МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Христофорова Дарья Евгеньевна**

Класс: **11**

Технический балл: **85**

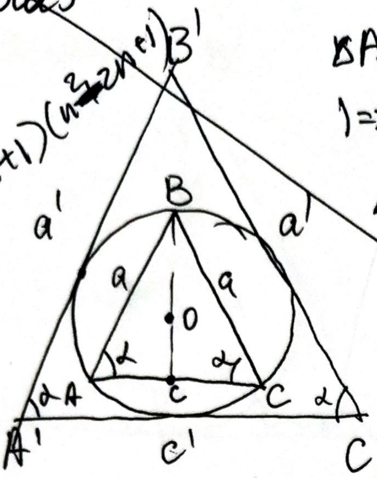
Дата проведения: **20 марта 2021 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	15	10	15	0

~~Чистовик~~ Черновик (1)

Задача 5



$\triangle ABC$ помещают в круг min по площади

$\Rightarrow$ ограничив. его окружность ω – описан. окр. $\triangle ABC$

$\triangle A'B'C'$ – min по S $\Rightarrow$ окр. ω – вписана в $\triangle A'B'C'$

$S_{ABC} = \frac{a^2c}{4R}$ $\Rightarrow$ $R = \frac{a^2c}{4S_{ABC}} = \frac{a^2c}{4}$

$S_{A'B'C'} = p_{A'B'C'} \cdot R = \frac{(2a'+c')}{2} \cdot \frac{a^2c}{4}$

$\cos\alpha = \frac{c}{2a} = \frac{c'}{2a'}$

$\Rightarrow c = 2a\cos\alpha$

$c' = 2a'\cos\alpha$

$S_{A'B'C'} = \frac{2a' \cdot (1+\cos\alpha) \cdot 2a \cdot \cos\alpha}{2 \cdot 4} = \frac{a' \cdot a^3 (1+\cos\alpha) \cdot \cos\alpha}{2}$

$(n+1)^4$

$= (2n^2 + 2n + 1)(n^2 + 2n + 1)$

$= n^4 - 2$

$1 = S_{ABC} = \frac{a^2 \cdot \sin(180-2\alpha)}{2}$, $\sin(180-2\alpha) = \sin 2\alpha$

$a^2 = \frac{2}{\sin 2\alpha}$

~~аналог. a'~~ =

$n^4 + 2n^3 + n^2 + 2n^3 + 4n^2 + 2n +$

$+ n^2 + 2n + 1$

$n^4 - 2n^3 + n^2 - 2n^3 + 4n^2 - 2n$

$n^4 - 2n^3 + n^2 - 2n + 1$

$f(1) + f(2) \ldots + f(13)$

$f(n) = 4n^3 - 6n^2 + 4n + 13$

$n^4 - 4n^3 + 6n^2 - 4n + 1$ $\quad 4n^3 - 6n^2 + 4n - 2 + 15$

$-(n+1)^4 + 14 =$

$= 4n^3 - 6n^2 + 4n - n^4 - 1 + 14$

$n((2n)^2 - 3n + 2) + 2n + 13$

$n^4 - (n+1)^4 + 14 =$

$2n(2n^2 - 3n + 2) + 2n + 13$

$4 - 6 + 4 - 2 + 15$

$\frac{3 \pm 1}{4} = 1, \frac{1}{2}$

$2n(n-1) \cdot (2n-1) + 2n + 13$

54

169 × 169 = 1521, 1014, 169, 28561

14 × 13 = 42, 14, 182

28561 + 182 = 743

45, 8

360, 180, 45, 75, 255, 105, 180, 285

$(\sqrt{5} + \sqrt{7} + \sqrt{11})^{2021}$

$n\sqrt{5} + m\sqrt{7} + k\sqrt{11} + l\sqrt{5 \cdot 7 \cdot 11}$

$1 - 10^{-500} < \sqrt{77} \frac{l}{n} < 1$

$\leq d$

90 мин $1\frac{1}{2}$

120

60

$\frac{3}{2}$ ч. $120 > \sin\varphi$

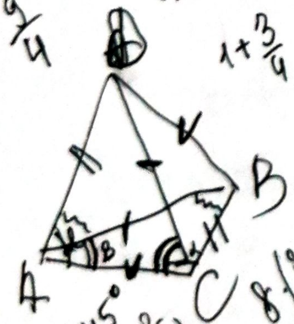
1'

