МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Стороженко Богдан Игоревич**

Класс: **10**

Технический балл: **75**

Дата проведения: **20 марта 2021 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	15	0	15	0

Решение (страница 2)
(чистовик)

Задача №1

Разобьем нашу сумму на 4 разных 5, $4n$, $-6n^2$, $4n^3$ и рсчитаем их отдельно.

1) Первая сумма про $13 \cdot 13 = 169$

2) Вторая сумма $4 \cdot (1+2+3+\ldots+13) = 4 \cdot \frac{13 \cdot 14}{2} = 2 \cdot 13 \cdot 14 = 364$
(Получим применив формулу $1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

3) Третья сумма $-6(1^2+2^2+\ldots+13^2) = -6 \cdot \frac{13 \cdot 14 \cdot 27}{6} = -4914$
(По ~~фор~~ формуле $1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Найдем формулу для $1^3+2^3+\ldots+n^3$. Понятно, что это многочлен от n четвертой степени. Составим табличку для небольших n. Заметим, что получаются квадраты сумм первых степеней, то есть формула должна быть такой $\frac{n^2(n+1)^2}{2^2}$.

Докажем по индукции что формула работает
Для $n=1$ подходит. Рассмотрим теперь ~~за~~ разность
$\frac{(n+1)^2(n+2)^2)}{4} - \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{(n+1)^2(4n+4)}{4} = (n+1)^3$. Значит, каждый раз сумма увеличивается на $(n+1)^3$ и формула работает.

Значит $4(1^3+2^3+\ldots+13^3) = 13^2(14)^2 = 33124$

Итого сумма $169+364-4914+33124 = \underline{\underline{28743}}$

~~От~~

Ответ: 28743

Решение (Страница 5)
чистовик.

Задача №5

Понятно, что окружность наибольшая по площади - вписанная окружность. Треугольник наибольшей площади - такой, чтобы окружность была для него описанная

Обозначим ~~внешний~~ внутренний треугольник как ABC с основанием BC. А внешний треугольник, как $A'B'C'$! Точки касания внешнего треугольника и окружности A_1, B_1, C_1, A_1 на стороне $B'C'$ и так далее аналогично

Тогда $\angle B'A'C' = j$, $A'C_1 = A'B_1$, так как это касательные, $\Rightarrow \angle A'C_1B_1 = 90 - \frac{j}{2}$.

По теореме об угле между хордой и касательной $\angle C_1A_1B_1 = 90 - \frac{j}{2}$, аналогично $\angle C_1A_1B_1 = 90 - \frac{j}{2}$

Значит $\angle C_1B_1A_1 - j$

Пусть $AB = x = BC$. Тогда $C_1A_1 = x$ так как опирается на ту же дугу.

Мы знаем, что стороны в треугольнике относятся, как синусы углов. Значит $B_1C_1 = x\frac{\sin(90 - \frac{j}{2})}{\sin(j)} = x\frac{\cos(\frac{j}{2})}{\sin(j)}$

Решение (страница 3)
(чистовик)

Задача №3

Оба данные уравнения – квадратные, тогда пусть x_1, x_2 – корни первого уравнения, x_3 x_4 – корни второго уравнения $\Rightarrow$ по теореме Виета:

$$\begin{cases} a = x_1 \cdot x_2 \\ a+1 = x_3 \cdot x_4 \end{cases}$$

Отсюда заметим, что произведение первой пары корней и произведение второй пары корней имеют различную четность и так как эти числа попарно различны ($x_1 \neq x_2$, $x_3 \neq x_4$) и каждое из них больше 1, то найдем минимальное произведение двух различных целых чисел, больших 1, получаем произведение 3 и 5 (легко можно показать, что все предыдущие четны), тогда чтобы a было минимальным то $x_1 x_2 = 14$, то есть $x_1 = 2$, $x_2 = 7$ (или наоборот), что соответствует условиям и $x_3 \cdot x_4 = 15$, то есть $x_3 = 3$, $x_4 = 5$ (или наоборот).

