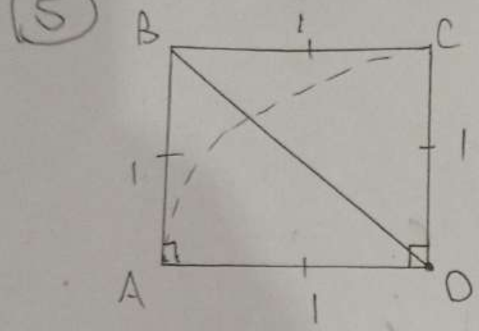
$\Rightarrow \sqrt{(\sqrt{x-1} - 1)^2} = 1 - \sqrt{x-1}$

$$\sqrt{(\sqrt{x-1} + 1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1} - 1)^2} = \sqrt{x-1} + 1 + 1 - \sqrt{x-1} = 2$$

Ответ: 2

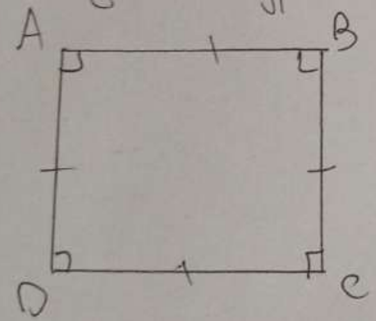
Чистовик 4

(5)



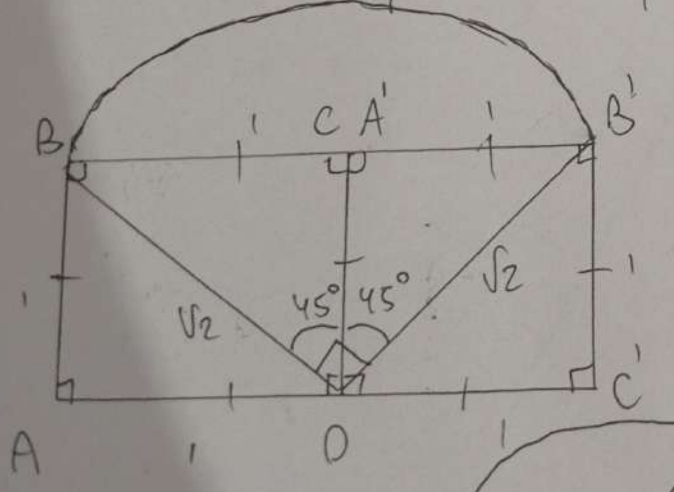
Точка O является точкой опоры, через которую вращается квадрат. Заметим, что AO перейдет в CO при повороте. Тогда точка A будет двигаться по дуге AC, где O - центр окружности, которой принадлежит дуга AC, а AB является касательной, т.к. $AB \perp AO$. Это значит, что касательная при движении не может выйти за пределы стороны AB влево, т.е. при переходе A в C левее стороны AB ничего закрашено быть не может.

Когда квадрат пройдет 1 поворот на 90°, получим рисунок:



Аналогичные рассуждения со стороной BC, то есть правее BC ничего быть не может.

Заметим, что B является самой дальней точкой от O, при этом удалена на диаметр квадрата. Тогда наша B также будет двигаться по дуге окружности с центром O и радиусом BO. Имеем:

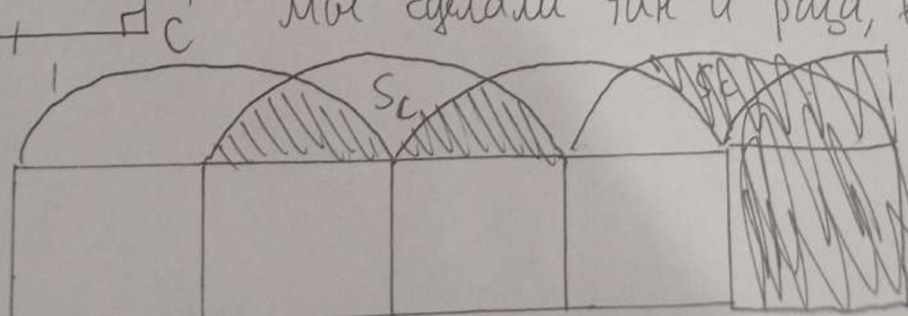


Тогда получившаяся площадь есть площадь данной фигуры:

Также $\angle BOB' = 90°$ т.к. $\angle BOC = \angle B'OA' = 45°$

$BO = B'O = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

Мы сделали так и ряд, в итоге имеем:



Чистовик 5

(5) Продолжение:

серыми штрихами выделены те части, которые квадрат пересек 2 раза.

