МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Цеденов Артем Кимович**

Класс: **9**

Технический балл: **65**

Дата проведения: **19 марта 2021 года**

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике
2020/2021 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Цеденов Артем Кимович

9 класс

Задача 1	**Задача 2**	**Задача 3**	**Задача 4**	**Задача 5**	**Задача 6**	**Задача 7**	**Сумма**
15 баллов	10 баллов	15 баллов	0 баллов	0 баллов	15 баллов	10 баллов	65 баллов

чистовик лист. N3

N5

наим. зн. $f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1}$, при $x > 0$ – ?

Решение:

по н-ву о средних, т.к. $x>0$: $\frac{x+\frac{1}{x}}{2} \geq \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 1$, $x + \frac{1}{x} \geq 2$, $\frac{x^2+1}{x} \geq 2 \Rightarrow \frac{x}{x^2+1}$

N2

ск-ко дел. у числа 2021^{2021}, кубич. корень – нат. число – ?

$2021 = 45^2 - 2^2 = (45-2)(45+2) = 43 \cdot 47$

$2021^{2021} = 43^{2021} \cdot 47^{2021}$

чтобы кубич. корень из числа был нат. числом, нужно чтобы показател. $\vdots 3$, каждый дел. имеет вид $2\, 43^{3k} \cdot 47^{3m}$, $m, k \geq 0$, $m, k \in \mathbb{Z}$

З., что всего чисел $\vdots 3$ от 0 до 2021 – 674, т.к. $2019 = 3 \cdot 673$ – 3 посл. ~~кр.~~ число $\vdots 3$, и $0 = 3 \cdot 0$ – первое

по пр. м-ля всего – [illegible]

$\boxed{\text{Черновик лист N 11}}$

$S_n = b_1 + b_2 \ldots + b_n$

$-\ast$

$qS = b_2 + \ldots + b_{n+1}$

$(q-1)S = b_{n+1} - b_1$

$S = \frac{b_1 \cdot q^n - b_1}{q-1} = b_1 \frac{q^n - 1}{q-1} = b_1 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^8 - 1}{-\frac{1}{2}} =$

$1, 2, \ldots, 200$

$\overset{1}{\text{один}}$ 0

199 отр. $[1;2]$, $[2;3]$, $[3;4]$, ..., $[199;200]$

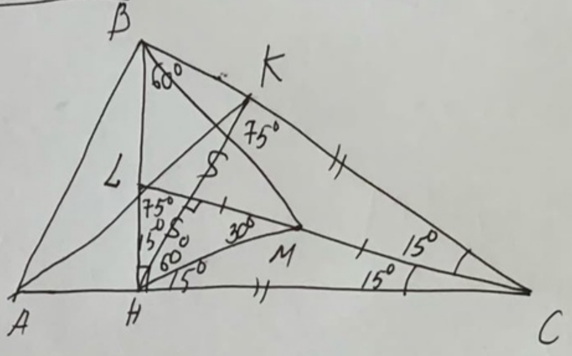
разн. $=0$ $+1/_{\text{I}}$

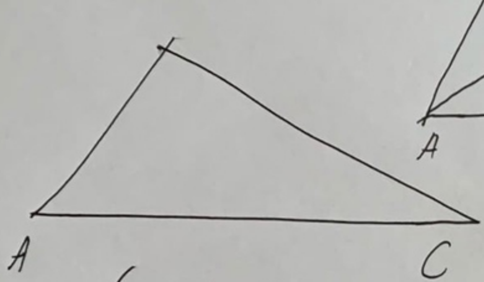
разн $\neq 0$, $+1/_{\text{II}}$

$\overset{1}{1}$ $\overset{0}{2}$ $\overset{0}{3}$ $4'$ $\overset{1}{5}$ $\overset{0}{6}$ 7 8 9 10

$\overset{1}{1}$ 2 $\overset{0}{3}$ 4^1

$\boxed{\text{черновик лист. №8}}$





$f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1}$

(a, b, c)

