**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**
**имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

# ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Чуркин Артём Олегович**

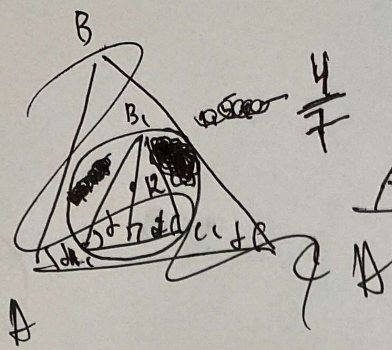
Класс: **11**

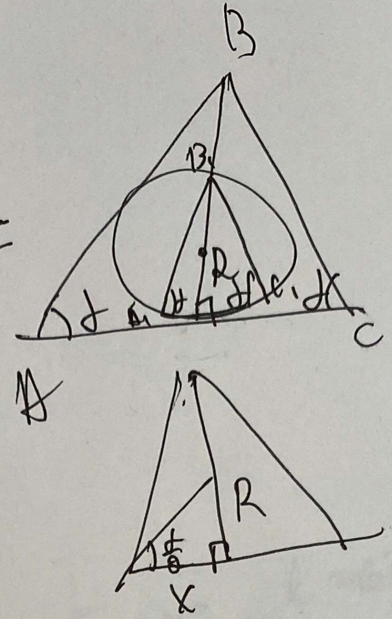
Технический балл: **80**

Дата проведения: **20 марта 2021 г.**

**Результаты проверки:**

| № | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Оценка | 15 | 15 | 15 | 15 | 5 | 15 | 0 |




$R_{опр} = \frac{2}{3}\, l_{медианы} = x \cdot \frac{2}{3}\, tg\,\alpha$

$2\alpha' = \alpha$ осн большого $\Delta$-ка

$x' = \dfrac{R}{tg\frac{\alpha}{2}} = \cancel{\dfrac{\frac{2}{3}x\, tg\frac{\alpha}{2}}{tg\,\alpha}} = \dfrac{\frac{2}{3}x\, tg\,\alpha}{tg\frac{\alpha}{2}} =$

$= \cancel{\dfrac{\frac{2}{3}x\cdot(tg\frac{\alpha}{2})}{4\, tg\frac{\alpha}{2}}} = \frac{2}{3}x = \dfrac{\frac{2}{3}x\cdot 2\cancel{(tg\frac{\alpha}{2})}}{(1-tg^2\frac{\alpha}{2})\cancel{(tg\frac{\alpha}{2})}} = \dfrac{\frac{4}{3}x}{(1-tg\frac{\alpha}{2})^2}$

Чистов... №4

# №3

Чистовик №3

$x^2+bx+a=0$ - пусть корни этого ур-я $x_1$ и $x_2$, $x_1 \geq x_2$

$x^2+cx+a+1=0$ 1 корни этого ур-я $x_3$ и $x_4$, $x_3 \geq x_4$

1) т.к. $x_1x_2=a>1$ (т.к. $x_1$ и $x_2>1$ (по усл.)), то $a+1>2 \Rightarrow$

$x_3x_4=a+1>2$

По условию нам надо найти $\min(a)$, то есть $\min(a+1)$, т.е.

$\min(x_3x_4)$

Заметим, что ~~ан~~ $a+1$ и $a$ должны быть составными.

Переберём 1) $a+1=2$ ⊖ (2 простое)

2) $a+1=3$ ⊖

3) $a+1=4$, т.е $a=3$ — простое ⊖

4) $a+1=5$, ⊖

5) $a+1=6$, т.е $a=5$ ⊖

6) $a+1=7$. ⊖

7) $a+1=8$, т.е $a=7$ ⊖

8) $a+1=9$, т.е $a=8$ ⊕ Пример: $b=-6$, $c=-6$

$x^2-6x+8=0 \Leftrightarrow (x-4)(x-2)=0$

$x^2-6x+9=0 \Leftrightarrow (x-3)^2=0$

$a_{min}=8$, если кратные корни тоже считаются

Если не нет, ~~Иначе~~ т.

