МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Торова Анна Дмитриевна**

Класс: **11**

Технический балл: **65**

Дата проведения: **21 марта 2021 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	0	5	0	15

Чистовик

1

№1

$f(x) = x^2 + 18x + 72$

$f(f(f(f(x)))) = 0$

$f(x) = x^2 + 18x + 72 = x^2 + 18x + 81 - 9 = (x+9)^2 - 9$

Пусть $f(f(f(x))) = t$

$f(t) = 0$

$(t+9)^2 - 9 = 0$

$(t+9-3)(t+9+3) = 0$

$(t+6)(t+12) = 0$

$\left[\begin{array}{l} t = -6 \\ t = -12 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(f(f(x))) = t = -6 \\ f(f(f(x))) = t = -12 \end{array}\right.$

Пусть $f(f(x)) = y$

$\left[\begin{array}{l} f(y) = -6 \\ f(y) = -12 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} (y+9)^2 - 9 = -6 \\ (y+9)^2 - 9 = -12 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} (y+9)^2 - 3 = 0 \\ (y+9)^2 + 3 = 0 \end{array}\right.$

невозможно, т.к. $(y+9)^2 + 3 \geq 3$

$(y+9-\sqrt{3})(y+9+\sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{l} y = -9 + \sqrt{3} \\ y = -9 - \sqrt{3} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(f(x)) = -9 + \sqrt{3} \\ f(f(x)) = -9 - \sqrt{3} \end{array}\right.$

Пусть $f(x) = w$

$\left[\begin{array}{l} f(w) = -9 + \sqrt{3} \\ f(w) = -9 - \sqrt{3} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} (w+9)^2 - \cancel{9} = -\cancel{9} + \sqrt{3} \\ (w+9)^2 - \cancel{9} = -\cancel{9} - \sqrt{3} \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} (w+9)^2 - \sqrt{3} = 0 \\ (w+9)^2 + \sqrt{3} = 0 \text{ — невозможно, т.к. } (w+9)^2 + \sqrt{3} \geq \sqrt{3} \end{array}\right.$

Чистовик

(10)

$$\begin{cases} V_М = \frac{15\pi R}{11} \\ \frac{15\pi R}{8} < V_В < \frac{24\pi R}{11} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_В > \frac{V_М}{2} \\ V_В < \frac{2V_М}{55} \end{cases}$$

Навстречу: $t_1 = \frac{2\pi R}{V_М + V_В} \Rightarrow S_1 = \frac{V_В}{V_М + V_В} \cdot 2\pi R \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\alpha_1}{2\pi} = \frac{S_1}{2\pi R} = \frac{V_В}{V_М + V_В}$$

$$\Rightarrow 4022 = R\sqrt{2 - 2\cos 2\pi \cdot \frac{V_В}{V_М + V_В}}$$

В одном направлении:

$$t_2 = \frac{2\pi R}{V_М - V_В} \Rightarrow S_2 = \frac{V_В}{V_М - V_В} \cdot 2\pi R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha_2}{2\pi} = \frac{V_В}{V_М - V_В} \Rightarrow 4022 = R\sqrt{2 - 2\cos\left(\frac{2\pi V_В}{V_М - V_В}\right)}$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{2\pi V_В}{V_М + V_В}\right) = \cos\left(2\pi \frac{V_В}{V_М - V_В}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\pi \frac{V_В}{V_М + V_В} = \pm 2\pi \frac{V_В}{V_М - V_В} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{2V_М V_В}{V_М^2 - V_В^2} = k \\ \frac{-V_В^2}{V_М^2 - V_В^2} = k \end{array}\right.$$

Чистовик ②

$(w+9-\sqrt[4]{3})(w+9+\sqrt[4]{3})=0$

$\left[\begin{array}{l} w=-9+\sqrt[4]{3} \\ w=-9-\sqrt[4]{3} \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} f(x)=-9+\sqrt[4]{3} \\ f(x)=-9-\sqrt[4]{3} \end{array}$

$\left[\begin{array}{l} (x+9)^2-9=-9+\sqrt[4]{3} \\ (x+9)^2-9=-9-\sqrt[4]{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x+9)^2-\sqrt[4]{3}=0 \\ (x+9)^2+\sqrt[4]{3}=0 \end{array}\right.$ - невозможно, т.к.

