МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Урусова Эвелина Викторовна**

Класс: **11**

Технический балл: **70**

Дата проведения: **20 марта 2021 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	10	15	15	15	0	15	0

Чистовик   В-210104

№3

1

$$\begin{cases} x^2+bx+a=0 & (1) \\ x^2+cx+a-1=0 & (2) \end{cases}$$

Пусть корни (1) x_1 и x_2, а корни (2) x_3 и x_4. Причем $x_1 \neq x_2$, $x_3 \neq x_4$. Тогда по т. Виета $a = x_1x_2$

$a-1 = x_3x_4$

~~Причем $x_{1,2,3,4} \in Z$ и < -1. $\Rightarrow$ a и $a-1$ - составные числа, а также взаимно просты $\Rightarrow$ все $x_{1,2,3,4}$ - различны $\Rightarrow$ есть~~

$x_{1,2,3,4} \in Z$ и < -1 $\Rightarrow$ начнем перебор от -6 (как $-2\cdot(-3)$) мы должны найти такую наименьшую пару чисел, что являются составными и не квадратами простого числа

проста, кв. пр. числа, пр, пр

6 7 8 9 10 11 12 13 14 15   Нетрудно убедиться, что это 14 и 15 $\Rightarrow$ $a-1=14$ $a=15$ минимальна

Пример
$$\begin{cases} x^2+8x+15=0 \\ x^2+9x+14=0 \end{cases}$$

$x_{1,2} = -3; -5$

$x_{3,4} = -7; -2$

Ответ: $a=15$ — минимальное

1. 2. (3)

Истинск (2)

№2

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y}+|y+3|=1 \quad (1) \\ \sqrt{x^2+y-1}+|x+3|=1 \quad (2) \end{cases}$$

, т.к $|y+3| \geqslant 0$, то $\sqrt{x^2+y} \leq 1$ (1)

, т.к $|x+3| \geqslant 0$, то $\sqrt{x^2+y-1} \leq 1$ (2)

$\Rightarrow \underline{x^2+y \leq 1}$ (из (1)).

$x^2+y-1 \geqslant 0$ (из (2)), т.к подкоренное выражение $\geqslant 0$

$\Rightarrow \underline{x^2+y \geqslant 1}$ $\Rightarrow \boxed{x^2+y=1}$

$\Rightarrow$ из (1) $|y+3|=0 \Rightarrow \underline{y=-3}$ $\Rightarrow$ из (2) $|x+3|=1$

$\Rightarrow x=\left[\begin{array}{l}-4 \\ -2\end{array}\right.$ Проверим оба корня

1) $x=-4 \longrightarrow \sqrt{16-3}+|-3+3| \neq 1$ – не подходит

2) $\underline{x=-2} \longrightarrow \sqrt{4-3}+|-3+3|=1 \longrightarrow 1+0=1$, $1=1$

$\sqrt{4-3-1}+|-2+3|=1 \longrightarrow 0+1=1$, $1=1$

Подходит

Ответ: $(-2;-3)$

№1

Итоги (3)

$f(1)+f(2)+\dots f(11)$, если $f(n)=4n^3+6n^2+4n+9$

$\parallel$

$4(1^3+2^3+\dots 11^3)+6(1^2+\dots 11^2)+4(1+\dots 11)+9\cdot 11$

$\parallel \qquad \parallel \qquad \parallel \qquad \parallel$

$4\cdot 66 \quad +99$

$4\cdot(1+\dots 11)^2 + 6\cdot \frac{11\cdot 12\cdot 23}{2} = \quad +$

Формула для нахождения суммы квадратов

$n\frac{(n+1)(2n+1)}{6}$

Докажем по индукции, что сумма кубов первых n чисел $= \quad 1^3+\dots n^3=$

$=(1+\dots n)^2$

База $1^3+2^3=(1+2)^2=9$ (1)

Предположим $1^3+\dots n^3=(1+\dots n)^2=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2=\frac{(n+1)^2 n^2}{4}$

Шаг $(1+\dots n^3+(n+1)^3) = $ доказать д-ть $(1+\dots n+n+1)^2$ (2)

$\parallel$

$\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$

Вычтем из ② ①-е: $(n+1)^3 = \frac{(n+1)^2\left((n+2)^2 - n^2\right)}{4}$ = числитель ②

$= \frac{(n+1)^2 \cdot 2 \cdot (2n+2)}{4} = (n+1)^3$ - верно

$\Rightarrow$

$1^3 + \dots k^3 = (1 + \dots k)^2$

Итого

$4 \cdot 66^2 + 6 \cdot \frac{11 \cdot 12 \cdot 23}{6} + 4 \cdot 66 + 99 =$

$= 4356 + 3036 + 264 + 99 = 7755$

Дополнительно

Д-м, что сумма первых n кв-ов $= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ по индукции

1) База $1^2 + 2^2 = \frac{2 \cdot (2+1)(4+1)}{6} = 5$

2) Пусть $1^2 + \dots n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ①

3) Тогда $1^2 + \dots n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1)}{6}$ ②

