МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Сурмалян Николай Арутюнович**

Класс: **11**

Технический балл: **65**

Дата проведения: **21 марта 2021 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	5	0	0	15

Чистовик 1

№ 1

$f(x) = (x+3)^2 - 3$

$f(y) = 0 \Rightarrow y = -3 \pm \sqrt{3}$

(5)

$y = f(z) = -3 \pm \sqrt{3}$; $(z+3)^2 \cancel{-3} = \cancel{-3} \pm \sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (4)

$(z+3)^2 = \sqrt{3}$; $z = -3 \pm \sqrt[4]{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (3)

$u = -3 \pm \sqrt[8]{3}$

$u = f(v) \Rightarrow (v+3)^2 - 3 = -3 \pm \sqrt[8]{3} \Rightarrow$ (2) $v = -3 \pm \sqrt[16]{3}$

$v = f(x) \Rightarrow (x+3)^2 - 3 = -3 \pm \sqrt[16]{3}$

$(x+3)^2 = \sqrt[16]{3}$; $x = -3 \pm \sqrt[32]{3}$

Ответ: $x = -3 \pm \sqrt[32]{3}$

Чистовик 2.

№ 2

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = ?$$

$$x+2\sqrt{x-1} = (1+\sqrt{x-1})^2$$

$$x-2\sqrt{x-1} = (1-\sqrt{x-1})^2$$

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = \sqrt{(1+\sqrt{x-1})^2} = 1+\sqrt{x-1}$$

$$\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = \sqrt{(1-\sqrt{x-1})^2} = |1-\sqrt{x-1}|$$

Чтобы снять модуль надо оценить x.

Предположим, что $1-\sqrt{x-1} > 0$ т.е. $\sqrt{x-1} < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x-1 < 1 \Leftrightarrow \underline{\underline{x < 2}}$

Приведем: $2^0 + 2^{-1} + \ldots + 2^{-2021}$ - геометрическая прогрессия

Знаменатель $q = \frac{1}{2}$, Первый член равен 1.

Тогда сумма этих членов равна

$$S = \frac{1\cdot(1-2^{-2022})}{1-\frac{1}{2}} = 2(1-2^{-2022})$$

Таким образом; $S = 2-2^{-2021} < 2$ и получим, что

$|1-\sqrt{x-1}| = 1-\sqrt{x-1}$; $1+\cancel{\sqrt{x-1}}+1-\cancel{\sqrt{x-1}} = 2$

Ответ: 2

№ 3 Чистовик 3

$x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$

a, b, c, d, e – N (натуральные числа), для которых

$f(-1)=11$, $f(1)=21$.

$f(-1)=11 \Rightarrow -1+a-b+c-d+e=11$

$f(1)=21 \Rightarrow 1+a+b+c+d+e=21 \Rightarrow$

$\Rightarrow a+c+e=16$; $b+d=4$

II уравнение $(b+d=4)$ имеет 3 корня решения в N числах.

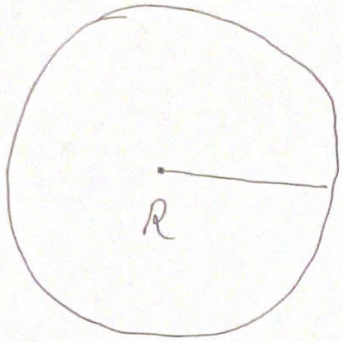
I ур. $(a+c+e=16)$ имеет $C_{15}^2=\frac{15\cdot 14}{2}=105$ решений

(Положим 16 единичек в ряд, разбиваем на 3 группы при помощи 2 прутиков), этому условию подходит $3\cdot 105=\underline{\underline{315}}$ многочленов

Ответ: 315

Чистовик 4

№ 4



R - радиус трассы

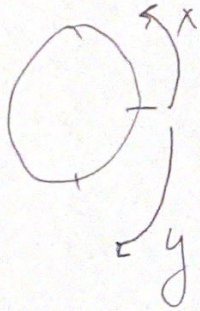
x - скорость мотоцикла ($\frac{м}{мин}$)

y - скорость велосипеда ($м/мин$)

$$\boxed{x = \frac{2\pi R}{36} = \frac{\pi R}{18}}$$

$$61 \le \frac{2\pi R}{y} \le 72 \quad \frac{\pi R}{36} \le y \le \frac{\pi R}{30,5}$$

Движение на встречу друг другу.