60

$\sqrt{3}\, S_{ABC} = S$

$\frac{9}{4}$

$1 + \frac{3}{4}$



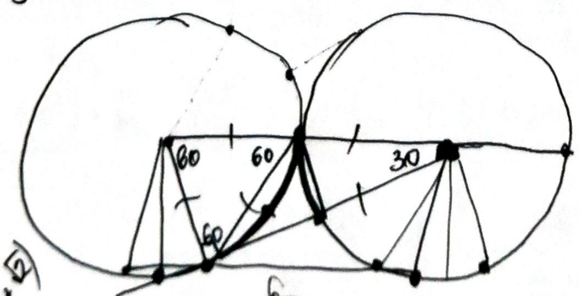
$\alpha = 45°$

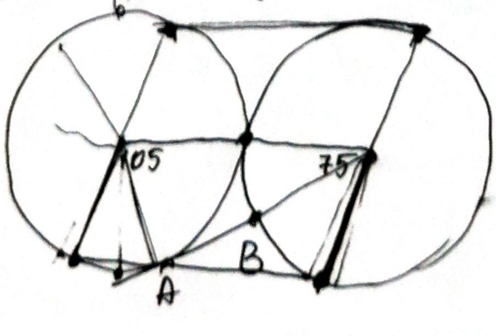
$\frac{8 \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}}{1 \cdot 1} = \frac{8\left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right)}{2\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$

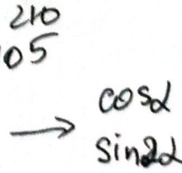
$3 + 2\sqrt{2}$

(2π)

$\frac{2\pi \cdot \alpha}{360}$







$x + x - 30 = 180$

$2x = 210$

$x = 105$

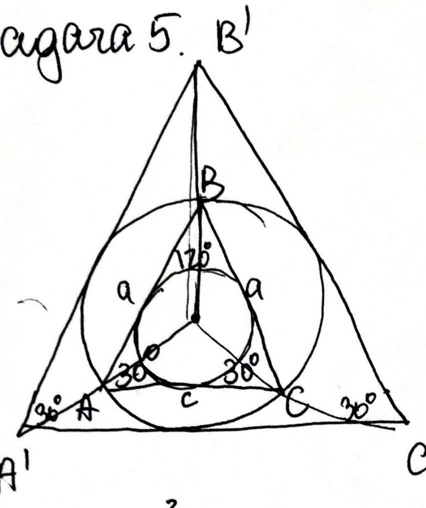
$\cos\alpha \downarrow$ $\quad$ $\sin \cdot$ 45 60

$\sin 2\alpha$ $\quad$ $\cos\alpha\downarrow$ $\quad$ $\sin\alpha\downarrow$

60

~~Чистовик~~ Черновик (2)

Задача 5.



$30^\circ \le \alpha \le 60^\circ$

пусть $\alpha = 30^\circ$

$S_{ABC} = 1 = a^2 \cdot \sin 120^\circ$

$a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1$

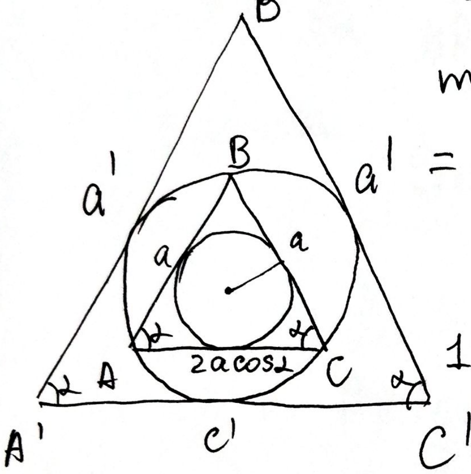
$a^2 = \frac{2\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\cancel{\frac{4}{\sin^4 2\alpha}} + \cancel{\frac{4}{2\sin^4\alpha}}$

