МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Космонавтика**

ФИО участника олимпиады: **Венгерская Анна Сергеевна**

Класс: **11**

Технический балл: **66**

Дата проведения: **05 марта 2022 года**

Шифр	1а	1б	2	3	4	5а	5б	5в	6	ИТОГ
9450752	5	8	10	15	10	5	5	3	5	66

Задача №1.

$f(x)=ax+b+\frac{c}{x}$, $ac\neq 0$

а) График имеет точки только в I, II, III координатных четвертях. Значит, функция принимает положительные значения при $x>0$ $(a\cdot c\neq 0)$. При $x<0$ функция принимает и положительные и отрицательные значения.

Предположим, что $a<0$. Тогда при $x\to+\infty$: $ax\to-\infty$; $\frac{c}{x}\to 0$. В таком случае какими бы ни были b и c, функция будет принимать отрицательные значения. Значит, $\underline{a>0}$.

Предположим, что $c<0$. Тогда при $x\to 0^+$: $\frac{c}{x}\to-\infty$, $ax\to 0$. В таком случае какими бы ни были a и b, функция будет принимать отрицательные значения при $x>0$, а это противоречит условию. Значит $\underline{c>0}$.

Если $a>0, c>0$, ~~в~~ $x<0$, то $ax+\frac{c}{x}<0$. Но по условию при некоторых $x<0$ функция должна принимать положительные значения. Значит, $\underline{b>0}$.

б) $f(-1)=2f(-2)$

$-a+b-\frac{c}{1}=2(-2a+b-\frac{c}{2})$

$-a+b-c=-4a+2b-c$

$3a=b$,

$f(x)=0$

$ax+b+\frac{c}{x}=0$

$\frac{ax^2+bx+c}{x}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} ax^2+bx+c=0 \\ x\neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} ax^2+3ax+c=0 \\ x\neq 0 \end{cases}$ квадратное уравнение, имеет не более 2 корней

По т. Виета: $x_1+x_2=\frac{-3a}{a}=-3$
(если корни существуют)

1) $D=9a^2-4ac\geq 0$

$9a-4c\geq 0$

$a\geq\frac{4c}{9}$

2) Если $x=0$, то $c=0$, но по условию $c\neq 0$. Так что $x\neq 0$. ~~не является корнем~~.

Ответ: а) $a>0$; $b>0$; $c>0$;

б) $x_1+x_2=-3$.

Задача №2. $\boxed{\text{Чистовик}}$ 2/8

В прямоугольном треугольнике гипотенуза меньше суммы двух катетов. Значит, если есть выбор между катетами и гипотенузой, необходимо выбрать гипотенузу, чтобы маршрут был кратчайшим.

Так что из точки A нужно идти либо в M, либо в C.

1) Рассмотрим случай $A \to C$. Тогда дальше нужно идти в L, чтоб приблизиться к G. А далее уже сразу в G по гипотенузе. Получаем: $A \to C \to L \to G$

Длина маршрута: $S_1 = AC + CL + LG$

~~AC = DB~~ Обозначим: $AB = BC = CD = AD = ML = NK = PQ = EH = FG =$
$= EF = HG = a$

$AN = BM = CL = DK = HL = EM = FP = GQ = 4a$
(по условию).

$$AC = EG = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a$$

$$LG = AM = \sqrt{LH^2 + HG^2} = \sqrt{(4a)^2 + a^2} = \sqrt{17}a = MF = MH$$

$$S_1 = AC + CL + LG = \sqrt{2}a + 4a + \sqrt{17}a = (4 + \sqrt{2} + \sqrt{17})a$$

2) Рассмотрим случай $A \to M$. Тогда дальше нужно идти либо в F, либо в E, либо в H.

Нетрудно заметить, что маршруты $M \to FG$ и $M \to H \to G$ имеют одинаковую длину: $MF + FG = MH + HG = \sqrt{17}a + a = (\sqrt{17} + 1)a$

Для $A \to M \to F \to G$ и $A \to M \to H \to G$: $S_2 = MF + FG + AM =$
$= (2\sqrt{17} + 1)a$

Для $A \to M \to E \to G$: $S_3 = AM + ME + EG = \sqrt{17}a + 4a + \sqrt{2}a =$
$= (4 + \sqrt{17} + \sqrt{2})a$

Выходит, что $S_1 = S_3$. Сравним S_1 и S_2: $S_2 < S_1$

$$(2\sqrt{17} + 1)a < (4 + \sqrt{17} + \sqrt{2})a$$
$$\Uparrow$$
$$2\sqrt{17} + 1 < 4 + \sqrt{17} + \sqrt{2} \qquad 1 < 2$$
$$\Uparrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$
$$\sqrt{17} < 3 + \sqrt{2} \qquad 1 < \sqrt{2}$$
$$\Uparrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$
$$17 < 11 + 6\sqrt{2} \Leftarrow 6 < 6\sqrt{2}$$

Получается, что путь S2 соответствует кратчайшему маршруту A→M→F→G, либо же A→M→H→G. | Чистовик

3/8

Аналогичными маршрутами также будут

A→D→E→G, A→M→L→G.