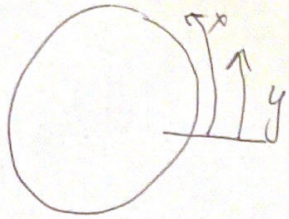


Скорость сближения $v_{сб} = x+y$.

Δt навстречу $= \frac{2\pi R}{x+y}$ - время между встречами => велосипедист проехал $\Delta l = y\Delta t$ навстр $= \frac{2\pi R y}{x+y}$

Δl - длина дуги с хордой 4026 м.

Движение в одном направлении Чистяков Б



Скорость сближения $б_{сб} = x - y$

Δt в одну сторону $= \frac{2\pi R}{x-y}$ – время между встречами =

=> велосипедист проехал $y \cdot \Delta t$ в одну сторону $= \frac{2\pi R y}{x-y}$.

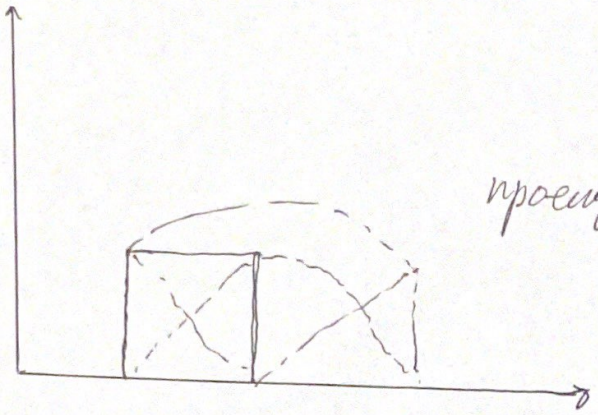
Так как

$$\frac{\pi R}{36} \le y \le \frac{\pi R}{30,5} \Rightarrow -\frac{\pi}{36} \ge -y \ge -\frac{\pi R}{30,5}$$

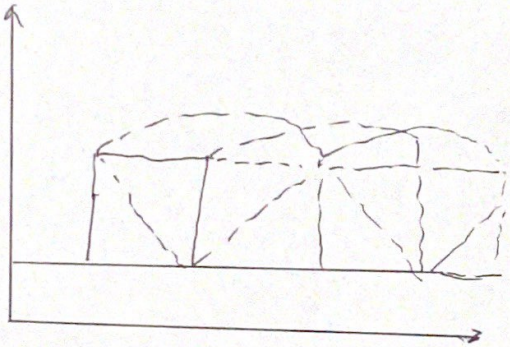
$$\frac{\pi R}{36} \ge x - y \ge \frac{\pi R}{3 R}$$

Чистовик 6

№5

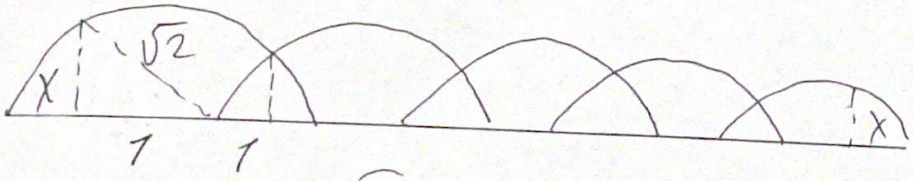


проекция катетов и варата.



Закрашена фигура 1.

Фигура представляет ссобы



Пять полуокружностей с радиусом $\sqrt{2}$ значит S равна: $\frac{2\pi}{2}\cdot 5 - x$, где x – площадь на которой раскладывается полуокружность свои,

а значит её следует вычесть Чистовик

Найдем x:

Это 10 секторов с дугой равен $\frac{\pi}{4}$

Площадь фрагмента равна:

$$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{2\pi} - \frac{R^2 \sin\alpha}{2}$$