~~$\sin 30^\circ = c$~~

$\cos 30^\circ = \frac{c}{2a}$; $c = 2a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{2\sqrt{3}}$

$4R = \frac{a^2\cdot c}{S}$; $R = \frac{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2\sqrt{3}}}{3\cdot 4/2} = \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2\sqrt{3}}}{6} = \frac{\sqrt{6\sqrt{3}}}{6}$



т.к. $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$) => коэф. подобия =

$= \frac{R}{r}$ (r – рад. впис. окр. $\triangle ABC$)

R – рад. опис. окр. $\triangle ABC$

$\cos\alpha = \frac{AC}{2a}$) => $AC = 2a\cos\alpha$

$1 = S_{ABC} = p\cdot r = \cancel{a + c} \; a(1+\cos\alpha)\cdot r$

=> $r = \frac{1}{a(1+\cos\alpha)}$

$R = \frac{a\cdot a\cdot 2a\cos\alpha}{4\cdot S} = \frac{2a^3\cos\alpha}{4} = \frac{a^3\cos\alpha}{2}$

$\frac{R}{r} = \frac{a^3\cos\alpha}{2\cdot\frac{1}{a(1+\cos\alpha)}} = \frac{a^4(1+\cos\alpha)\cos\alpha}{2}$

$\frac{a'}{a} = \frac{R}{r} = \frac{a^4(1+\cos\alpha)\cos\alpha}{2}$; $a' = \frac{a^5(1+\cos\alpha)\cdot\cos\alpha}{2}$

$1 = S_{ABC} = \frac{a a\cdot\sin(180-2\alpha)}{2} = \frac{a^2\sin 2\alpha}{2}$) => $a^2 = \frac{2}{\sin 2\alpha}$

$S_{A'B'C'} = \frac{(2a'+c')}{2}\cdot R = (a^5(1+\cos\alpha)\cos\alpha + a^5(1+\cos\alpha)\cdot\cos^2\alpha)\cdot\frac{a^3\cos\alpha}{2} =$

$c' = 2a'\cos\alpha$

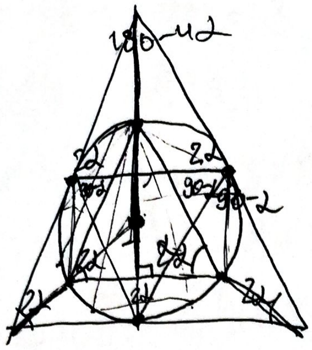
$= \frac{a^8(1+\cos\alpha)^2\cdot\cos^2\alpha}{4} = \frac{4\cdot(1+\cos\alpha)^2\cdot\cos^2\alpha}{\sin^4 2\alpha} =$

$a^8 = \left(\frac{2}{\sin 2\alpha}\right)^4$

$=$

№5

Черновик ③



$30^\circ \le \alpha \le 60^\circ$

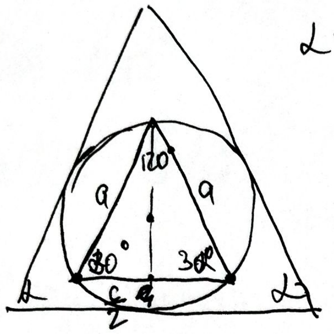
$S=1$

$180-90+\alpha-2\alpha$

$\sin\alpha = \frac{h}{a'}$

$\frac{c'\cdot a'\cdot\sin\alpha}{2} = \frac{2a'\cos\alpha\cdot a'\sin\alpha}{2}$