В таком случае мы продолжаем перебор:

9) $a+1=10$ т.е $a=9$ ⊖ — кратные корни

10) $a+1=11$ ⊖

11) $a+1=12$, т.е $a=11$ ⊖

12) $a+1=13$ ⊖

13) $a+1=14$ ⊖

(Продолжение на сл. листке)

№ 2 Чистовик № 2

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y} + |y+3| = 1 \quad (1) \\ \sqrt{x^2+y-1} + |x+3| = 1 \quad (2) \end{cases}$$

ОДЗ: $\begin{cases} x^2+y \geq 0 \\ x^2+y-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2+y \geq 1$,

тогда $\sqrt{x^2+y} \geq 1$

$$\underbrace{\sqrt{x^2+y}}_{\geq 1} + \underbrace{|y+3|}_{\geq 0} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y=1 \\ |y+3|=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-3 \\ x^2-3=1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y=-3 \\ \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=-3 \\ x=2 \end{cases} \quad (3) \\ \begin{cases} x=-2 \\ y=-3 \end{cases} \quad (4) \end{array}\right.$$

Проверим решения (3) и (4), подставив во (2)

$$\sqrt{x^2+y-1} + |x+3| = |x+3|$$

В случае (3): $x=2$, т. е. $|x+3| = 5 \neq 1$ ⊖ не подходит

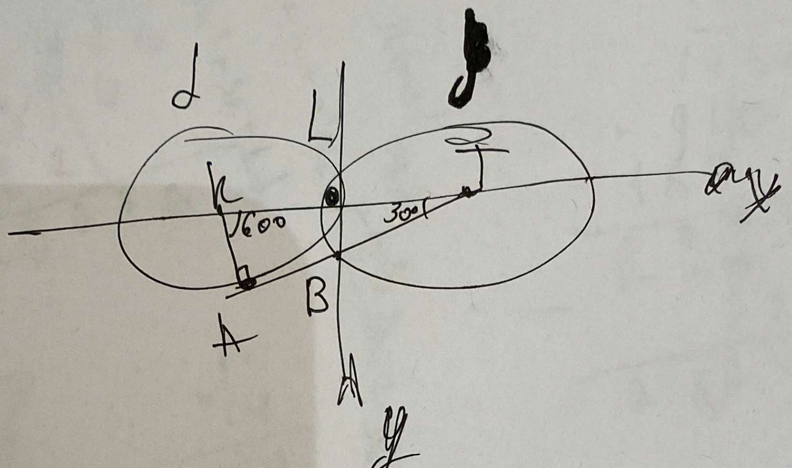
В случае (4): $x=-2$, т. е. $|x+3| = 1$ ⊕ подходит

Ответ: $(-2; -3)$

~~Черновик~~

Черновик 2

№24




В пр-м $\triangle AKT$: $AK = \frac{1}{2}KT \to \angle T = 30^\circ, \angle K = 60^\circ$

$$\begin{cases} x_B = 1-\cos\varphi \\ x_A = -(1-\cos(\varphi+300^\circ)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_B = \sin y \\ y_A = \sin(y+30) \end{cases}$$

Расстояние равно =

$$\sqrt{(x_b-x_a)^2+(y_b-y_a)^2} = \sqrt{2-\cos y-\cos(y+300))^2+\sin y-\sin(y+30)}$$

~~Чистовик~~

Черновик 1

$(n^2+n)(2n+1) =$

$2n^3+2n^2+n^2+n$

~~$n^3+3n^2+3n$~~ — $2n^3+3n^2+n$

$182 \times 158$: $1456$, $910$, $182$; $28756$; $-13$; $28743$

$(n^2+2n+1)(n+1)$

$n^3+2n^2+n+n^2+2n+1$

$(n^3+3n^2+3n+1)$

$13 \times 14$: $52$, $13$; $\boxed{182}$

$S = f(1)+f(2)+\dots+f(13) =$

$= 4(1^3+2^3+3^3+\dots+13^3) - 6(1^2+2^2+\dots+13^2) + B$

$+ 4(1+2+3+\dots+13) + 13 - 13$

$1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

$1+2^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$1+2^3+\dots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

$\frac{1}{4}(n+1)^4 - (n+1) - \cancel{6}\frac{n(n+1)(2n+1)}{\cancel{6}} - \cancel{4}\frac{n(n+1)}{2} =$

$\frac{1}{4}(n+1)\left((n+1)^3-1\right) - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1)$

$\frac{1}{4}(n+1)(n^3+3n^2+3n+\cancel{1}-\cancel{1}) - (n^2+n)(2n+1) - 2n^2 - 2n$

$\frac{1}{4}(n+1)(n^3+n^2) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Продолжение №5 Чистовик №8

Заметим, что тогда $15° \le \frac{t}{2} \le 30°$

На таком отрезке $tg(\frac{t}{2})$ монотонно возрастает. Но тогда ~~крайние~~ крайние значение площади достигается при крайних значениях $\frac{t}{2}$, т.к. $tg\frac{t}{2} < 1$, но тогда из подобия $S(t) = 1 \cdot \left(\frac{\frac{4}{3}}{(1-tg\frac{t}{2})^2}\right)^2 = \frac{16}{9} \cdot \left(\frac{1}{\left(1-\frac{1-\cos t}{\sin t}\right)^2}\right)^2$ -