дуга $\alpha = \frac{\pi}{2}$, значит

$$S = \frac{2\pi}{4} - \frac{2}{2} = \underline{\frac{\pi}{2} - 1}$$

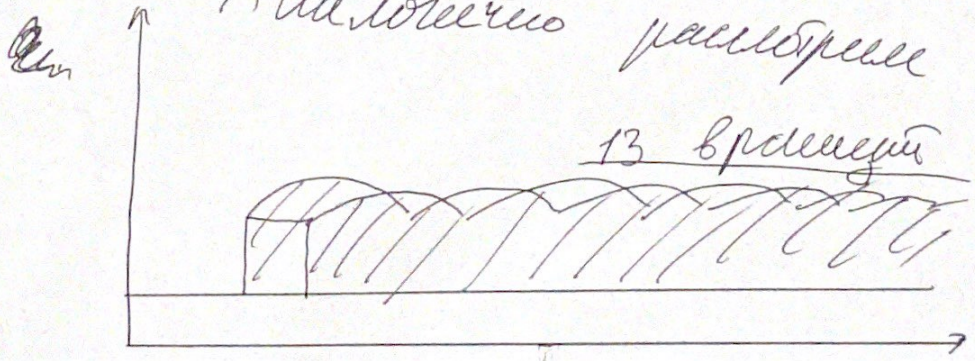
Значит площадь сектора равна

$$\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

Площадь фигуры равна:

$$5\pi - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)\cdot 10 = 5\pi - \frac{5\pi}{2} + 5 = \frac{5\pi}{2} + 5$$

Аналогично рассмотрим вращение



Площадь равна Чистовик 8

$14 \cdot \frac{\pi}{4} - 28\left(\frac{\pi}{16} - \frac{1}{8}\right)$ - (радиус уменьшен

вдвое, значит площади фигурков и полуокружности уменьшены в 4 раза)

$$S = \frac{7\pi}{2} - \frac{7\pi}{4} + \frac{7}{2} = \frac{7\pi}{4} + \frac{7}{2}$$

$$\frac{\frac{7\pi}{4} + \frac{7}{2}}{\frac{5\pi}{2} + 5} = \frac{\frac{7}{4}(\pi + 2)}{\frac{5}{2}(\pi + 2)} = 0{,}7$$

Ответ: в 0,7 раз.

№ 7. Чистовик 9.

Выбираем первый, 1-ый ходом делаем 2021; 2021, далее пусть перед ходом 2-го $a; a$, если он делает a; $a-b$, где $b \neq a$, то раз b а b, то и $a-b \vdots b \Rightarrow$ ~~делает~~ делаем $a-b; a-b$.

Если 2-ой делает $a; 0$, то делаем $1; 0$ и второй берёт последнюю конфету. Таким образом, после нашего хода всегда либо 2 равные ненулевые конф., либо $1, 0$, а значит 1-ый не проиграет.

Ответ: 1

Черновик 10

$x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

N чисел a, b, c, d, e N (нужно ед)

$S(-1) = 11$

$S(1) = 21$

$S(-1) = 11 \Rightarrow -1 + a\ b\ c\ d\ e = \underline{11}$

$S(1) = 21 \Rightarrow 1 + a + b + c + d + e = 21$

$= \begin{cases} a + c + e = 16 \\ b + d = 4 \end{cases}$

$\parallel$

в одн раз 16 ед 3 разл раз лиш по 2 ед.

(уравнение нужно $3 \cdot 105 = 315$

315

разбиение 2 разл.

$C_{15}^2 = \frac{15 \cdot 14}{2} = \underline{105}$

$=$ пара раз

$4 \begin{cases} \underline{k}\ \underline{n} - (-1)\ \underline{k}\ \underline{c}\ \underline{a}\ \text{раз} \\ - - \end{cases}$

$\underline{k}\ \underline{1}\ \underline{2}\ \underline{24}$

$2\ 4\ 2$ | 24 разн

$2 - 2 = 11$ разн...

Черновик 11

1) $f(x) = x^2+6x+6$ $\quad f(f(f(f(f(x)))))=0$ $\quad \boxed{f(x)=(x+3)^2}$

$f(y)=0 \Rightarrow y=\pm 3\sqrt{3}$

(5) $f(f(x) = x^2 \; (x^2+6x+6)^2 + 6(x^2+6x+6)+6 =$

$= x^4 + x^2+6x+6$

$f(x)=(x+3)^2-3$ $\quad x^2+3x+6+3x$

(3) $u = f(v) = (v+3)^2-3^2$
$= -3 \pm 16\sqrt{3}$

$f(y)=0$

(3) $y=-3\pm\sqrt{3}$ $\quad x(x+3)+3\sqrt{(3+x)} = (x+3)^2$

$y=-3\pm\sqrt{3}$ $\quad y=f(x)$

$= x+3^2(x+3^2+3)+3(x+3^2)=$

$= x+3^2 =$ $\quad f(x) = \quad f'=0.$

$v = f(x) =$

$(x+3)^2-3=-3\pm 16\sqrt{3}$ $\quad x+3^2=\frac{16}{\sqrt{3}}$ $\quad x=-3\pm 3^2\sqrt{3}$