$ax^2 + bx + c = 0$

по th. Виета: $\begin{cases} ab = \frac{c}{a} \\ a+b = -\frac{b}{a}, \quad a^2 + ab + b = 0 \end{cases}$

$D = b^2 - 4b$

Чистовик лист №1

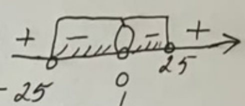
№3

$$\begin{cases} |x^4-625x^2| \neq x^4-625x^2 \quad (1) \\ |6x^2-257x+251| + 6x^2-257x+251=0 \quad (2) \end{cases}$$

$\sqrt{625} = 25$

$$\begin{array}{r|l} -4 & \\ 45 & 225 \\ 5 & 225 \\ & 0 \end{array}$$

(1) $\Leftrightarrow x^4-625x^2<0, \quad x^2(x^2-625)<0, \quad x^2(x-25)(x+25)<0$



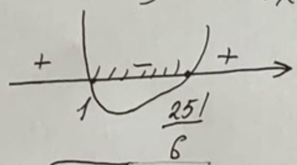
дв. кратн.

(1) $\Leftrightarrow x \in (-25;0) \cup (0;25)$

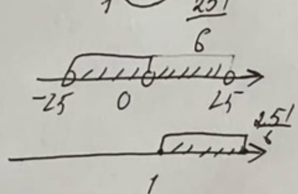
(2): $|6x^2-257x+251| = -(6x^2-257x+251) \Leftrightarrow 6x^2-257x+251 \leq 0$, по сл. из th. Виета,

т.к. $a+b+c=0$, то $x=1; \frac{251}{6}$

(2) $\Leftrightarrow x \in [1; \frac{251}{6}]$



$$\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-25;0) \cup (0;25) \\ x \in [1; \frac{251}{6}] \end{cases}$$



$\frac{251}{6} \overset{>}{\vee} 25 | \cdot 6$

$251 \overset{>}{\vee} 75$

Ответ: $x \in [1;25)$

Чистовик лист. N1/2

N7

а) победит второй.

Стратегия: если I ставит ~~номер~~ число на ∀ номер, то II должен поставить другое число на номер, соседний к их. и свободный. ~~Если такой нет~~. Такое всегда найдётся, Докажем это Предположим противное,..

черновик лист N2

N1

$v_{II} = 3 v_I$

$S_{II} = 2S$

$v_{II}' = \frac{v_{II}}{2}$

$S_{II}' = S$

$v_{II}'' = \frac{v_{II}'}{2}$

N2

2021^{2021}

кубич. корень - нат. число

$\sqrt{2025} = 45$

$2021 = 2025 - 4 = 45^2 - 2^2 =$

$= (45-2)(45+2) = 43 \cdot 47$

$2021^{2021} = 43^{2021} \cdot 47^{2021}$

чтобы изв. куб. корень нужно, чтобы показатель $\vdots 3$

N4

сл-ко (a, b, c) ?, если они корни $ax^2 + bx + c = 0$

N5

$f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1} = \frac{x^2+1}{x} + \frac{x}{x^2+1}$ $\quad$ $\exists\ \frac{x^2+1}{x} = t > 0,$ $\quad t + \frac{1}{t} \geq 2,\ t^2 + 1 \geq 2t,\ (t-1)^2 \geq 0$

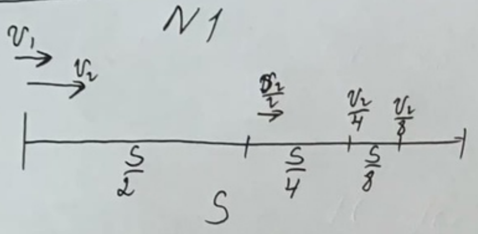
$t = 1$

(д, что при $x > 0$, $x + \frac{1}{x} \geq 2$, $x^2 + 1 \geq 2x$, $(x-1)^2 \geq 0$)

$\frac{x^2+1}{x} \geq 2$

чистовик лист N6

N1



$\frac{t_2}{t_1}$ – ?