$\frac{a'}{2}\cdot\sin 2\alpha$



$\alpha=30^\circ$

$S=1=x^2\cdot\frac{\sqrt3}{4}$

$x^2=\frac{2}{\sqrt3}$

$1=\frac{a^2\cdot\sin\beta}{2}$

$a^2=\frac{2}{\sin 2\alpha}$

$\frac{a}{a'}=\frac{c}{c'}=\frac{2a\cos\alpha}{c'}$

$c'=2a'\cos\alpha$

$2R=x$

$\cos\alpha=\frac{c}{2a}$

$R=\frac{abc}{4S}$ $R=\frac{abc}{4}=\frac{a^2\cdot c}{4}$

$c=2a\cos\alpha$

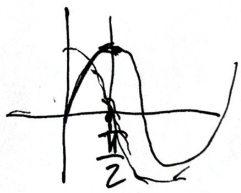
$S=p\cdot R=\frac{(a+a+c)}{2}\cdot\frac{a^2c}{4}$

$\frac{(2a+c)\cdot a^2c}{4}=\frac{2a^3\cdot c+a^2c^2}{4}$

$\frac{(2a+2a\cos\alpha)\cdot 2a^3\cdot\cos\alpha}{4}$

$a^4\cdot\cos\alpha(1+\cos\alpha)=\frac{4\cdot\cos\alpha(1+\cos\alpha)}{\sin^2 2\alpha}$

$\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}$



900

5060

15 60

$\alpha\le45$

$\frac{4\cos\alpha(1+\cos\alpha)}{4\cos^2\alpha\sin^2\alpha}=\frac{2(1+\cos\alpha)}{2\cos\alpha\cdot\sin^2\alpha}=\frac{2+2\cos\alpha}{2\sin 2\alpha\cdot\sin\alpha}$

$(2+2\cos\alpha)\downarrow$

$\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos\alpha\sin^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\alpha}$

$(\sqrt5+\sqrt7+\sqrt{11})^3=(23+2\sqrt5+2\sqrt7+2\sqrt{11})\cdot(\sqrt5+\sqrt7+\sqrt{11})$

$=23+2\sqrt5+2\sqrt{7\cdot5}+2\sqrt{11\cdot5}+23\sqrt7+14+$

$23\sqrt5+10+2\sqrt{7\cdot5}+2\sqrt{11\cdot5}+23\sqrt{11}+22$

$+2\sqrt{11\cdot7}$

$(\sqrt5+\sqrt7+\sqrt{11})^{2021}$

$n\sqrt5+m\sqrt7+k\sqrt{11}+l\cdot\sqrt{5\cdot7\cdot11}$

$1-10^{-500}<\sqrt{77}\frac{l}{n}<1$

Черновик (4)

$f(n)=4n^3-6n^2+4n+13$ $\quad 4-6+4+13$

$(x-2)(x-7)$

$f(1)+f(2)+\dots+f(13)$ $\quad 8 \quad 4\cdot 6$

$(x-3)(x-5)$

$f(1)=4-6+4+13=15$ $\quad +14 \quad 27 \quad 4 \quad 4\cdot 8$

$f(2)=32-24+8+13=29$ $\quad +50 \quad 108 \quad 54$

$f(3)=4\cdot 27-6\cdot 9+4\cdot 3+13=79$ $\quad 12 \quad 66 \quad 13 \quad 79$

$52-6$ $\quad 12$

$4\cdot 13^3-6\cdot 13^2$

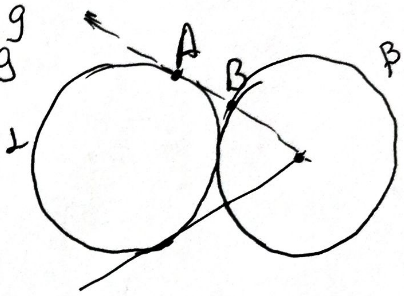
$169\cdot 46+4\cdot 13$ $\quad -4-6-4+13$

$-4\cdot 8-6$

$64 \quad 104 \quad 256 \quad -96 \quad 160 \quad 29 \quad 189 \quad 16 \quad 6 \quad 96$