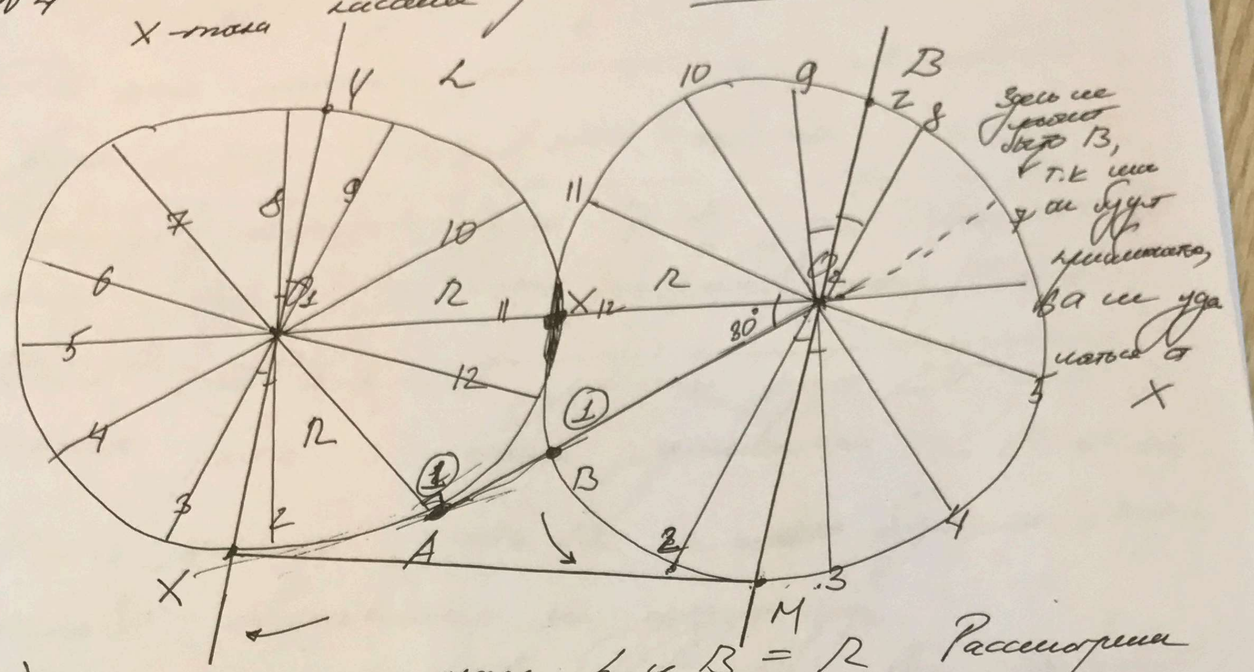
надо д-ть

Вычтем из ② ①-е:

$(n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3) - n(n+1)(2n+1)}{6} =$

$= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6 - 2n^2 - n)}{6} = (n+1)^2$ - верно чтд

№4 X-точка касания окр Чистовик 5



1) Пусть радиус окр L и B = R. Рассмотрим $\triangle AO_1O_2$. $O_1A=R$, $O_1O_2=2R$ - т.к. касание ⇒

$\angle O_1AO_2 = 90°$ - т.к. O_2A - касат-я к L

⇒ $\angle O_1O_2A=30°$ как противолежащий катету, кот-й в 2 раза < гипотенузы.

2) Разобьем окружности на сектора по 30° (12 секторов). Проведем бис-су м/у ~~...~~ 2 и 3 (соответственно и 8 и 9 т.к. симметрично). Расставим точки X, Y, Z, M так как показано на рисунке, заметим, что

$\angle XO_1O_2 = 30\cdot 3+30:2=105°$ $\angle O_1O_2M=30+30+30:2= 75$ ⇒ т.к. $\angle XO_1O_2+\angle O_1O_2M=180°$, то являются односторонними при $O_1X \parallel O_2M$ ⇒. Также $O_1X=O_2M=R$

признак (6)

$\Rightarrow O_1O_2MX$ – пар-м по признаку $\Rightarrow XM = O_1O_2 = 2R$

До этого момента расстояние м/у автомобилями будет $\leq 2R$. Докажем это также расстояние

~~станет ... будет $\geq 2R$ до ... пока когда автомобили выходят в точки Y и Z~~

Так по аналогии расстояние будет $2R$, далее начнёт расти, а потом уменьшаться и в точках Y и B достигнет снова $2R$ и будет уменьшаться, пока автомобили не сделают круг.