расчитаем S окрашенной части при 1 повороте квадрата

Имеем:

$2S_{ABCO} = 2$ $\qquad S_{\text{сектора } BOB'} = \frac{\pi(\sqrt{2})^2}{4} = \frac{\pi}{2}$

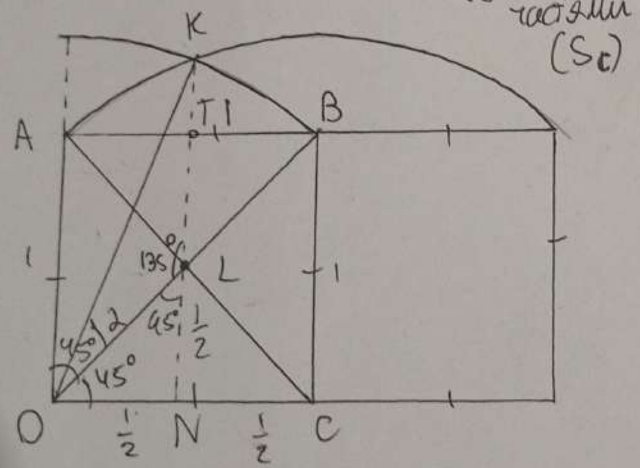
$S_{BOB'} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 1$ $\qquad S_{\text{сектора } BOB'} - S_{BOB'} = \frac{\pi}{2} - 1$

$S = 2S_{ABCO} + \frac{\pi}{2} - 1 = \frac{\pi}{2} + 1$

Пусть $S_з$ - площадь закраш. частей

Тогда полная окрашенная площадь:

$$\underbrace{2S + S_{\text{сектора } BOB'} - 2S_з}_{\substack{\text{площадь фигуры} \\ \text{между закраш.} \\ \text{частями} \\ (S_ф)}} = 2\left(\frac{\pi}{2}+1\right) + \frac{\pi}{2} - 2S_з = \frac{3\pi}{2} + 2 - 2S_з$$



В силу симметрии имеем:

$\cup AK = \cup KB \Rightarrow KN$ - ось симметрии $\Rightarrow ON = NC = \frac{1}{2}$

$OK = \sqrt{2}$

$KN = \sqrt{2 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$

$\sin(\alpha + 45^\circ) = \frac{KN}{OK} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$

$\alpha + 45^\circ = \arcsin\left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}}\right)$

$\alpha = \arcsin\left(\sqrt{\frac{7}{8}}\right) - \frac{\pi}{4}$

$S_{KTB} = S_{KOB} - S_{KOL} - S_{TLB}$

$\triangle AOC, \triangle OLC$ - р/б прямоуг. $\Rightarrow \angle KLO = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$ $\quad OL = 1\cdot\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$KL = KN - LN = \frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{7}-1}{2}$ $\qquad LN = ON = NC = \frac{1}{2}$

$S_{KLO} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(\sqrt{7}-1)}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin 135^\circ = \frac{1}{2}\cdot\frac{(\sqrt{7}-1)}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{7}-1}{8}$

$S_{TLB} = \frac{1}{2}S_{ALB} = \frac{1}{8}S_{AOCB} = \frac{1}{8}$

$S_{KOB} = \frac{1}{2}\cdot(\sqrt{2})^2\left(\arcsin\left(\sqrt{\frac{7}{8}}\right) - \frac{\pi}{4}\right) = \arcsin\left(\sqrt{\frac{7}{8}}\right) - \frac{\pi}{4}$

Чистовик 6

(5) Продолжение 2

$S_{КТВ} = \cancel{\arcsin\sqrt{\tfrac{7}{8}}}\ \arcsin\left(\sqrt{\frac{7}{8}}\right) - \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{7}-1}{8} - \frac{1}{8} =$

$= \arcsin\left(\sqrt{\frac{7}{8}}\right) - \frac{\pi}{8} - \frac{\sqrt{7}}{8}$

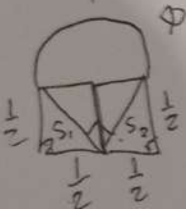
$2S_{КТВ} = 2\arcsin\sqrt{\frac{7}{8}} - \frac{\sqrt{7}+\pi}{4}$

Тогда:

Полная окраш. площадь $= \frac{3}{2}\pi + 2 - 2\left(2\arcsin\sqrt{\frac{7}{8}} - \frac{\pi+\sqrt{7}}{4}\right) =$

$= \frac{3}{2}\pi + 2 - 4\arcsin\sqrt{\frac{7}{8}} + \frac{\pi+\sqrt{7}}{2}$

Для квадрата с ~~периметром~~ полупериметром 1 и 13 оборотами имеем аналогичную ситуацию.