$4n^3-6n^2+4n+13=$

$f(4)=4\cdot 64-6\cdot 16+16+13$



$$\begin{cases}\sqrt{x^2+y}+|y+3|=1\\ \sqrt{x^2+y-1}+|x+3|=1\end{cases}$$

$x\in[-3;-2]$

$y\in[-3;-2]$

$\sqrt{x^2+y}$

$\sqrt{9-2}\geq\sqrt{x^2+y}\geq\sqrt{4-3}=1$

$\angle d$

90

$x^2+bx+a=0$

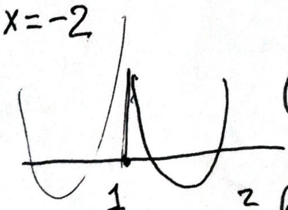
$x^2+cx+a=-1$ $\quad$ 2 целых корня, корни >1 $\quad a_{min}$

$x=-2$

$(x-4)(x-2)=0$

$(x-3)^2=x^2$

1,52-круг



$x^2+bx+a=0$ $\quad x^2+cx+a+1=0$

$x_1+x_2=-b$ $\quad x_1'+x_2'=-c$

$x_1\cdot x_2=a$ $\quad x_1'\cdot x_2'=a+1$

$x=3$

$x=4$

$x^2+bx+8=0$

$$\begin{cases}x_b>1\\ f(1)>0\end{cases}$$

$-\frac{b}{2}>1$

$-b>2$

$b<-2$

$b+a>0$

$a>-b>2$

$x^2+cx+a+1=0$

$-\frac{c}{2}>1$

$-c>2$

$c+a+1>0$

$a>-c-1$

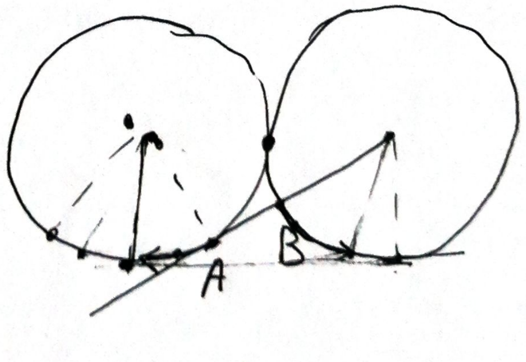
$x=8$

$a=8$

12

13

14 15



Чистовик 1

Задача 2.

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y} + |y+3| = 1 \\ \sqrt{x^2+y-1} + |x+3| = 1 \end{cases}$$

т.к $\underbrace{\sqrt{x^2+y}}_{\geq 0} + \underbrace{|y+3|}_{\geq 0} = 1 \Big) \Rightarrow 0 \leq |y+3| \leq 1 \Big) \Rightarrow y \in [-3;-2]$

т.к $\underbrace{\sqrt{x^2+y-1}}_{\geq 0} + \underbrace{|x+3|}_{\geq 0} = 1 \Big) \Rightarrow 0 \leq |x+3| \leq 1 \Big) \Rightarrow x \in [-3;-2]$

$\left.\begin{matrix} y \in [-3;-2] \\ x \in [-3;-2] \end{matrix}\right) \Rightarrow \sqrt{x^2+y} \geq \sqrt{(-2)^2-3} = 1 \Big) \Rightarrow$ чтобы выполнялось, что $\sqrt{x^2+y} + |y+3| = 1$ нужно чтобы $x=-2;\ y=-3$

~~т.е $\sqrt{x^2+y} \geq \sqrt{x^2_{min} - y_m}$~~

если мы возьмем другие x и y значение $\sqrt{x^2+y}$ увелич.