$(x+9)^2+\sqrt[4]{3} \geq \sqrt[4]{3}$

$(x+9-\sqrt[8]{3})(x+9+\sqrt[8]{3})=0 \Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{l} x=-9-\sqrt[8]{3} \\ x=-9+\sqrt[8]{3} \end{array}\right.$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x=-9-\sqrt[8]{3} \\ x=-9+\sqrt[8]{3} \end{array}\right.$

№2

$x=2^{-1}+2^{-2}+2^{-3}+2^{-4}+\ldots+2^{-2021}$

$\sqrt{2x+2\sqrt{2x-1}}+\sqrt{2x-2\sqrt{2x-1}}=?$

$2x=1+x-2^{-2021} \Rightarrow x=1-2^{-2021}$

$\sqrt{2x+2\sqrt{2x-1}} * \sqrt{2x-2\sqrt{2x-1}}=\sqrt{4x^2-8x+4}=$

$=2|x-1|=2^{-2020}$

$\sqrt{2x+2\sqrt{2x-1}}^{\,2}+\sqrt{2x-2\sqrt{2x-1}}^{\,2}=4x=4-2^{-2019}$ (и)

$\Rightarrow$

Чистовик

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt{4 - 2^{-2019} + 2 \cdot 2^{-2020}} = \sqrt{4} = 2$$

Ответ: 2

№3

$P(x) = x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$

$$\begin{matrix} P(-1) = 9 \\ P(1) = 21 \end{matrix} \Rightarrow \left[\begin{matrix} -1 + A - B + C - D + E = 9 \\ 1 + A + B + C + D + E = 21 \end{matrix}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A - B + C - D + E = 10 \\ A + B + C + D + E = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} 2(A + C + E) = 30 \\ 2(B + D) = 10 \end{matrix} \Rightarrow$$

$A + C + E = 15$

$\Rightarrow B + D = 5$

Числа по условию целые и положительные $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ натуральные

$$5 = \begin{cases} 1+4 \\ 2+3 \\ 3+2 \\ 4+1 \end{cases} \Rightarrow 4 \text{ варианта}$$

Для числа 15 переформулируем задачу:

$\underline{0 \ldots 0}$

У нас имеется 15 шаров и 2 перегородки

у нас имеется 15 шаров и 2 перегородки между шарами, надо расставить эти 2 перегородки между шарами, при этом они не могут стоять рядом

Чистовик

Вариантов:

$\frac{14 \cdot 13}{2} = 91$ => всего многочленов $91 \cdot 4 = \underline{364}$

Ответ: 364 варианта

№7

1 ходом Таня забирает 2 зелёных камня (ост. 2022 и 2022)

Далее на каждом ходу, после хода Коли, Таня будет делать так, чтобы камней в кучах было поровну.

Докажем, что это всегда возможно:

Пусть в каждой куче x камней и Коля забирает t камней из 1 кучи

=> по условию $x = tk$ => в 1 куче осталось $tk - t = t(k-1)$

Случай 1: $k \neq 1$ => Таня забирает из 2 кучи t камней, т.к. $t(k-1) \equiv 0 \pmod t$ => во 2 куче также $t(k-1)$

Случай 2: $k = 1$ => в 1 куче 0, а значит, что Таня забирает также t камней и выигрывает, потому что она забрала последняя

=> Таня всегда может сделать равное число камней, а значит она выигрывает, т.к. в какой-то момент Катя заберёт из одной кучи последние камни => Таня победит

