МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Устименко Дмитрий Алексеевич**

Класс: **10**

Технический балл: **65**

Дата проведения: **21 марта 2021 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	0	15	15	5	15	0	15

Черновик

~~№5.~~

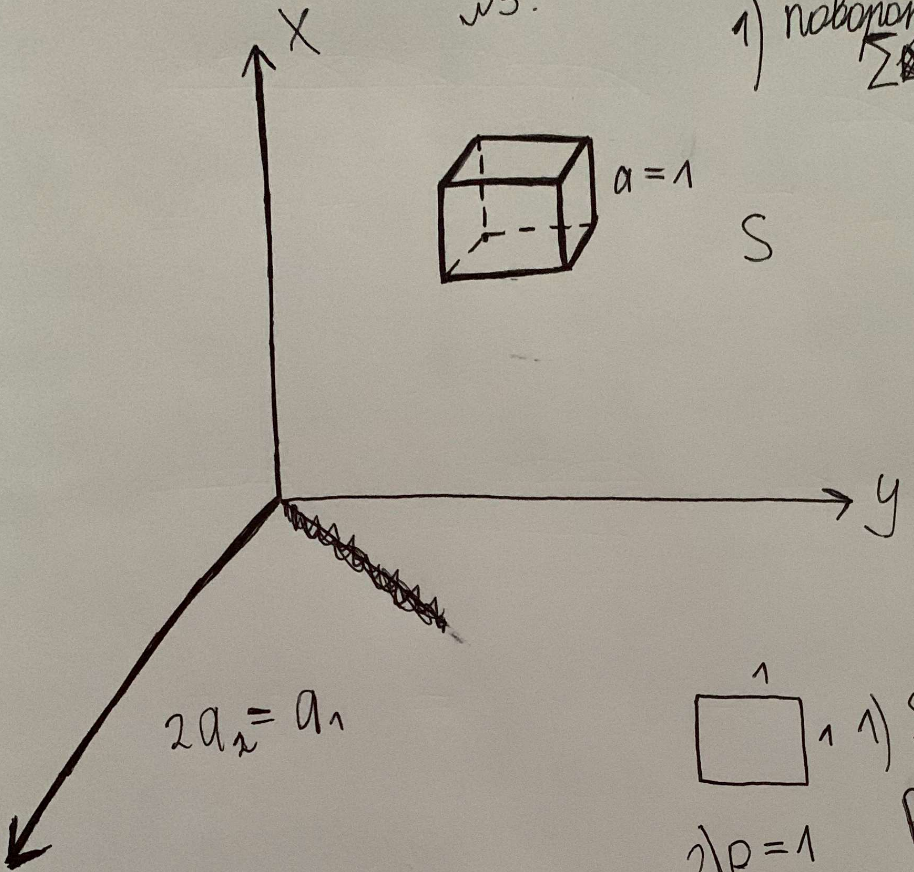
№5.

$a=1$

$S=1$

1) поворот на 90° 4 раза.

$\sum S=4$



$2a_2 = a_1$

1) $S=1$

2) $P=1$ $\quad P=2 \quad a=0{,}5$

$S = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$

1) Найдём площадь квадрата $S = 1^2 = 1$

2) После 4 поворотов он „измазал" $S = 4$

3) Зная, $P=1$ найдём $P=2$

$3S_1 = 12S_2$

Площадь отличается только за счёт крайних кусочков

Найдём их площадь.

Черновик

$f(x)=x^2+6x+6$

По т. Виетта: $x_1 x_2 = 6$, $x_1+x_2=-6$

$D = 36-24=12$

$x_1 = \frac{-6+\sqrt{12}}{2} = \frac{-6+2\sqrt{3}}{2} = -3+\sqrt{3}$

$x_2 = \frac{-6-2\sqrt{3}}{2} = -3-\sqrt{3}$

$\times\frac{105}{3}$ 315 $\times\frac{14}{15}$ 70 140 210

$\times\frac{14}{15}$ 70 $\times\frac{14}{15}$ 140

$2\ln\sqrt{x+1}$ ✓ $x = 2^0+2^{-1}+2^{-2}+\ldots+2^{-2021}$ = это число от $(1;2)$ ~~это число~~

$R=\frac{2013}{\sin\left(\frac{\pi}{1+\sqrt{3}}\right)}$

$x+1\geqslant 0$

$x\geqslant -1$

$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$

$P(x)=x^5+Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E$

$\frac{Sy}{x+y}=*$

$\frac{Sy}{x-y}=*+S$

$P(-1)=11$

$P(1)=21$ общ.