$v_2 = 3v_1$

S – дл. всего пути

$\exists\ v_1 = x,\ v_2 = 3x$

найдём пройд. путь $S_2 = \frac{S}{2} + \frac{S}{4} + \frac{S}{8} + \frac{S}{16} + \ldots + \frac{S}{2^8} =$

$= S\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^8}\right) = S \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^8}}{1 - \frac{1}{2}} =$

$= S\left(2 - \frac{1}{2^7}\right) \cdot \frac{1}{2} = S\left(1 - \frac{1}{2^8}\right)$

$S_{ост} = S - S\left(\cancel{1}\ 1 - \frac{1}{2^8}\right) = S \cdot \frac{1}{2^8}$

з, что каждый участок пути второй авт. тратит одинак. время $t = \frac{\frac{S}{2^n}}{\frac{3x}{2^{n-1}}} = \frac{S}{6x}$

первый проедет за $t_1 = \frac{S}{x}$

$v_{к\ второго} = \frac{v_2}{2^8} = \frac{3x}{2^8}$, $t_{ост} = \frac{S \cdot \frac{1}{2^8}}{\frac{3x}{2^8}} = \frac{S}{3x}$

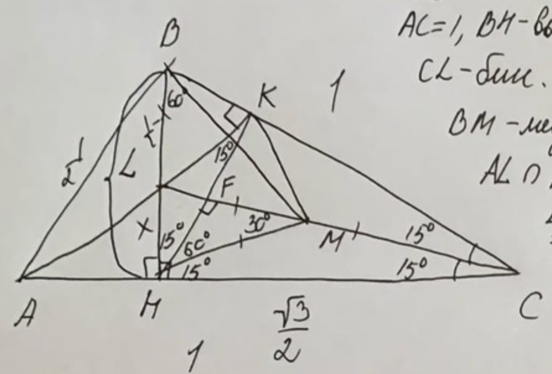
$t_2 = \frac{S}{6x} \cdot 8 + \frac{S}{3x} = \frac{5S}{3x}$

$\frac{t_2}{t_1} = \frac{5S}{3x} \cdot \frac{x}{S} = \frac{5}{3}$

Ответ: в $\frac{5}{3}$ р.

Чистовик лист N9

N6



Дано:

$\triangle ABC$

$AC=1$, BH-выс.

CL-бис. $\triangle BHC$

BM-мед. $\triangle BLC$

$AL \cap BC = K$

$\angle BHK = \angle MHC = 15^\circ$

Найти:

S_{KLHM}

Решение:

1) ~~по св-~~ ∡ $\triangle LHC$:

по св-ву прямоуг. $\triangle$-ка:

$HM = LM = MC$, $\angle MCH = \angle MHC = 15^\circ$

2) $HK \cap CL = F$

3) $\angle FHM = 90^\circ - (\angle BHK + \angle MHC) = 60^\circ$

4) $\angle LMH = \angle MCH + \angle MHC = 30^\circ$

5) $\triangle HFM$- прямоуг. $\Rightarrow CL \perp HK$

6) $\triangle HCK$ - р/б, т.к. CF - выс. и бис. $\Rightarrow CF$ - сер. пер. к KH

7) $\triangle KHM$ - прав., т.к. MF - сер. пер. к HK и $\angle KHM = 60^\circ$, $KH = HM$

8) $\triangle LHK$ - р/б, т.к. LF - сер. пер. к KH, $\angle LKH = \angle LHK = 15^\circ$

9) ∡ $\triangle BHK$: $\angle BKH = 180^\circ - (\angle KBH + \angle KHB) = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$

10) $\angle BKA = \angle BKH - \angle LKM = 90^\circ \Rightarrow L$ - ортоцентр $\Rightarrow CL$ - выс. $\Rightarrow \triangle ABC$ равноб., $BC = AC = 1$

11) ∡ $\triangle BHC$: $HC = BC \sin\angle HBC = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $BH = BC \sin\angle BCH = \frac{1}{2}$

12)] $LH = x$, $BL = \frac{1}{2} - x$. По св-ву бис: $\frac{x}{\frac{1}{2} - x} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1}$, $x = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}x$ $|\cdot 4$, $4x = \sqrt{3} - 2\sqrt{3}x$, $2x(2+\sqrt{3}) = \sqrt{3}$

