МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Христенко Мария Сергеевна**

Класс: **11**

Технический балл: **70**

Дата проведения: **20 марта 2021 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	10	0	15	0

вар. 210103

Чистовик

Задача 1

$f(1)+f(2)+\ldots+f(13)=4(1^3+2^3+\ldots+13^3)-6(1^2+2^2+\ldots+13^2)+4(1+2+\ldots+13)+13\cdot13=$

$=4((1^3+12^3)+(2^3+11^3)+\ldots+(6^3+7^3)+13^3)-6(1^2+\ldots+13^2)+4\cdot\frac{1+13}{2}\cdot13+13\cdot13=$

$=4(13(1^2-12+12^2)+13(2^2-22+11^2)+\ldots+13(6^2-42+7^2)+13\cdot13^2)-\ldots=$

$=4\cdot13(1^2+2^2+\ldots+13^2-(12+22+\ldots+42))-6(1^2+\ldots+13^2)+4\cdot7\cdot13+13\cdot13=$

$=(4\cdot13-6)(1^2+\ldots+13^2)-4\cdot13(12+22+30+36+40+42)+13\cdot28+13\cdot13=$

$=46(1^2+\ldots+13^2)-52\cdot182+13\cdot41=46\cdot\frac{13\cdot14\cdot27}{6}-13\cdot4\cdot182+13\cdot41=$

$=46\cdot13\cdot7\cdot9-13\cdot4\cdot182+13\cdot41=13(46\cdot7\cdot9-4\cdot182+41)=$

$=13(2898-728+41)=13\cdot2211=28743$

Для суммы квадратов чисел была использована формула:

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Ответ: 28743

1

Чистовик вар. 210103

Задача 2

$$\begin{cases}\sqrt{x^2y}+|y-5|=2\\ \sqrt{x^2y-4}+|x-2|=1\end{cases} \quad \begin{cases}\sqrt{x^2y}=2-|y-5|\\ \sqrt{x^2y-4}=1-|x-2|\end{cases}$$

Поскольку $\sqrt{x^2y}$ и $\sqrt{x^2y-4}$ ≥ 0, то $\begin{cases}2-|y-5|\geq 0\\ 1-|x-2|\geq 0\end{cases}$ $\begin{cases}|y-5|\leq 2\\ |x-2|\leq 1\end{cases}$ $\begin{cases}3\leq y\leq 7\\ 1\leq x\leq 3\end{cases}$

$x^2y-4\geq 0$

$x^2\geq y+4\geq 3+4=7$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\geq\sqrt{7}\\ x\leq-\sqrt{7}\end{array}\right.\\ 1\leq x\leq 3\end{cases} \Rightarrow \underset{\substack{\vee\\2}}{\sqrt{7}}\leq x\leq 3$$

Значит, $x-2>0$ и $|x-2|$ раскрывается с $+$

$x^2y-4\geq 0$

$y\leq x^2-4\leq 9-4=5$ Значит, $y-5\leq 0$ и $|y-5|$ раскрывается с $-$

$$\begin{cases}\sqrt{x^2y}=2+y-5 \quad (1)\\ \sqrt{x^2y-4}=1-x+2 \quad (2)\end{cases}$$

Из (2): $x^2y-4=9-6x+x^2$

$y=6x-13$

Подставим в (1):

$\sqrt{x^2-6x+13}=6x-16$

$$\begin{cases}x^2-6x+13=36x^2-192x+256\\ x\geq\frac{8}{3}\end{cases}$$

$$\begin{cases}35x^2-186x+243=0\\ x\geq\frac{8}{3}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=3\\ x=\frac{81}{35}\end{array}\right.\\ x\geq\frac{8}{3}\end{cases}$$

$x=3$, тогда $y=5$

Ответ: $(3;5)$

2

Чистовик

вар. 210103

Задача 3

$x^2+bx+(a-1)=0$ $-x_1, x_2$

$x^2+cx+a=0$ $-x_3, x_4$

По теореме Виета $x_1 \cdot x_2 = a-1$

$x_3 \cdot x_4 = a$

Каждый из корней целый и меньше (-1), значит, они меньше либо равны (-2). $a = x_3 \cdot x_4 \geq (-2)\cdot(-2) = 4$. Поскольку оба корня отрицательны, то a – положительное и увеличивается при уменьшении x_3 и x_4.

Произведение x_3, x_4 и x_1, x_2 может равняться $4\,((-2)\cdot(-2))$, $6\,((-2)\cdot(-3))$, $8\,((-4)\cdot(-2))$, $9\,((-3)\cdot(-3))$... 5 и 7 равняться не могут, т.к. в таком случае один из корней равен (-1), а другой (-5) или (-7).