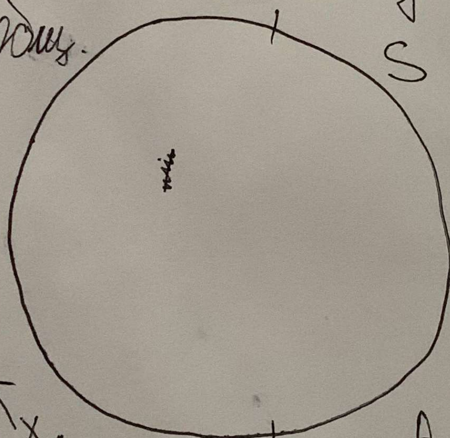
1) x_1 y

x_1 – мотоциклист

x_2 – велосипедист

2) x_2 y L

3) x_1 y



S L

$S_1=4026$ м

$S_2=4026$ м

$t_1=36$ мин

$t_2=x+ \ldots +72$

$(61\ldots72)$

$\times\frac{0{,}5}{0{,}6}$ $0{,}30=0{,}3$

$\angle B+\angle C+\angle D$

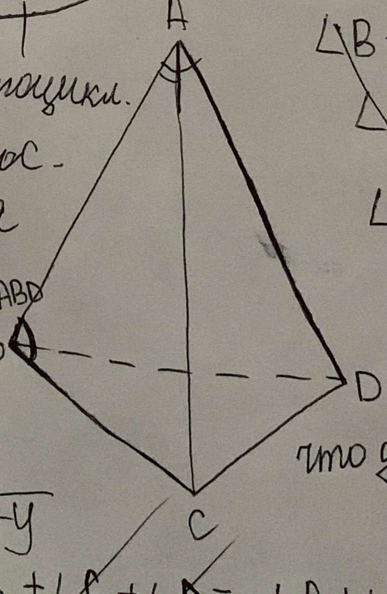
$\angle B=$

$\angle B+\angle C+\angle D=\angle$

x – мотоцикл.

y – велос.

S – длина



$\angle BAC+\angle CAD+\angle BAD=\angle CBD+\angle CBA+\angle ABD$

$\frac{S}{36}=x$ $t_1=\frac{S}{x+y}$

x_1 x_2

КР-2021 2022-ЗЕЛ. $t_2=\frac{S}{x-y}$

что дальше в 2?

А

П п: x_1 или x_2 = = 0!

$\angle B+\cancel{\angle C}+\cancel{\angle D}=\angle A+\cancel{\angle C}+\cancel{\angle D}$

$\angle B=\angle A$ ~~x_1~~ =

$\times\frac{0{,}5}{0{,}5}$ $0{,}25$

Черновик A, B, C, D, E ∈ N ~~x = a ± 2~~

w3

$P(x) = x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$, где A, B, C, D, E – целые положит. числа; $P(-1) = 11$; $P(1) = 21$

Замена $f(f(x)) = f_3$

Решение:

$x^2 + 6x + 6 = -3 \pm 16\sqrt{3}$

$f_1^2 + 6f_1 + 6 = 0$

$D = 36 - 4 \cdot 6 = 24$

$f_1 = -3 + \sqrt{3}$

$\frac{D}{4}$

$f_2 = -3 - \sqrt{3}$

$\frac{D}{4} = 9 - 6 = \cancel{\pm 3}$

$x(\underbrace{f(f(f(f(f(f(x))))))}_{f_1}$

6 : 3 = 2

Верно 2 + 2 + 2 : 3

2022 | 337
2022 | 6

2022 | 3

3.

A 1, 2, 3, 7 – сделал
4, 5, 6 – не сделал
1:10 до конца

o o o . . .