$x=-2,\ y=-3$

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y} + |y+3| = \sqrt{4-3} + |-3+3| = 1 \\ \sqrt{x^2+y-1} + |x+3| = \sqrt{4-3-1} + |-2+3| = 1 \end{cases}$$

Ответ: $x=-2;\ y=-3$

Чистовик

2

Задача 3

$$\begin{cases} x^2+bx+a=0 \\ x^2+cx+a=-1 \end{cases}$$ по 2 целых корня >1

$x^2+bx+a=0$

пусть x_1 и x_2 — корни x^2+bx+a

тогда по т. Виетта: $x_1 \cdot x_2 = a$

$x^2+cx+a+1=0$

x_1' и x_2' — корни $x^2+cx+a+1$

по т Виетта: $x_1' \cdot x_2' = a+1$

т.к $x_1, x_2, x_1', x_2' > 1$ и $x_1, x_2, x_1', x_2' \in Z$ $\Rightarrow$ $a \in N$ и ~~а имеет хотя бы 2 разл. 1 делитель от~~

$a>1$

a — не простое и не квадрат простого числа

$(a+1)$ — не простое и не квадрат простого числа

$\Rightarrow$ переберем a и найдем 1 подходящее:

$a \neq 2,3,4,5,7,9,11,13$, т.к a не простое и не квадр. простого числа

т.к $(a+1) \neq 2,3,4,5,7,9,11,13$ по такой же причине $\Rightarrow$

$a \neq 2,3,4,5,6,8,9,10,11,12,13$

$a>1$ $\Rightarrow$ $a_{min}=14$

Пример: $b=-9$, $a=14$, $c=-8$ (b, c — целые, т.к по т. Виетта $x_1+x_2=-b$, $x_1'+x_2'=-c$ и $x_1, x_2, x_1', x_2' \in Z$)

$x^2-9x+14=0$ $\Rightarrow$ $x_1=2, x_2=7$

$x^2-8x+15=0$ $\Rightarrow$ $x_1'=3, x_2'=5$

Ответ: $a=14$

Листовик 3

Задача 1.

$f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(13)$

$f(n)=4n^3-6n^2+4n+13$

$(n-1)^4=n^4-4n^3+6n^2-4n+1$

$f(1)=4-6+4+13=15$

$4n^3-6n^2+4n=n^4-(n-1)^4+1$

$f(2)=32-24+8+13=29$

$4n^3-6n^2+4n+13=n^4-(n-1)^4+14$

$f(3)=$

$f(1)+f(2)+\ldots+f(13)=\cancel{1^4}-0^4+14+\cancel{2^4}-\cancel{1^4}+14+3^4-\cancel{2^4}+14+\ldots+13^4-\cancel{12^4}+14$

$=13^4+14\cdot 13=28743$

Ответ: 28743

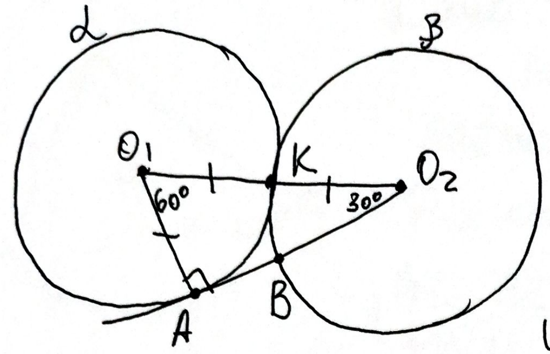
3 стр.

Чистовик 4

Задача 4.

d - диаметр трассы

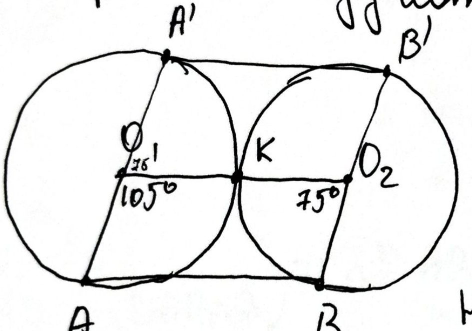
т.к каждый автом. проезжает полный круг за 1,5 часа и радиусы трасс одинаковые) => $v_A = v_B$.



в $\triangle AO_1O_2$: $\left.\begin{array}{l} O_1O_2 = 2R \\ O_1A = R \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} \angle O_2O_1A = 60^\circ \\ \angle O_1O_2B = 30^\circ \end{array}$

и т.к $v_A = v_B$) => у автомоб. A сегмент KO_1A будет на 30° больше чем KO_2B

Сначала расст. между автомоб. монотонно увеличив. а потом монотонно уменьш.