Запишем уравнение, которое мы получим

$$(x-2)(x-7) = x^2 - 9x + 14 = x^2 - 9x + 15 - 1$$

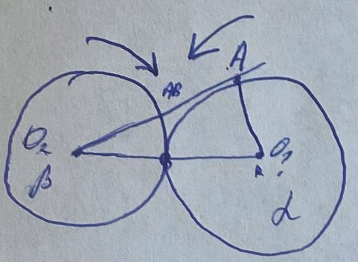
$$(x-3)(x-5) = x^2 - 8x + 15$$

Ответ: 15

Решение (страница 4)
(чистовик)

Задача 4

~~$R_1=R_2$~~



① Начальное положение автомобилей определено рисунком.

т.к. $AO_1 = \frac{1}{2} O_1O_2$, то $\angle AO_1O_2 = 60^\circ$,

$\angle AO_2O_1 = 30^\circ$

② Введём координаты через O_2:

(x_1, y_1) - 1-ое авто

(x_2, y_2) - 2-ое авто

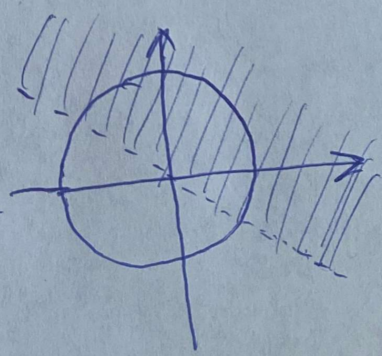
$\cos(\frac{\pi}{6} - wt)$, $\sin(\frac{\pi}{6} - wt)$

$2 + \cos(\frac{2\pi}{3} + wt)$, $\sin(\frac{2\pi}{3} + wt)$

③ $d^2 \le (2 + \cos(\frac{2\pi}{3} + wt) - \cos(\frac{\pi}{6} - wt))^2 + (\sin(\frac{2\pi}{3} + wt) - \sin(\frac{\pi}{6} - wt))^2$

$4^2 \le \sin(wt) + \cos(wt) + 4$

$\sin(wt) \ge -\cos(wt)$



Значит половину времени расстояние будет меньше диаметра

Ответ: 15 минут

Решение (Вариант 210102) (страница 1)
(чистовик)

Задание №2

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-y}+|y-9|=4 \\ \sqrt{x^2-y-16}+|x-3|=2 \end{cases}$$

ОДЗ (второго уравнения)

$x^2-y-16\ge 0 \Rightarrow x^2-y\ge 16$, тогда $\sqrt{x^2-y}\ge 4$
и для 1-го уравнения получаем

$\sqrt{x^2-y}+|y-9|\ge 4+|y-9|=4$

Модуль $|y-9|$ - неотрицательное число, следовательно $|y-9|=0 \Rightarrow y=9$

~~Подставим~~ Подставим в 1-е уравнение

$\sqrt{x^2-y}=4$

$x^2=16+9=25$

$x=\pm 5$

Проверим второе уравнение:

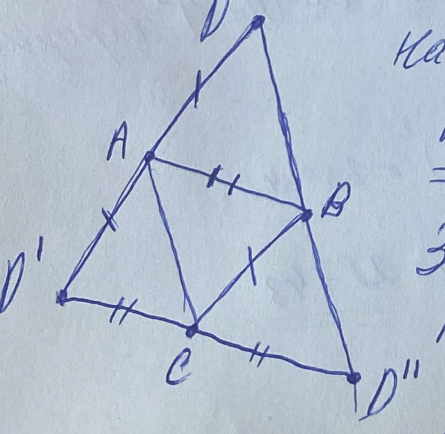
Если $\cancel{x=5}$ $x=-5$, то $\sqrt{x^2-y-16}+|x-3|=8$ - не подходит

Если $x=5$, то $\sqrt{x^2-y-16}+|x-3|=2$ - подходит

Ответ: $x=5$; $\cancel{y=9}$ $y=9$

№6

„Разложим" пирамиду на плоскости следующим образом:



По условию $\alpha+\beta+\gamma=180° \Rightarrow A$ лежит на прямой DD', также имеем $BD=BD''$, $AD'=AD=BC$, $AB=CD' \Rightarrow ABCD'$ - параллелограмм $\Rightarrow DD' \parallel BC \Rightarrow \angle BAD=\angle ABC \Rightarrow \triangle ADB=\triangle BCA \Rightarrow BD=AC=BD''$

Заметим, что мы получили 4 равных по трем сторонам треугольника $\Rightarrow$

$\Rightarrow S_{ABC}=\frac{S}{4}$