70 минут на 3 задачи

на 1 задачу 23 минуты

$a\sqrt{2}$

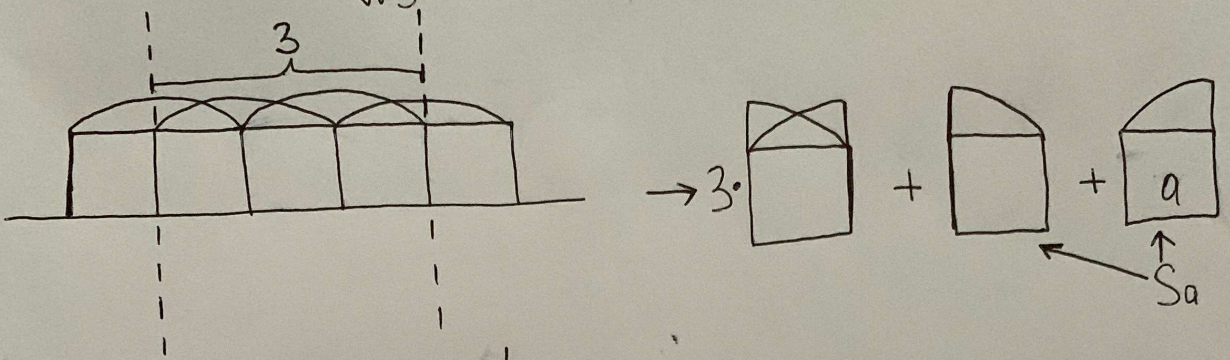
до конца 1 час

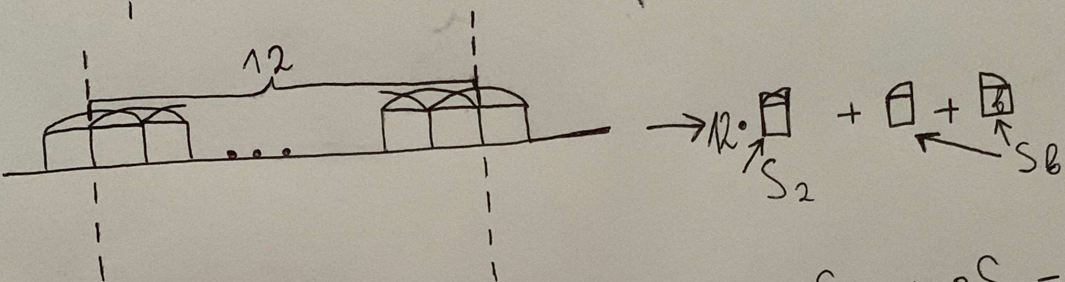
$4026 = 2R\sin\left(\frac{\pi}{1+\sqrt{3}}\right) \Rightarrow$

$S_в$ $-\frac{1}{2}$ $\Rightarrow R = \frac{2013}{\sin\left(\frac{\pi}{1+\sqrt{3}}\right)}$

Чистовик

№5

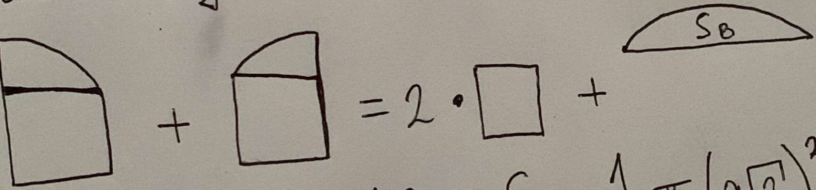


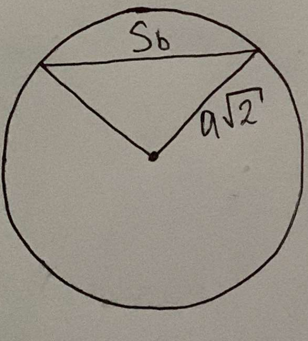


По условию $a_1 = 2a_2 \Rightarrow S_1 = 4S_2 \Rightarrow 3S_1 = 4 \cdot 3S_2 \Rightarrow 3S_1 = 12S_2$

Значит, площадь отличается только за счёт крайних кусочков

Посчитаем площадь таких кусочков:





$S_c = \frac{1}{4}S_к - S_\Delta = \frac{1}{4}\pi\left(a\sqrt{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(a\sqrt{2}\right)^2 =$

$= \frac{1}{2}\pi a^2 - a^2$

$S_A = 2a^2 + S_c = 2a^2 + \frac{1}{2}\pi a^2 - a^2 = 1 + \frac{1}{2}\pi$

$S_B = 2b^2 + \frac{1}{2}\pi b^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\pi$

$S_A - S_B = \frac{3}{4} + \frac{3}{8}\pi$

Ответ: на $\frac{3}{4} + \frac{3}{8}\pi$.