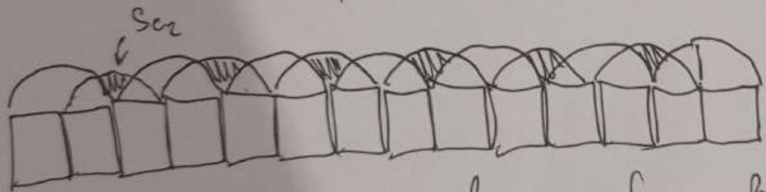
$p = 1 \Rightarrow 2a = 1$

$a = \frac{1}{2}$ - сторона

$S_Ф = S_1 + S_2 + S_{сектора} =$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{4}\cdot\pi\cdot\left(\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}\right)^2 =$

$= \cancel{\frac{1}{4} + \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{1}{8}}} = \cancel{\frac{1}{4} + \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{1}{8}}}\ \frac{1}{4} + \frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\pi+2}{8}$



Заметим, что наш квадрат будет в 2 раза меньше первого. И заметим, что все секторы и фигуры, которые у нас получатся, будут пропорциональные соответствующим секторам 1 квадрата. А площади будут в $2^2 = 4$ раза меньше

Тогда S закрашенной будет в 4 раза меньше, чем у исходного квадрата.

~~Тогда~~ Пусть S_c - площадь фигуры между 2 закрашенными фигурами у 1 квадрата (ранее уже обозначалась за S_c)

Тогда $S_c = \frac{\pi}{2} - 2\left(2\arcsin\sqrt{\frac{7}{8}} - \frac{\pi+\sqrt{7}}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - 4\arcsin\sqrt{\frac{7}{8}} - \frac{\pi+\sqrt{7}}{2}$

Тогда S_{c_2} - площадь закрашенной фигуры у квадрата 2.

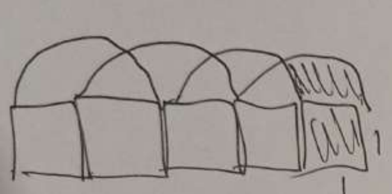
Она равна $S_{c_2} = \frac{S_c}{4} = \frac{\pi}{8} - \arcsin\sqrt{\frac{7}{8}} - \frac{\pi+\sqrt{7}}{8}$

Тогда площадь окрашенная квадратом есть:

$$7S_{ф} - 6S_{c_2} = 7\cdot\frac{\pi+2}{8} - 6\left(\frac{\pi}{8} - \arcsin\sqrt{\frac{7}{8}} - \frac{\pi+\sqrt{7}}{8}\right) =$$

$$= \frac{7\pi+14}{8} - \frac{6\pi}{8} + 6\arcsin\sqrt{\frac{7}{8}} + \frac{6\pi+6\sqrt{7}}{8}$$

У 1 квадрата осталось рассмотреть случай, когда мы довернем его до исходной стороны:



Тогда к $\frac{3\pi}{2} + 2 - 4\arcsin\sqrt{\frac{7}{8}} + \frac{\pi+\sqrt{7}}{2}$ добавим докрашенную часть, равную по площади $\cancel{1 - 1 + S_{BOB'} - S_{KTB}\cdot 2} =$

$$1 + S_{сект.\,BOB'} - S_{BOB'} - 2S_{KTB} =$$

$$\cancel{= 1 + \frac{\pi}{2} - 1 - \left(2\arcsin\sqrt{\frac{7}{8}} - \frac{\pi+\sqrt{7}}{8}\right) =}$$

$$\cancel{= \frac{\pi}{8} - 2\arcsin\sqrt{\frac{7}{8}} + \frac{\pi+\sqrt{7}}{8}}$$

$$= 1 + \frac{\pi}{2} - 1 - \left(2\arcsin\sqrt{\frac{7}{8}} - \frac{\pi+\sqrt{7}}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - 2\arcsin\sqrt{\frac{7}{8}} + \frac{\pi+\sqrt{7}}{4}$$

Итого полная окраш. площадь квадрата 1:

$$\frac{3}{2}\pi + 2 - 4\arcsin\sqrt{\frac{7}{8}} + \frac{\pi+\sqrt{7}}{2} + \frac{\pi}{2} - 2\arcsin\sqrt{\frac{7}{8}} + \frac{\pi+\sqrt{7}}{4} =$$

$$= 2\pi + 2 - 6\arcsin\sqrt{\frac{7}{8}} + \frac{3}{4}\left(\frac{\pi+\sqrt{7}}{2}\right)$$

Тогда разница площадей (Ответ)

$$2\pi + 2 - 6\arcsin\sqrt{\frac{7}{8}} + \frac{3}{4}\left(\frac{\pi+\sqrt{7}}{2}\right) - \frac{7\pi+14}{8} + \frac{6\pi}{8} - 6\arcsin\sqrt{\frac{7}{8}} - \frac{6\pi+6\sqrt{7}}{8} =$$

~~[illegible]~~

Чистовик 8

(7) Пусть ~~~~ Аня взяла из зеленых камней 1 камень.
Тогда их стало 2021 красных и 2021 зеленых.
Пусть Петя на каком-то шаге взял n камней,
тогда мы имеем либо $(a-n; n)$ камней, либо
$(a, a-n)$ камней. т.к. $a \vdots n$, то и $(a-n) \vdots n$ т.к. $n \vdots n$.
Тогда ~~~~ Аня может сделать ход, взяв из другой
кучи тоже n камней, то есть их станет $(a-n; a-n)$.
тем самым, ~~~~ Аня своим ходом сравнивает камни,
а значит именно Аня приведет к счету $(0;0)$ т.е.
одержит победу.