$x = \frac{\sqrt{3}}{2(2+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{1} = \frac{2\sqrt{3}-3}{2}$

черновик лист N5

$$\frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{x^2+1}=\frac{(x^2+1)^2+x^2}{x(x^2+1)}=\frac{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}{x(x^2+1)}=\cancel{\left(x+\frac{1}{x}-1\right)}\cancel{\left(1+\frac{x}{x^2+1}\right)}=$$

$x^2+1=x,\ x^2-x+1=0$

$\cancel{D=1}$

$$\begin{array}{r|l} 2019 & 3 \\ -18 & 673 \\ 21 & \\ -21 & \\ 09 & \end{array}$$

≥ 1

$x=0:\ 1$

$$=\left(1-\frac{x}{(x^2+1)^2}\right)\left(x+\frac{1}{x}+1\right)$$

$\frac{x}{x^2+1}\geq 1,\ \cancel{(x^2+1\leq x)}$

$$(x^2+1)^2+x^2\geq 2x(x^2+1)\ /:x(x^2+1)$$

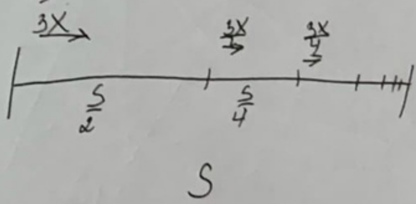
$$\frac{(x^2+1)^2+x^2}{x(x^2+1)}\geq 2$$

$$\frac{x}{x^2+1}\leq\frac{1}{2}$$

$$1-\frac{x}{x^2+1}\geq\frac{1}{2}$$

$$x+\frac{1}{x}+1\geq 3$$

$v_1=x$



$$x+\frac{1}{x}+\frac{x}{x^2+1}=$$

$$=\frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{x^2+1}$$

$$x=1:\ \frac{2}{1}+\frac{1}{2}=2\frac{1}{2}$$

$$t_1=\frac{\frac{S}{2}}{3x}=\frac{S}{6x}$$

$$t_2=\frac{\frac{S}{4}}{\frac{3x}{2}}=\frac{S}{6x}$$

$\vdots$

$$t_8=\frac{S}{6x}$$

$$\frac{S}{2}+\frac{S}{4}+\ldots+\frac{S}{16}=S\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{16}\right)=$$

$$=S\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^8-1}{\frac{1}{2}-1}=$$

$$=S\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^8}}{\frac{1}{2}}=$$

$$=S\cdot\left(1-\frac{1}{2^8}\right)$$

Чистовик лист. N10

$\frac{x}{\frac{1}{2}-x}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $2x=\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}\,x$, $(2+\sqrt{3})x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x=\frac{\sqrt{3}}{2(2+\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{2}=$

13) по th. Пиф ΔHLC: $LC^2=HL^2+HC^2=\left(\frac{2\sqrt{3}-3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=\frac{4\cdot 3-12\sqrt{3}+9+3}{4}=$

$$=\frac{3(4-4\sqrt{3}+3)}{4}+\frac{3}{4}=\frac{21-12\sqrt{3}+3}{4}=\frac{24-12\sqrt{3}}{4}=6-3\sqrt{3}$$

$LC=\sqrt{6-3\sqrt{3}}$

14) $LM=\frac{LC}{2}=\frac{\sqrt{6-3\sqrt{3}}}{2}$

15) $HK=HM=\frac{LM}{2}=\frac{\sqrt{6-3\sqrt{3}}}{2}$

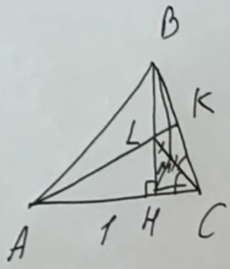
16) $S_{KLHM}=\frac{1}{2}\,KH\cdot LM\cdot \sin\angle KFM=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{6-3\sqrt{3}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{6-3\sqrt{3}}}{2}=\frac{6-3\sqrt{3}}{8}$