Чистовик

№4.

Пусть x – скорость мотоциклиста

Тогда y – скорость велосипедиста

S – длина окружности (трассы)

$$\begin{cases} 36x = S \Rightarrow x = \frac{S}{36} \\ 61y < S < 72y \end{cases}$$

Пусть $t_1 = \frac{S}{x+y}$ – время, через которое они встретятся, если едут навстречу друг другу $t_1 y = *$, где $*$ - длина сегмента

Пусть $t_2 = \frac{S}{x-y}$ – время, через которое они встретятся если едут друг за другом

$t_2 \cdot y - S = *$, где $*$ – длина сегмента

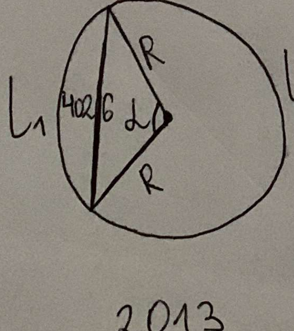
Рассмотрим 1 случай:

$$\begin{cases} \frac{Sy}{x+y} = * & (1) \\ \frac{Sy}{x-y} = * + S & (2) \\ x = \frac{S}{36} & (3) \end{cases}$$

$(2)-(1) = \frac{Sy}{x-y} - \frac{Sy}{x+y} = S \Leftrightarrow xy + y^2 - xy + y^2 =$

$= x^2 - y^2 \Rightarrow x^2 - 3y^2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{3}\, y$

Тогда:



$l_1 : l_2 = 1 : \sqrt{3}$

Тогда $\alpha = \frac{2\pi}{1+\sqrt{3}}$

Тогда $4026 = 2R\sin\left(\frac{\pi}{1+\sqrt{3}}\right)$ $|:2$

Значит, $R = \frac{2013}{\sin\left(\frac{\pi}{1+\sqrt{3}}\right)}$

Ответ: $R = \frac{2013}{\sin\left(\frac{\pi}{1+\sqrt{3}}\right)}$.

5

Чистовик
№7.

Делители числа 2021: 1, 43, 47, 2021
Делители числа 2022: 1, 2, 3, 337, 2022

Стратегия победы Ани:

1) Первым ходом Аня убирает из 2022 зелёных камней 2021. Тогда остаётся 1 зелёный камень и 2021 красных.

2) Далее если Петя убирает один красный камень, то Аня тоже убирает 1 ~~зелёный~~ красный камень. Таким образом, если они по очереди убирают ~~по~~ по одному красному камню, то им потребуется сделать 2022 хода, чтобы убрать все камни. Поскольку Петя начинал первым убирать по одному камню, то Аня сделает последний ход.
Значит, Аня победит.

Если же Петя в какой-то момент убирает последний зелёный камень, то остаётся 0 зелёных камней и Аня может забрать любое количество красных камней, поэтому она забирает все оставшиеся красные камни.
Значит, Аня победит.

Ответ: Аня может победить при любых ходах Пети.

Чистовик

№1.

$$f(\underbrace{f(f(f(f(x))))}_{f_1}) = 0$$

$f(x) = x^2 + 6x + 6$

$f_1^2 + 6f_1 + 6 = 0$

$\frac{D}{4} = 9 - 6 \pm 3 = 6$

$f_{1,2} = -3 \pm \sqrt{3} \Rightarrow f(f(\underbrace{f(f(f(x)))}_{f_2})) = -3 \pm \sqrt{3}$

~~$f_2^2 + 6f_2 + 6 = 0$~~

$f_2^2 + 6f_2 + 9 \pm \sqrt{3} = 0$

$\frac{D}{4} = 9 - 9 \pm \sqrt{3} = \pm\sqrt{3}$

$f_1 = -3 + \sqrt{3}$

$f_2 = -3 \pm 4\sqrt{3}$

Действуем аналогично и обозначив $f_3 = f(f(x))$ получим $f_4 = f(x)$

$f_3 = -3 \pm 8\sqrt{3}$

$f_4 = -3 \pm 16\sqrt{3}$

т.е. $x^2 + 6x + 6 = -3 \pm 16\sqrt{3}$

$x^2 + 6x + 9 \pm 16\sqrt{3} = 0$

$\frac{D}{4} = 9 - 9 \pm 16\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$

$x_{1,2} = -3 \pm 32\sqrt{3}$

Ответ: $x_{1,2} = -3 \pm 32\sqrt{3}$.