$x_1 \cdot x_2$ и $x_3 \cdot x_4$ различаются на 1, значит, наименьшая пара чисел 8 и 9.

$x_1 \cdot x_2 = 8$ $(-2)\cdot(-4) = 8$ $x^2+6x+9=1$

$x_3 \cdot x_4 = 9$ $(-3)\cdot(-3) = 9$ $x^2+6x+9=0$

Тогда $a = 9$

Ответ: 9

*Если же в условии подразумевается что уравнения имеют по 2 целых различных корня, то продолжим рассмотрение возможных произведений x_3, x_4 и x_1, x_2: $10((-2)\cdot(-5))$, $12((-3)\cdot(-4))$, $14((-2)\cdot(-7))$, $15((-3)\cdot(-5))$.

Тогда подходит пара чисел 14 и 15.

$a=15:$ $x^2+9x+15=1$

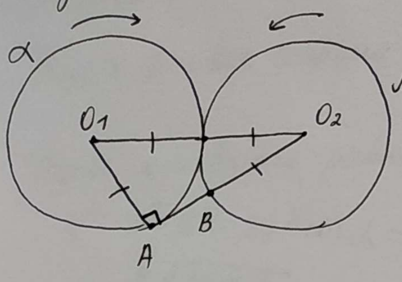
$x^2+8x+15=0$

3

Чистовик

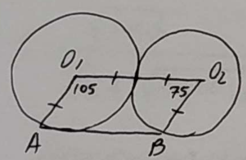
вар. 210103

Задача 4



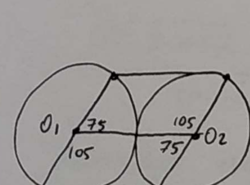
Изначально автомобили A и B находятся в такой конфигурации. O_2A – касательная => $O_1A \perp O_2A$. $O_1O_2 = 2O_1A$, значит, в прямоугольном треугольнике O_1AO_2 $\angle O_1O_2B = 30°$; $\angle O_2O_1A = 60°$. Автомобили двигаются с одинаковыми угловыми скоростями, поэтому $\angle O_2O_1A$ всегда больше $\angle O_1O_2B$ на $30°$ (с какого-то момента этот угол будет $>180°$)

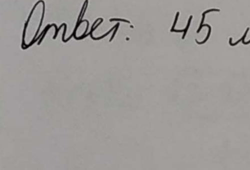
Расстояние между A и B постепенно увеличивается до момента, когда $AB = O_1O_2$. В этом случае поскольку $O_1A = O_2B$ и $O_1O_2 = AB$, то O_1O_2BA – параллелограмм. $\angle AO_1O_2 = 105°$; $\angle O_1O_2B = 75°$.



Затем расстояние продолжит увеличиваться, т.е. оно больше диаметра. После максимального удаления друг от друга они снова начнут сближаться, пока AB не станет равно O_1O_2.

После этого и до конца круга $AB < O_1O_2$.





Получилось, что подходит половина круга. Т.е. половину времени ($\frac{3}{4}$ ч $= 45$ мин) они будут на расстоянии, меньшем диаметра.

Ответ: 45 мин

4

Чистовик

вар. 210103

Задача 5

Пусть боковая сторона р/б $\triangle$ равна x, тогда $S = \frac{1}{2}x^2 \sin\alpha = 1$

$$x = \sqrt{\frac{2}{\sin\alpha}}$$

Пусть основание равно y. По теореме косинусов

$$y^2 = x^2 + x^2 - 2x^2\cos\alpha = \frac{2}{\sin\alpha}\cdot 2 - 2\cdot\frac{2}{\sin\alpha}\cdot\cos\alpha = \frac{4}{\sin\alpha}(1-\cos\alpha)$$

$$y = \frac{2\sqrt{1-\cos\alpha}}{\sqrt{\sin\alpha}}$$

Максимальный по площади круг вписан в треугольник, поэтому найдем радиус вписанной окружности $r = \frac{S}{p} = \frac{1}{\frac{2x+y}{2}} = \frac{2}{2\sqrt{\frac{2}{\sin\alpha}} + \frac{2\sqrt{1-\cos\alpha}}{\sqrt{\sin\alpha}}} =$

$$= \frac{\sqrt{\sin\alpha}}{\sqrt{2} + \sqrt{1-\cos\alpha}}$$

Максимальный по площади треугольник, подобный данному, вписан в эту окружность, т.е. r – радиус окружности, описанной вокруг него.