рассм. момент когда $\angle AO_1K = 105^\circ$
$\angle KO_2B = 75^\circ$

$\left.\begin{array}{l} O_1A \parallel O_2B \\ O_1A = O_2B \end{array}\right) \Rightarrow O_1O_2BA$ - парал-м) => $AB = d$

Найдем за сколько авт. A проедет $105^\circ - 60^\circ = 45^\circ$; весь круг 360°) =>

$$t = \frac{3}{2} \text{ часа} \cdot \frac{45}{360} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{16} \text{ часа}$$

после этого расст. м/у A и B будет $> d$ до момента пока не повтор. симметричн. ситуация т.е $\angle KO_1A' = \cancel{315}\ 285^\circ$; $\angle KO_2B' = 255^\circ$

~~сменяет в 180° авто~~ т.е. расст м/у A и B будет не больше d на участке $A'KA$ у автомоб. A и на участке $B'KB$ у автом. B

к $\angle A'OA = \angle B'O_2B = 180^\circ$) => ~~расст~~ расст. м/у автом. будет $\le d$

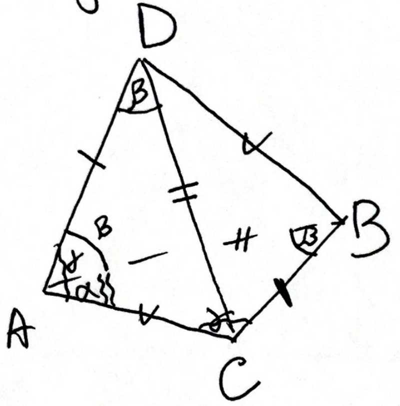
будет $\frac{3}{2} \cdot \frac{180}{360} = \frac{3}{4}$ часа

Ответ: $\frac{3}{4}$ часа

4 стр.

Чистовик (5)

Задача 6



$\angle ABC=\beta$
$\angle BAC=\alpha$
$\angle ACB=\gamma$

Дано: $S_{ABC}=S$; сум. плоск. угл. при верш. $A=180^\circ$
$AB=CD$, $AD=BC$

Найти: $S_{пов-ти}$

Решение:

1) $\left.\begin{array}{l} AD=BC \\ AB=CD \\ AC\text{-общ.} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} \triangle ADC=\triangle CBA \\ \text{(по 3 ст.)} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\angle ADC=\angle ABC=\beta$
$\angle DAC=\angle ACB=\gamma$

$\left.\begin{array}{l} \underbrace{\angle DAC}_{\gamma}+\underbrace{\angle BAC}_{\alpha}+\angle DAB=180^\circ \\ \underbrace{\angle BAC}_{\alpha}+\underbrace{\angle ACB}_{\gamma}+\underbrace{\angle ABC}_{\beta}=180^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \angle DAB=\beta$

2) $\left.\begin{array}{l} AB\text{-общ.} \\ BC=AD \\ \angle ABC=\angle DAB=\beta \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} \triangle DAB=\triangle CBA \\ \text{(по 2 стор. и }\angle) \end{array}\right\} \Rightarrow AC=BD$

$\left.\begin{array}{l} AC=BD \\ BC=AD \\ CD=AB \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC=\overset{\triangle CDA}{\cancel{\triangle ADC}}=\triangle CDB=\triangle ABD \Big\} \Rightarrow$

$S_{ABC}=S_{CDA}=S_{CDB}=S_{ABD}=S$

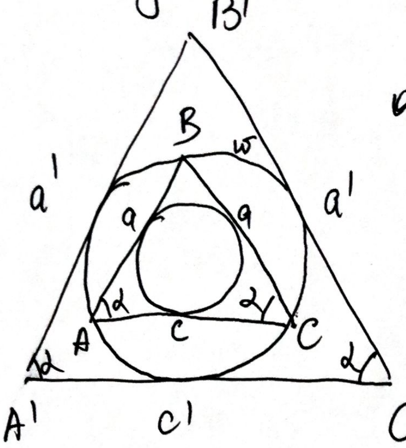
$S_{пов-ти}=S_{ABC}+S_{CDA}+S_{CDB}+S_{ABD}=4S$

Ответ: $4S$

(5) стр.