Черновик.

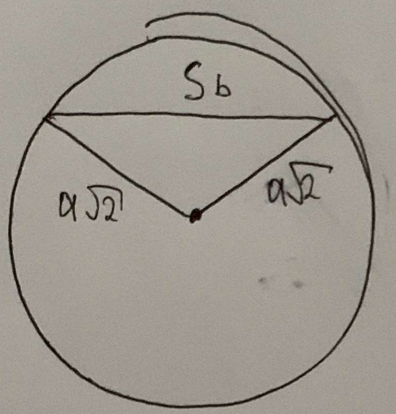
№4

$y^2+xy-xy+y^2$

$5y$

$xy+y^2-xy+y^2=x^2-y^2 \Rightarrow x^2-3y^2=0 \Rightarrow x=\sqrt{3}y$

$\frac{2\pi}{1+\sqrt{3}}=\angle$



Чистовик

№2.

ОДЗ: $x-1 \geq 0$

$x \geq 1$

$x = 2^0 + 2^{-1} + 2^{-2} + \ldots + 2^{-2021}$

$\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1+2\sqrt{x-1}+1} +$

$+ \sqrt{x-1-2\sqrt{x-1}+1} = \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} =$

$= |\sqrt{x-1}+1| + |\sqrt{x-1}-1| = \sqrt{x-1}+1+|\sqrt{x-1}-1|$

Первый модуль можно убрать, т.к. корень всегда ≥ 0, а там ещё и $+1$. Поэтому модуль всегда будет с плюсом.

Раскроем модуль.

$\left[\begin{array}{l} \sqrt{x-1}+1+\sqrt{x-1}-1 = 2\sqrt{x-1}, \text{ если } \sqrt{x-1}-1 \geq 0 \\ \sqrt{x-1}+1-\sqrt{x-1}+1 = \underline{2}, \text{ если } \sqrt{x-1}-1 < 0 \end{array}\right.$

$x = 2^0 + 2^{-1} + 2^{-2} + \ldots + 2^{-2021} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^{2021}}$ *

* Заметим, что это геометрическая прогрессия, где $q = \frac{1}{2}$

$S_{2021} = \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}^{2021}\right)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{1}{2}^{2021}\right)}{\cancel{\frac{1}{2}}} = 1 - \frac{1}{2}^{2021} < 1$

Значит, $\sqrt{x-1} < 1 \Rightarrow \sqrt{x-1} - 1 < 0 \Rightarrow$ ответ 2

Ответ: 2.

$|x+1| \geqslant 0$ $x+1 \geqslant 0$

ОДЗ!!!

Черновик

$x = 2^0 + 2^{-1} + \ldots + 2^{-2021}$ ОДЗ: $|x-1|$

№2.

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1+2\sqrt{x-1}+1} + \sqrt{x-1-2\sqrt{x-1}+1} = \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} =$$