$S_{min} = \frac{4}{9}(7+4\sqrt{3})$

$S_{max} = 28+16\sqrt{3}$

Ответ: $S_{min} = \frac{4}{9}(7+4\sqrt{3})$ ; $S_{max} = 28+16\sqrt{3}$

Вариант №210101

№1 Чистовик № 1

$f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(13)$, если $f(n)=4n^3-6n^2+4n+13$

П $f(1)+f(2)+\ldots+f(13)=S$, тогда

$$S=f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(13)=4(1^3+2^3+3^3+\ldots+13^3)-6(1^2+2^2+3^2+\ldots+13^2)+$$
$$+4(1+2+3+\ldots+13)+13\cdot 13$$

Посчитаем все суммы по отдельности:

Сумма кубов: $1^3+2^3+3^3+\ldots+13^3=\dfrac{13^2(13+1)^2}{4}$

Вывод формулы: $2^4+3^4+3^4+\ldots+(n+1)^4=1^4+2^4+\ldots+n^4+4(1^3+2^3+n^3)+$
$+6(1^2+\ldots+n^2)+4(1+2+\ldots+n)+1$

сумма квадратов

~~Следовательно,~~ $\cancel{1^3+2^3+\ldots+n^3=\frac{1}{4}(n+1)((n+1)^3-(1+n)}$

Следовательно, $1^3+2^3+\ldots+n^3=\dfrac{1}{4}\left((n+1)^4-(n+1)-6\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\right.$
$\left.-4\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}\right)=\dfrac{1}{4}(n+1)\left((n+1)^3-1-n(2n+1)-2n\right)=\dfrac{1}{4}(n+1)(n^3+3n^2+$
$+3n+1-1-2n^2-n-2n)=\dfrac{1}{4}(n+1)(n^3+n^2)=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

След., по известным формулам: $1+2+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

$1^2+2^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Тогда $S=\cancel{4}\cdot\dfrac{13^2(13+1)^2}{\cancel{4}}-\cancel{6}\cdot\dfrac{13(13+1)(2\cdot 13+1)}{\cancel{6}}+\cancel{4}^2\dfrac{13(13+1)}{\cancel{2}}+13\cdot 13=$

$=169\cdot 196-13\cdot 14\cdot 27+2\cdot 13\cdot 14+13\cdot 13=13\cdot 14(13\cdot 14-27+2)+16$

$=182(182-24)-13=182\cdot\cancel{78}158-13=\underline{28743}$

Ответ: 28.743

№6 Участвши № 9

Дано:

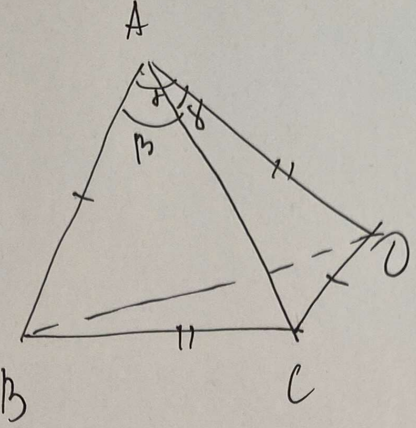
$\alpha+\beta+\gamma=180°$

$S(ABC)=S$

$AB=CD$

$AD=BC$

$S_{пов}$ - ?



1) Пусть $\angle BAD=\alpha$, $\angle BAC=\beta$, $\angle CAD=\gamma$

2) $\left.\begin{array}{l}\triangle ABD=\triangle BCD\ (\text{по III пр})\\ \triangle ABC=\triangle ADC\ (\text{по III пр})\end{array}\right\} \Rightarrow \angle BCD=\alpha$

3) $\angle ACD=\beta$, $\angle BCA=\gamma$, т.к. $\beta+\alpha+\gamma=180$, $\angle BAC=\angle ADC=\alpha$