Чистовик (6)

Задача 5.



ΔABC помещают в круг min по площади) => ограничив. его окруж.-ω - описан. окр. ΔABC

$\Delta A'B'C'$ - min пл.) => окр ω впис. в $\Delta A'B'C'$

т.к $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$) => коэф. подобия $= \frac{R}{r}$ (r - рад. впис в ΔABC окр. R - рад. опис. окр. ΔABC)

1) $\cos\alpha = \frac{c}{2a}$) => $c = 2a\cos\alpha$

1) $S_{ABC} = p\cdot r = a(1+\cos\alpha)\cdot r = 1$) => $r = \frac{1}{a(1+\cos\alpha)}$

$R = \frac{a\cdot a\cdot c}{4S_{ABC}} \overset{*}{=} \frac{a\cdot a\cdot 2a\cdot\cos\alpha}{4} = \frac{\cancel{2}a^3\cos\alpha}{2}$

$\frac{R}{r} = \frac{\frac{a^3\cdot\cos\alpha}{2}}{\frac{1}{a(1+\cos\alpha)}} = \frac{a^4(1+\cos\alpha)\cdot\cos\alpha}{2}$; $S_{ABC} = \frac{a\cdot a\cdot\sin(180-2\alpha)}{2} = \frac{a^2\sin2\alpha}{2} = 1$

) => $a^2 = \frac{2}{\sin2\alpha}$

$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \left(\frac{R}{r}\right)^2 = \frac{a^8(1+\cos\alpha)^2\cos^2\alpha}{4} = \frac{4(1+\cos\alpha)^2\cos^2\alpha}{\sin^4 2\alpha}$

) => $S_{A'B'C'} = \frac{4(1+\cos\alpha)^2\cos^2\alpha}{\sin^4 2\alpha}$

$\alpha = 30°$; $S_{A'B'C'} = \frac{4\cdot\left(1+\frac{\sqrt3}{2}\right)^2\cdot\frac{3}{\cancel{4}}}{\frac{1}{\cancel{16}}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{\cancel{4}}} = \frac{16}{3}\cdot\left(\frac{7}{4}+\sqrt3\right) = \frac{28}{3}+\frac{16\sqrt3}{3}$

$\alpha = 60°$: $S_{A'B'C'} = \frac{\cancel{4}\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{\cancel{4}}}{\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}} = \cancel{\frac{8\cdot4\cdot4}{2\cdot3\cdot3} = \frac{8}{3}}\ \frac{9\cdot4\cdot4}{4\cdot3\cdot3} = 4$

докажем, что S_{max} при $\alpha = 30°$ и S_{min} при $\alpha = 60°$

$\alpha\in[30°;45°]$ на этом промеж. если $\alpha\uparrow$) => $(1+\cos\alpha)^2\cos^2\alpha\downarrow$, $\sin^4 2\alpha\uparrow$

) => $\frac{4(1+\cos\alpha)^2\cos^2\alpha}{\sin^4 2\alpha}\downarrow$

$\alpha\in[45°;60°]$ на этом промеж. если $\alpha\uparrow$) => $(1+\cos\alpha)^2\cdot\cos^2\alpha\downarrow$, $\sin^4 2\alpha\downarrow$ одинаковые на промеж. $[30°;45°]$ и $[45°;60°]$ $\sin^4 2\alpha$ принимает ~~такие~~ же значения, но на промеж. $[45°;60°]$ значения $(1+\cos\alpha)^2\cdot\cos^2\alpha$ меньше чем на промеж. $[30°;45°]$) => $\frac{4(1+\cos\alpha)^2\cos^2\alpha}{\sin^4 2\alpha}\downarrow$ при $\alpha\in[30°;60°]$

Ответ: $S_{min} = 4$; $S_{max} = \frac{28}{3}+\frac{16\sqrt3}{3}$