Ответ: Аня

Чистовик 9

(6) Сделаем развертку пирамиды $ABCD$:

Имеем: $A_1 + A_2 + A_3 = B_1 + B_2 + B_3$

$C_1 + C_2 + C_3 = D_1 + D_2 + D_3$

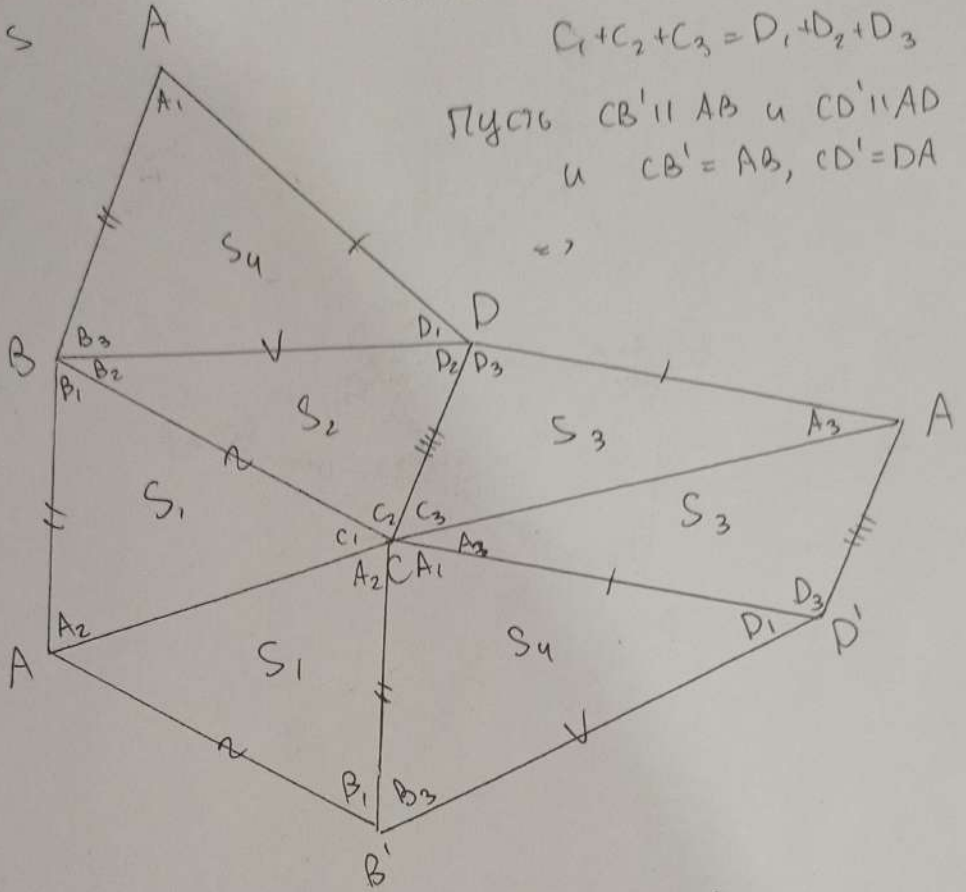
$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = S$

$S_1 + S_2 - ?$

Пусть $CB' \parallel AB$ и $CD' \parallel AD$

и $CB' = AB$, $CD' = DA$

$\Rightarrow$



$A_1 + A_2 + A_3 + B_1 + B_2 + B_3 + C_1 + C_2 + C_3 + D_1 + D_2 + D_3 = 4 \cdot 180^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow A_1 + A_2 + A_3 + C_1 + C_2 + C_3 = 360^\circ$

$B_1 + B_2 + B_3 + D_1 + D_2 + D_3 = 360^\circ$

$ABCB'$, $DAD'C$ - параллелограммы

Тогда получается, что $\triangle CB'D' = \triangle ABD$ по углу и 2 сторонам

$B_2 + D_2 + C_2 + A_1 + B_3 + D_1 = B_1 + B_2 + B_3 + D_1 + D_2 + D_3$

$C_2 + A_1 = B_1 + D_3$

Получаем, что $S_1 + S_2 = S_3 + S_4 \Rightarrow S_1 + S_2 = \frac{S}{2}$

Ответ: $\frac{S}{2}$