Найдём радиус окружности описанной вокруг начального треугольника $R = \frac{x\cdot x\cdot y}{4S} = \frac{\frac{2}{\sin\alpha}\cdot\frac{2\sqrt{1-\cos\alpha}}{\sqrt{\sin\alpha}}}{4} = \frac{\sqrt{1-\cos\alpha}}{\sin\alpha\sqrt{\sin\alpha}}$

Треугольники подобны с коэф. подобия $k = \frac{R}{r} = \frac{\sqrt{1-\cos\alpha}\,(\sqrt{2}+\sqrt{1-\cos\alpha})}{\sin\alpha\sqrt{\sin\alpha}\,\sqrt{\sin\alpha}} =$

$$= \frac{\sqrt{2-2\cos\alpha} + 1 - \cos\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{\sqrt{2-2\cos\alpha} + 1 - \cos\alpha}{1-\cos^2\alpha}.$$

Площади подобных тр-ков относятся как k^2, поэтому найдем min и max k.

$$t = \cos\alpha \quad -1 \le t \le 1$$

$$f(t) = \frac{\sqrt{2-2t} + 1 - t}{1-t^2}$$

$$f'(t) = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2-2t}}(-2) - 1\right)(1-t^2) - (\sqrt{2-2t} + 1 - t)(-2t)}{(1-t^2)^2} =$$

5

см. сл. стр.

Чистовик

вар. 210103

Задача 5

$$=\frac{\frac{2t^2}{\sqrt{2-2t}}+t^2-\frac{2}{\sqrt{2-2t}}-1+2t\sqrt{2-2t}+2t-2t^2}{(1-t^2)^2}=\frac{-(t-1)^2+\frac{1}{\sqrt{2-2t}}(-2t^2+4t-2)}{(1-t^2)^2}=$$

$$=\frac{-(t-1)^2\left(1+\frac{2}{\sqrt{2-2t}}\right)}{(1-t^2)^2}=\frac{-\left(1+\frac{2}{\sqrt{2-2t}}\right)}{(t+1)^2}<0,$$ т.е. функция убывает

Значит $\max k_1$ при $\min t$ $\left(\cos\alpha=-\frac{1}{2}\right)$ $\alpha=120^\circ$ $-\min S$

$\min k_2$ при $\max t$ $\left(\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $\alpha=60^\circ$ $-\max S$

$$k_1=\frac{\sqrt{2+1}+1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}+\frac{3}{2}}{\frac{3}{4}}=\frac{(2\sqrt{3}+3)\cdot 4}{2\cdot 3}=\frac{2(2\sqrt{3}+3)}{3}$$

$$\min S=\frac{1}{k_1}=\frac{3}{2(2\sqrt{3}+3)}$$

$$k_2=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}+1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{3}{4}}$$

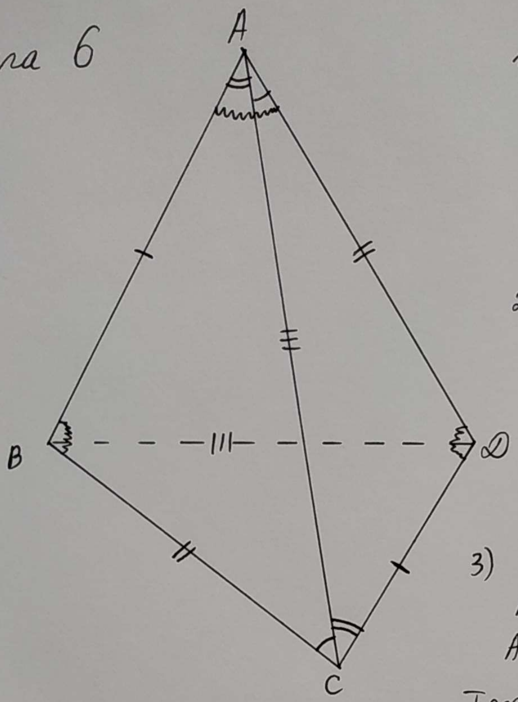
$$\max S=\frac{1}{k_2}$$

6

Чистовик

вар. 210103

Задача 6



1) $AB = CD$, $BC = DA$, AC – общая $\Rightarrow \triangle ABC = \triangle CDA$ по 3 сторонам

$\angle BCA = \angle CAD$, $\angle BAC = \angle ACD$

2) По условию $\angle BAD + \angle BAC + \angle CAD = 180^\circ$

Из $\triangle ABC$: $\angle BAC + \angle BCA + \angle ABC = 180^\circ$

$\angle BAC + \angle CAD + \angle ABC = 180^\circ$

$\Downarrow$

$\angle BAD = \angle ABC = \angle ADC$

3) $\angle BAD = \angle ABC$, AB – общая, $AD = BC$ $\Rightarrow \triangle BAD = \triangle ABC$ по 2 стор. и углу между

Тогда $BD = AC$

4) $\triangle BCD = \triangle ABC$ по 3 сторонам

5) Значит, все грани пирамиды – равные треугольники. Площадь поверхности $4S$

Ответ: $4S$

7