Таким образом, ровно половину всего времени у автомобилей было расстояние $\leq 2R$ (от точки M до B и X до Y соответственно) $\Rightarrow$ время $= 1{,}5ч : 2 = 45$ мин

Ответ: 45 мин

№5

Найдем коэф-т подобия Δ-ов как отношение вписанных окр-ей т.е радиуса R описанной окр-ти ΔABC и радиуса вписан. ΔABC

$AC = 2a,\ b = \dfrac{a}{\sin\frac{\alpha}{2}},\ 1 = S = \frac{1}{2}\cdot 2a\cdot h = ab\cos\frac{\alpha}{2} =$

$= \dfrac{a^2\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} \qquad a^2 = tg\,\frac{\alpha}{2}$

$R = \dfrac{2a\,b\,b}{4S} = \dfrac{a^3}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}$

№8

листок (4)

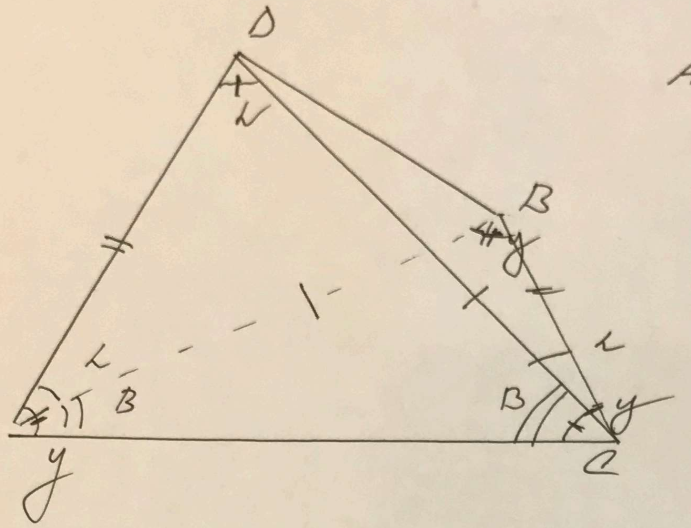
Дано

S

AB=CD

AD=BC

$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$



Решение

1) Рассмотрим ΔADC и ΔCBA. Они равны по 3-м сторонам ($AD=BC$, $DC=AB$, AC-общая) =>

=> $\angle ACB = \angle DAC = \gamma$, $\angle ACD = \angle BAC = \beta$

2) Рассмотрим ΔDCB и ΔBAD. Они равны по 3-м сторонам (DB-общая, $DC=AB$, $BC=AD$) => все соответственные углы тоже равны

3) Рассмотрим ΔADC и ΔDAB 1) DA-общая, $DC=AB$, $\angle DAB=\alpha$, $\angle ADC=180-\gamma-\beta=\alpha$ (т.к по условию $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$) => $\Delta ADC=\Delta DAB$ - по 2-м сторонам и $\angle$ м/у ними

=> все Δ-ки равны, $S_{BCD}=\frac{S}{4}$

Председателю апелляционной комиссии олимпиады школьников «Ломоносов» Ректору МГУ имени М.В. Ломоносова академику В.А. Садовничему

ученицы 11 класса ГБОУ школы 1387 в городе Москве

Урусовой Эвелины Викторовны

апелляция.

Здравствуйте! Прошу пересмотреть выставленные технические баллы за мою работу (70 баллов) заключительного этапа по математике, а именно результат проверки за задачу №1. Я полагаю, что за нее была выставлена оценка 10/15. Мое решение отличается от эталонного, потому что вместо приведения исходной функции к виду $f(n) = n^4 - (n-1)^4 + 14$, я привожу формулы суммы последовательных членов 2-й и 3-й степеней соответственно, доказываю их по индукции и поочередно складываю функции от данных последовательных аргументов. На последнем этапе получаю верное выражение вида: «4 *66^2 + 6*(11*12*23)/6 + 4*66 + 99», но следующей строчкой, при упрощении, первым слагаемым записываю число 4356, что ни что иное как 66^2 без домножения на коэффициент 4, что, разумеется, привело к неверному итоговому ответу, хотя все остальные слагаемые получены верно. Таким образом, это не арифметическая ошибка, а обыкновенная описка, что следует из того, что строчкой выше у меня четко прописано, что необходимо домножить первое слагаемое 66^2 на 4. Просто забыла.

Мне очень обидно, что я допустила такой недочет, тем не менее он не должен приравниваться к арифметической/логической ошибке, а лишь к описке, допущенной на самом последнем шаге. Мне будет очень жаль, если снятые 5 баллов за обыкновенную описку в последней строчке сыграют роковую роль в возможности осуществить мечту и поступить на желаемый факультет. В прошлом году я так же имела эту возможность и стала призером 2-й степени по олимпиаде «Покори Воробьевы горы» по математике. Тоже совсем немного не хватило до диплома победителя.

Я буду очень признательна, если вы пересмотрите оценку за задачу №1. Привожу фрагмент решения, где видно, что это обычная описка, во вложении ниже.

С уважением,

Урусова Эвелина

Дата: 01.03.21 Подпись:

Итого

$$4 \cdot 66^2 + 6 \cdot \frac{11 \cdot 12 \cdot 23}{6} + 4 \cdot 66 + 99 =$$

$$= 4356 + \cancel{1088} + 264 + 99 = 7755$$

3038

Сканировано с CamScanner