↑ из случая №2

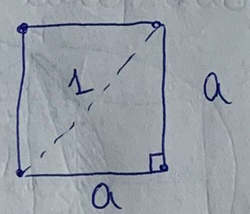
Ответ: Таня

№5

"кантовать" = поворачивать на 90°, опираясь на одну из вершин

Квадрат №1: Диагональ = 1 =>

Пусть его сторона = a



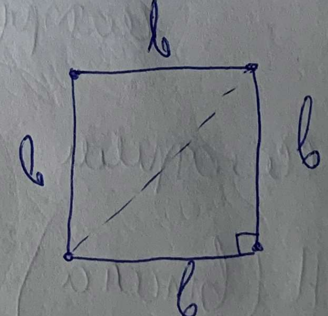
$a^2+a^2=1$

$2a^2=1$

$a^2=1/2$

$a=1/4$ (т.к. $a>0$) => сторона кв. 1 равна $1/4$

Квадрат №2: Периметр = 1 => Пусть его сторона b



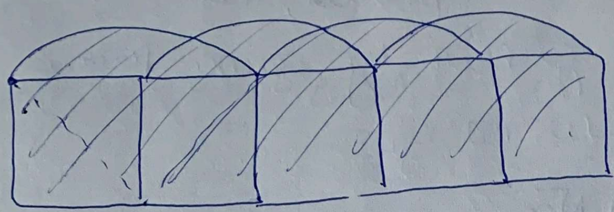
$b+b+b+b=1$

$b=1/4$ => сторона кв. 2 равна $1/4$

Квадрат 1 прокантовали 4 раза

Квадрат 2 — 25 раз

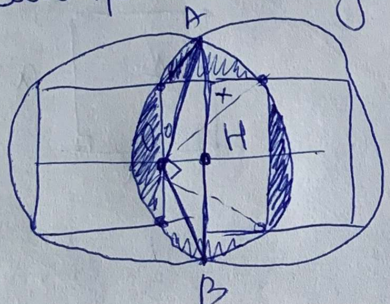
Чистовик



это квадраты
то, что заштриховано –
раскраска

При повороте в 1 случае отражается большая часть, как на рисунке: 5 квадратов + „шапка" – кусочки секторов круга, по окружности которого перемещается левая верхняя вершина на место правой верхней.

Рассмотрим каждую конструкцию:



x – диагональ квадрата.
Пусть черные –(это заштрихованные) кусочки имеют площадь A, синие (слабо заштрихованные) – B

Тогда $B = \underbrace{\frac{\pi}{4}x^2}_{\text{площадь сектора}} - \underbrace{\frac{1}{2}x^2}_{\text{площадь квадрата}} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)x^2 \Rightarrow$

Рассмотрим $\triangle OAB$: $OA = OB = x$

OH (высота) $= \frac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{x}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \cos(\angle AOH) =$

$= \frac{OH}{AO} = \frac{x/2\sqrt{2}}{x} = 1/2\sqrt{2}$

$\Rightarrow \cos(\angle AOB) = \cos(2 \cdot \angle AOH) = 2\cos(\angle AOH) - 1 =$

$= 2 \cdot 1/8 - 1 = -3/4$

Чистовик

(7)

$\Rightarrow \cos(\angle AOB) = \frac{-3}{4} \Rightarrow \angle AOB = \arccos\left(\frac{-3}{4}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ площадь сектора AOB:

$$\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot x^2 = A + B + \frac{x^2}{2} + S(\Delta AOB) =$$

$$= A + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)x^2 + \frac{x^2}{2} + S(\Delta AOB)$$

$$(*)\ \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{-3}{4}\right)x^2 = A + \frac{\pi}{4}x^2 + S(\Delta AOB)$$

По Th. Пифагора:

$$\left(\frac{AB}{2}\right)^2 = x^2 - \frac{x^2}{8} \Rightarrow AB^2 = \frac{7}{32}x^2 \Rightarrow AB = \frac{\sqrt{7}}{4\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S(\Delta AOB) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{4\sqrt{2}}x\frac{x}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7}}{32}x^2$$

$(*)$

$$\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)x^2 = A + \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{7}}{32}\right)x^2$$

$$A = \left(\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{-3}{4}\right) - \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{7}}{32}\right)x^2$$

$$B = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)x^2$$

Вернемся к нашей задаче:

В 1-ом случае площадь:

$$S_1 = \underbrace{5\cdot\frac{1}{2}x^2}_{S_{\text{квадратов}}} + 5A + 4(B - 2A) = \frac{5}{2}x^2 + 4B - 3A =$$

$$= \frac{5}{2}x^2 + (\pi - 2)x^2 - \frac{3}{2}\arccos\left(-\frac{3}{4}\right) +$$

$$+ \frac{3\pi}{4} + \frac{3\sqrt{7}}{32} =$$

Чистовик

(8)

$$= \frac{1}{2} + \frac{7\pi}{4} + \frac{3\sqrt{7}}{32} - \frac{3}{2}\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)$$

2) Во II случае:

$$S_2 = 26\cdot\frac{x^2}{2} + 26A + 25(B-2A) = 13x^2 + 25B - 24A =$$
$$= 13x^2 + 25\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)x^2 - 24\left(\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{3}{4}\right) - \frac{\pi}{4} -\right.$$
$$\left.- \frac{\sqrt{7}}{32}\right)x^2 = 13x^2 + 25\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)x^2 - 12\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)x^2 +$$
$$+ 6\pi x^2 + \frac{3\sqrt{7}}{4}x^2$$

Тогда $S_2 = \frac{13}{4} + \frac{25\pi}{16} - \frac{25}{8} - 3\arccos\left(-\frac{3}{4}\right) +$

$$+ \frac{3\pi}{2} + \frac{3\sqrt{7}}{16} = \frac{1}{8} + \frac{49\pi}{16} + \frac{3\sqrt{7}}{16} - 3\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)$$

Значит

$$S_1 - S_2 = \frac{1}{2} + \frac{7\pi}{4} + \frac{3\sqrt{7}}{32} - \frac{3}{2}\arccos\left(-\frac{3}{4}\right) - \frac{1}{8} - \frac{49\pi}{16} -$$
$$- \frac{3\sqrt{7}}{16} + 3\arccos\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{8} - \frac{21\pi}{16} - \frac{3\sqrt{7}}{32} + \frac{3}{2}\cdot$$
$$\cdot\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)$$

Чистовик

№6

$$\begin{cases} \Sigma\angle A = \Sigma\angle B \\ \Sigma\angle C = \Sigma\angle D \end{cases} \Rightarrow \text{Пирамида симметрична, т.к. замена } \begin{cases} C \to B \\ B \to C \\ A \to D \\ D \to A \end{cases}$$

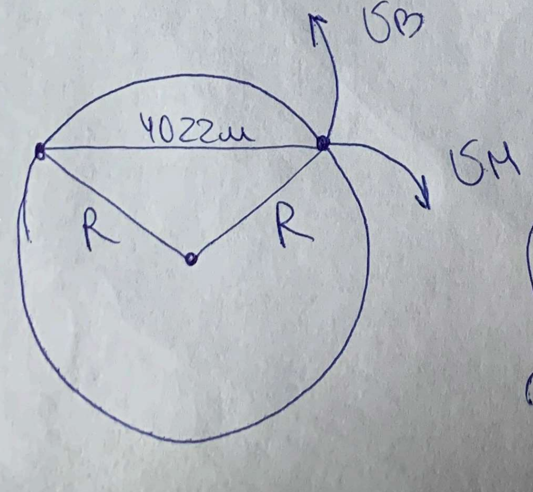
Оставит все, как и прежде (т.к. все условия сохраняются про сумму плоских углов)

Если до замены $S_{ABC} + S_{ACD} = C$, то после замены $S_{DCB} + S_{DBA} = S$

Тем самым получаем, что $S_{поверхности} = S_{ABC} + S_{DCB} + S_{ACD} + S_{DBA} = 2S$

Ответ: 2S

№4



V_B - скорость велосипедиста

V_M - скорость мотоциклиста

$$\begin{cases} \dfrac{2\pi R}{V_M} = \dfrac{8}{15}ч \\ \dfrac{11}{12}ч < \dfrac{2\pi R}{V_B} < \dfrac{16}{15}ч \end{cases} \Leftrightarrow$$