$$= |\sqrt{x-1}+1| + |\sqrt{x-1}-1| = \sqrt{x-1}+1+|\sqrt{x-1}-1|$$

$\geqslant 0$ корень $\geqslant 0 \Rightarrow$

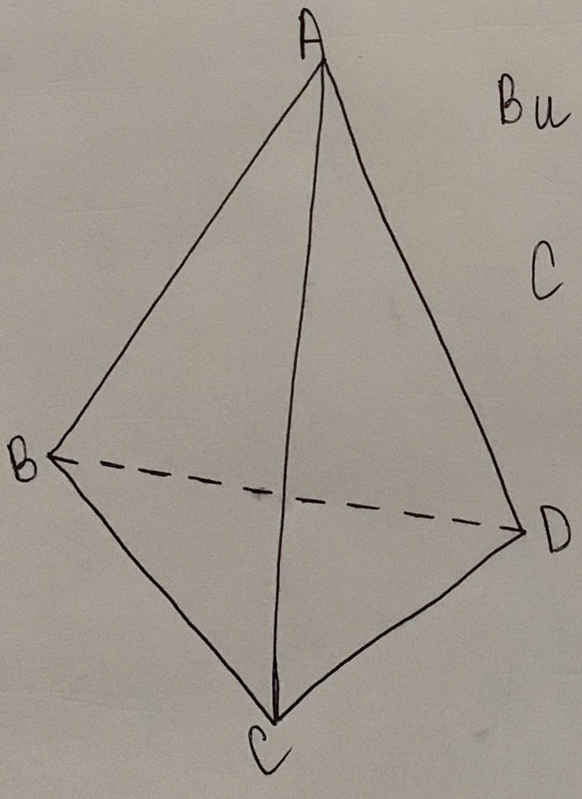
$$\begin{cases} \sqrt{x-1}+1+\sqrt{x-1}-1 = 2\sqrt{x-1}, & \text{если } \sqrt{x-1}-1 \geqslant 0 \\ 2, & \text{если } \sqrt{x-1}-1 < 0 \end{cases}$$

$\boxed{\text{ОДЗ: } x-1 \geqslant 0,\ x \geqslant 1}$

$\sqrt{x-1} \vee 1$

по одному красн. к., то 2022 х.

№6.



сумма плоских углов при B и A равны.

сумма плоских углов при C и D равны.

Чистовик

№3.

$x^5 + Ax^4 + Bx^3 + \cancel{Dx^2}\ Cx^2 + Dx + E$

$f(1) = 1 + A + B + C + D + E = 21$

$f(-1) = -1 + A - B + C - D + E = 11$

Выходит:

$$\begin{cases} A + B + C + D + E = 20 \\ A - B + C - D + E = 12 \end{cases}$$

$B + D = A + C + E - 12$

$2(A + C + E) = 32$

$$\begin{cases} A + B + C = 16 \\ B + D = 4 \end{cases}$$

Выбирем B и D так, чтобы $B + D = 4$ можно было только 3 способами

$A + C + E = 16$ можно $A = 14$ – 1 способ

$A = 13$ – 2 способ

... и т.д.

$A = 1$ – 14 способ

$$\begin{array}{r} \times\ 14 \\ 15 \\ \hline 210 \end{array}$$

Будет $1 + 2 + \ldots + 14 = \frac{14 \cdot 15}{2} = \frac{210}{2} = 105$

Из правила умножения выходит, что таких A, B, C, D, E будет $3 \cdot 105 = 315$ способов.

Ответ: 315 ~~способов~~ многочленов.

Председателю апелляционной комиссии
олимпиады школьников „Ломоносов"
Ректору МГУ имени М. В. Ломоносова
академику В. А. Садовничему
ученика 10 класса ГБОУ города Москвы
"Школа № 2107"
Устименко Дмитрия Алексеевича

апелляция.

Прошу пересмотреть выставленные технические баллы (65) за мою работу заключительного этапа по математике, поскольку после сдачи работы я заметил неточность со своей стороны в первом задании. Последние несколько лет я усиленно готовился не только к олимпиадам по математике, но и к олимпиадам по информатике. А так как на клавиатуре невозможно указать показатель корня в таком виде, как это принято в математике, то на клавиатуре принято указывать показатель корня числом перед знаком корня (например $\sqrt[32]{3} \Leftrightarrow 32\sqrt{3}$). Во время олимпиады я „на нервах" по привычке из информатики записал показатели корней в таком виде, как привык печатать на клавиатуре, подразумевая обычные математические показатели корней. Поэтому у меня во второй части этого задания и в ответе идёт описка. Времени на проверку у меня не осталось, поэтому сразу я не обратил на это внимание, а вечером заметил и понял, что членам жюри будет непонятно то, что я имел в виду показатели степеней. Если не считать эту глупую описку, то вся идея, ход мыслей и ответ у меня в этом задании правильные. Очень прошу ещё раз пересмотреть это задание, учесть мои вышеизложенные уточнения и поднять балл, пожалуйста.

Deeef (Устименко Д. А.)

31.03.2021