$y=f(z)-3\pm\sqrt{3}$; $(z+3)^2-3=-3\pm\sqrt{3}$

(4) $(z+3)^2=\sqrt{3}$ (2) $v=-3\pm 16\sqrt{3}$

$x = 2^0+2^{-1}+2^{-2}+2^{-3}+\ldots+2^{-2021}$

$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$

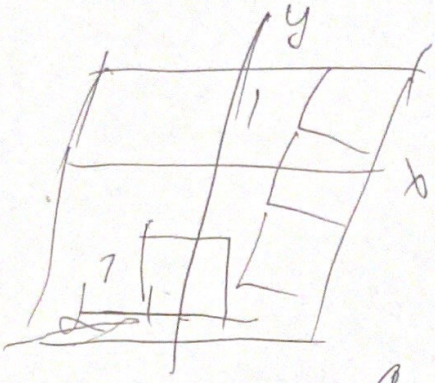
$2^{-8} = \frac{1}{256} + \frac{1}{256}$

$x^n \quad n=1-2020$

$1+\frac{1}{2}^{-1}$ $\quad \frac{2}{16}$ $\quad \sqrt{\frac{257}{256}-1}$ $\quad \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{256}}$

$257-32 = 225$

Черновик 12



S_α ?

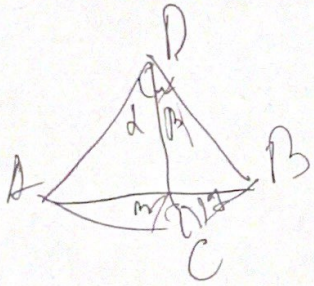
S_1 чувств. куб. = 1

(пред = 1 · S_x ...

дчеть у пруда

13 раз 13у - ...

$\frac{1}{12}$ = 12 ...



$\angle\beta + B = \angle m + \angle g$ пруд ...

$S_{ABC} + S_{BCD}$ - ? $S_{ABC} = S$.

$S = S_{ABC} + S_{CDB} + DAC + ACB$

Решение часа отсюда

Если длина равна то

$\angle DAC = DBC$ так $(180 - \beta + B)$.

Мотоциклист $\Rightarrow \triangle ADC \sim DBC$ (Сверху и 2 угла) -

38 мин. | 36 м | ... в тру ... $K = 1$ => = они равны.

Велосипед

реш. 64 мин. | 61 м | $\frac{2}{5}$

дальше 76 | 72 м | $\frac{S}{2} + \frac{S}{3} = \frac{3S + 2S}{6} = \frac{5S}{6}$

Черновик 13

$\sqrt{\frac{225}{256}} + \sqrt{1 - \sqrt{x-1} < 2}$ $\quad x + 2\sqrt{x-1} = (1+\sqrt{x-1})^2$

$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = \sqrt{1 + \ldots}$

$\frac{15}{16} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$

$\cancel{\frac{257}{256} + \frac{32}{8} = \frac{\ldots}{256} = \frac{17}{16}}$

$x - 1 < 1$

$x < 2$ $\quad 1 + \sqrt{x-1} + 1 - \sqrt{x-1} = 2 = \frac{1}{6}$ $\quad q = \frac{1}{2}$ сумма $= 1$

$\cancel{\frac{15}{16} + \frac{17}{16} = \frac{32}{16} = 2}$

$P(x) = x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$, где $ABCDE$ – целые положительные числа, для которых $P(-1) = \pi$; $P(1) = 2$

у длины числа

122

$\frac{4064}{12} = 213$ сек

длина сумма

24 – 12

$v_1 = 0 \Rightarrow v_2 = \frac{s}{36}$

$v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = \frac{s}{61}$

s	x	x+3
v	y+2	0
t	1+1	1+12

$\begin{cases} y = \frac{4026}{\left(\frac{x}{61} + \frac{x}{36}\right)} \\ \frac{x}{61} + \frac{x}{36} = \frac{x}{61} + \frac{36 \cdot 2}{x} = \end{cases}$

$\begin{cases} \left(\frac{x}{61} + \frac{x}{36}\right) \cdot y = 4026 \\ y(61x + 36y) = 4026 \end{cases}$

$\frac{1}{120} = \frac{1}{120}$