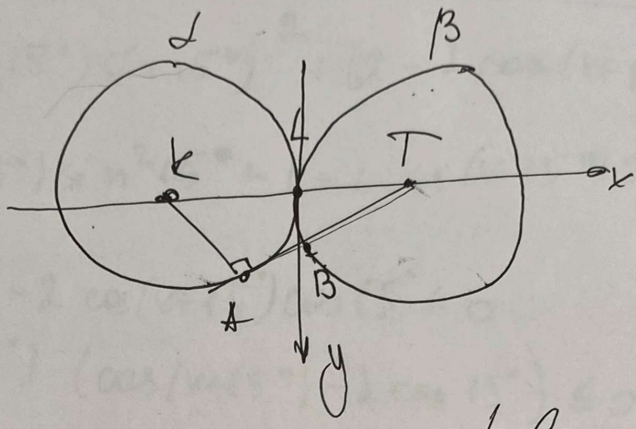
$\Rightarrow$ по I пр $\triangle ABC=\triangle ACD=\triangle BCD=\triangle ABD \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{пов}=S_{4ABC}=4S$

Ответ: $4S$

№4 Чистовик №5

~~Можно заметить, что за равное время автомобилисты проходят равные дуги.~~




Можно заметить, что за равное время автомобилисты проходят равные дуги.

Пусть $\angle LTB = \varphi$, тогда в начальный момент $\angle LTB = 30°$, т.к. $\angle KAT = 90°$ и $AK = \frac{1}{2} KT$, сл. $\angle LKA = 60°$.

Введем систему координат с осью $x$ напр. вдоль ~~KT~~ KT и O в L, ось $y$ с O в L, напр $\perp x$ („вниз")

Тогда $x_B = \cancel{\cos(\varphi+30)}\ 1-\cos\varphi$

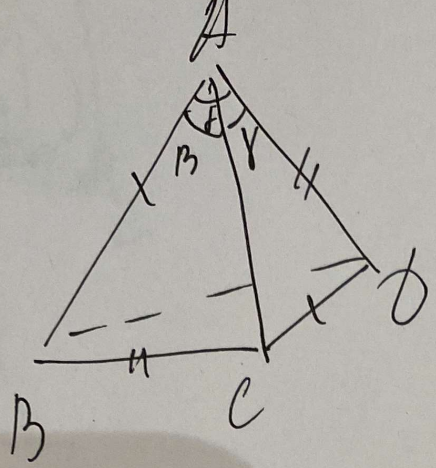
$x_A = -(1-\cos(\varphi+30))$

$y_B = \sin\varphi$ $y_A = \sin(\varphi+30)$, тогда расстояние между точками будет равно:

$$\sqrt{(x_b-x_a)^2+(y_b-y_a)^2} = \sqrt{(2-\cos\varphi-\cos(\varphi+30))^2+(\sin(\varphi+30)-\sin\varphi)^2}$$

(Продолжение на ~~следующей~~ сл. странице)

Чертеж 4




$\triangle ABD = \triangle BCD$

$\triangle ABC = \triangle ACD$

Продолжение №3 Чистовик №4

~~(4) $a+1=14$~~

14) $a+1=15$, т.е. $a=14 \Rightarrow x_1=7,\ x_2=2\ (b=-9)$

$x_3=5,\ x_4=3\ (c=-8)$

Итак, у нас есть 2 примера, в зависимости от того считаются кратные корни или нет.

Ответ: $\left[\begin{array}{l} 1)\ a_{min}=8, \text{ если кратные корни считаются} \\ 2)\ a_{min}=14, \text{ если кратные корни не считаются.} \end{array}\right.$

Чистовик № 6

Продолжение №4

Итак, найдём при каких $y$ $AB \le 2$:

$$\sqrt{(\sin x - \sin(x+30))^2 + (2 - \cos x - \cos(x+30))^2} \le 2$$

$$\sqrt{(2\cos(x+15^\circ)\sin 15^\circ)^2 + (2 - 2\cos(x+15^\circ)\cos 15^\circ)^2} \le 2$$

$$\cos^2(x+15^\circ)\sin^2 15^\circ + 1 - 2\cos(x+15^\circ)\cos 15^\circ + \cos^2(x+15^\circ)\cos^2 15^\circ \le 1$$

$$\cos^2(x+15^\circ) - 2\cos(x+15^\circ)\cos 15^\circ \le 0$$

$$\cos(x+15^\circ)\,(\cos(x+15^\circ) - 2\cos 15^\circ) \le 0$$

$$0 \le \cos x + 15^\circ \le 2\cos 15^\circ$$

$$2\pi n - \frac{7}{12}\pi \le x \le 2\pi n + \frac{5}{12}\pi$$

сл. при $x \in [0; 2\pi]$, ровно половина $x$ подойдёт, ~~остальная поло~~ след. половину всего времени расстояние будет не больше диаметра.

90 мин : 2 = 45 мин

Ответ: 45 минут.