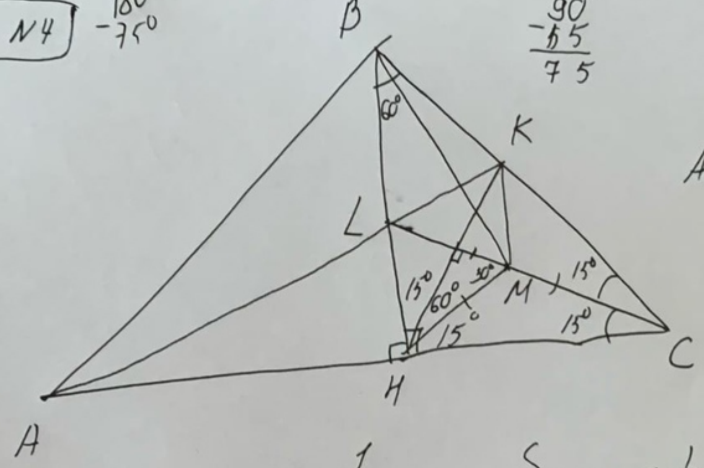
Ответ: $\frac{6-3\sqrt{3}}{8}$

черновик лист. N4

$$\begin{array}{r} 180^\circ \\ -75^\circ \end{array}$$

N6





$$\begin{array}{r} 90 \\ -15 \\ \hline 75 \end{array}$$

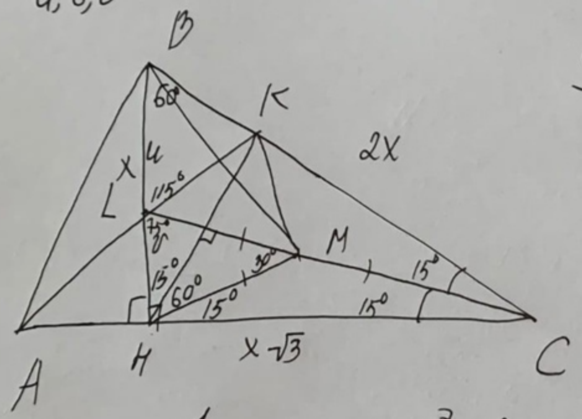
$\angle BHK = 15^\circ$

$AC = 1$

$S_{KLHM} - ?$

$S_{KLHM} = \frac{1}{2} d_1 d_2$

a, b, c



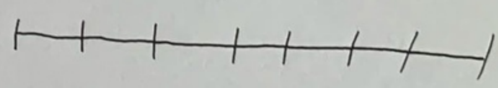
$S_{KLHM} - ?$

2x

$\frac{u}{v} = \frac{2x}{x\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $u = \frac{2\sqrt{3}}{3} v$

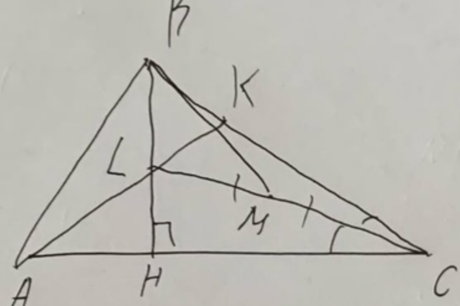
$u + v = x$, $v\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} + 1\right) = x$, $v = \frac{3x}{2\sqrt{3}+3}$

$2^7 = 2^6 \cdot 2 = 64 \cdot 2 = 128$



~~черно~~ ~~что~~ $\boxed{\text{черновик лист №7}}$

№6



трое a, b, c – ?

корни $ax^2+bx+c=0$

$$f(x) = x+\frac{1}{x}+\frac{x}{x^2+1} = \frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{x^2+1} \geq 2\sqrt{1}$$

$\frac{x}{2x}$

$\geq 2x$

≥ 2

$$\frac{x^2+1}{x} = \frac{x}{x^2+1}$$

$$x^2 = x^4+2x^2+1$$

$$x^4+x^2+1=0$$

$1 - \frac{2}{x^2} -$

$$\begin{array}{r} 105^\circ \\ +\ 15 \\ \hline 120^\circ \end{array}$$