№2

Черновик

5

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y} + |\cancel{x+y}||y+3| = 1 & (2) \\ \sqrt{x^2+y\cancel{x}-1} + |x+3| = 1 & (1) \end{cases} \Leftrightarrow$$

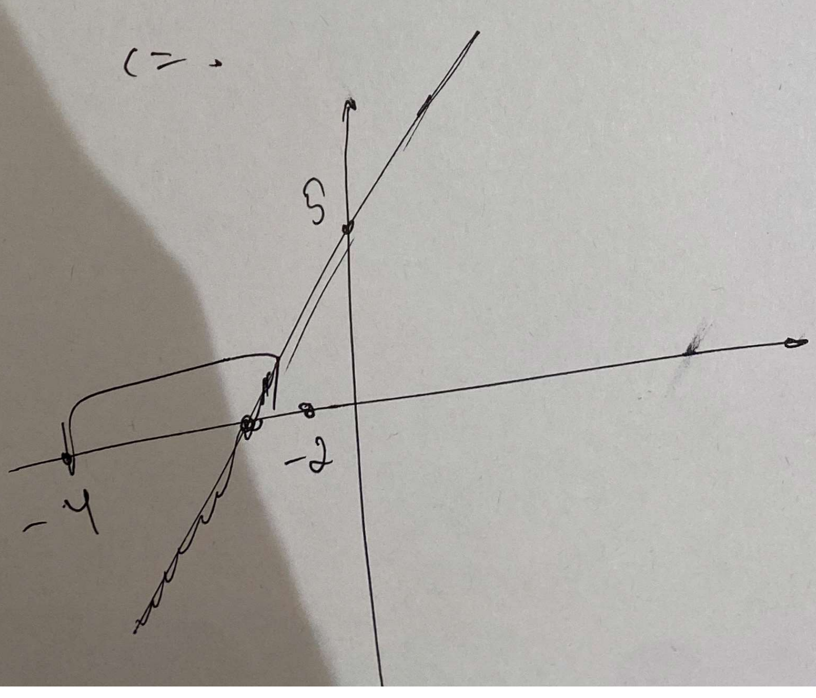
(1) $\sqrt{x^2+y-1} = 1-|x+3| \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x^2+y-1 = (1-|x+3|)^2 \\ 1-|x+3| \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2+y-1 = (1-2x-6+(x+3)^2) \\ |x+3| \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{x^2}+y-1 = 1-\cancel{2x}-6+\cancel{x^2}+\overset{4x}{\cancel{6x}}+9 \\ \begin{cases} x+3 \leq 1 \\ x+3 \geq -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = 4x+5 & (1) \\ x \leq -2 \\ x \geq -4 \end{cases}$$

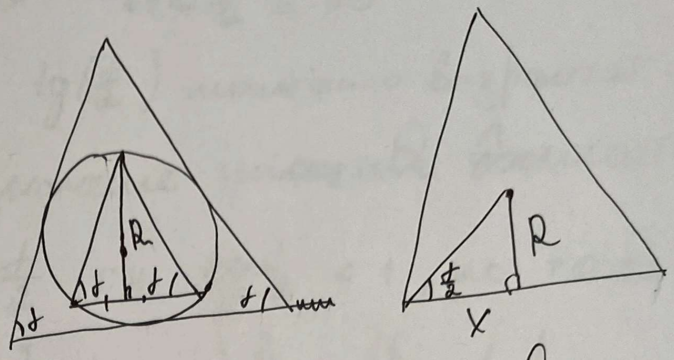


Чистовик №7

№ 5

Дано:
$\angle$ при основании
$30^\circ \le \angle \le 60^\circ$
$S(\angle) > 1$

$S(\angle)$ - ?




Заметим, что окружность описанная для изнач. $\Delta$-ка, т.к. ~~$\Delta$-тели~~ $\Delta$-к - остроугольный, и илаи треугольник можно будет совместить так, чтобы все вершины были строго внутри окружности, и потом уменьшить окружность

А получ. окр. вписанная для нового $\Delta$-ка. Тогда, если основание изначального $\Delta$-ка $2x$, то R окр:

$R_{окр} = \frac{2}{3} \cdot l_{медианы} = x \cdot \frac{2}{3} tg\angle$

Тогда, если осн большого $\Delta$-ка $- 2x'$, то

$$x' = \frac{R}{tg\frac{\angle}{2}} = \frac{\frac{2}{3}x\,tg\angle}{tg\frac{\angle}{2}} = \frac{\frac{2}{3}x2(tg\frac{\angle}{2})}{(1-tg^2\frac{\angle}{2})(tg\frac{\angle}{2})} = \frac{\frac{4}{3}x}{(1-tg\frac{\angle}{2})^2}$$

Продолжение на сл. странице.