Ответ: одним из кратчайших маршрутов является AMFG.

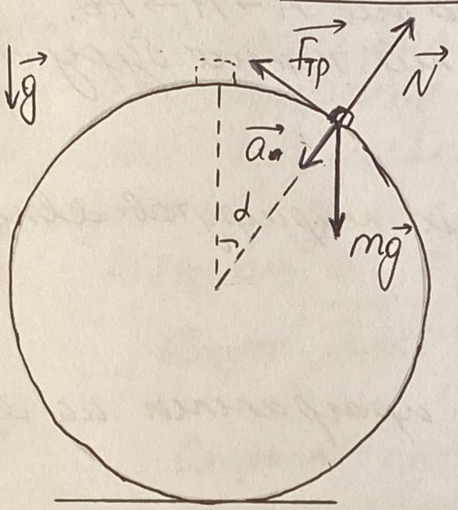
Задача №4.

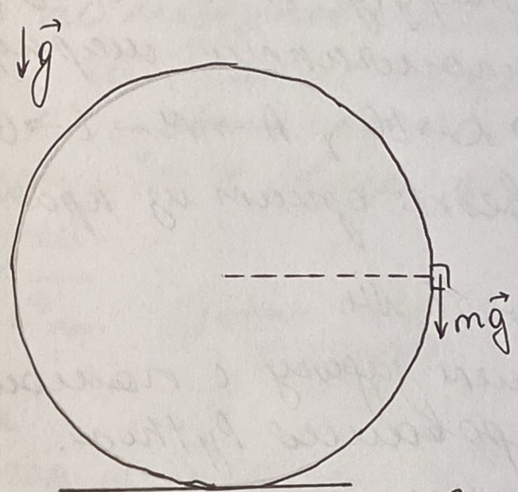
Решим задачу с помощью программы на языке программирования Python.

```
print("Введите цену на говорунов:")
A=input()
print("Введите цену на пегасов:")
B=input()
print("Введите сумму, которую готов потратить профессор:")
C=input()
sum=0
N=0
N1=0
N2=0
Sum1=0
n1=0
n2=0
for i in range(C//A+1):
    N1=i
    sum1=N1*A
    N2=(C-sum1)//B
    if sum1+N2*B>sum:
        sum=sum1+N2*B
        if N1+N2>n:
            n=N1+N2
            n1=N1
            n2=N2
print("Профессор купит ",n1,"говорунов и ",n2,"пегасов.")
```

Задача №3.

$m = 10г = 0{,}01кг$
$R = 0{,}6м$
$h = 0{,}6м$
$g = 10м/с^2$
$Q - ?$





В процессе движения по шару ~~нагру~~ на грузик действует сила тяжести, сила реакции опоры, сила вязкого трения. Грузик приобретает нормальное ускорение

$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр}$

OX: $F_{тр} = mg\sin\alpha$

OY: $ma_n = N - mg\cos\alpha$

$m\frac{\vartheta^2}{R} = N - mg\cos\alpha$

пропорциональность

$F_{тр} \propto \vartheta$ (или же $F_{тр} \propto \vartheta^2$)

$\vec{F}_{тр} = -k\vec{\vartheta}$, $k > 0$ (или же $F_{тр} = k_1\vartheta^2$)

Шар отрывается на высоте $h = 0{,}6м$ от нижней точки шара. Заметим, что $h = R = 0{,}6м$. Значит, шар отрывается при $\alpha = 90°$. При отрыве $N = 0$: $\frac{m\vartheta^2}{R} = 0 - mg\cos 90° = 0 \Rightarrow$

~~$F_{тр}$~~ $=$ $\Rightarrow$ при отрыве $\vartheta = 0 \Rightarrow$ при отрыве $F_{тр} = 0$.

При отрыве: $m\vec{a} = m\vec{g}$

~~Пусть~~ Примем поверхность, на которой расположен шар, за „0" потенциальной энергии. Тогда закон изменения потенциальной энергии:

$-\Delta W_p = A$ ← работа силы трения

$A = W_{p1} - W_{p0} = mg \cdot 2R - mg(2R - h) = mgh$

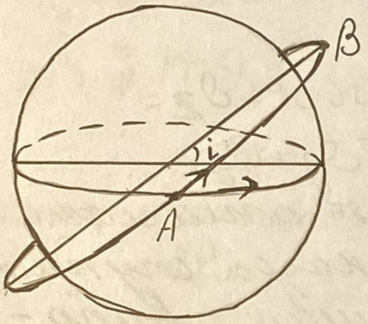
$Q = A = mgh = 0{,}01кг \cdot 10 м/с^2 \cdot 0{,}6м = 0{,}06 Дж$

Ответ: $Q = 0{,}06 Дж$.

Задача №5. (Чистовик)

Можно увидеть, что наибольшее по модулю отклонение спутника по широте равно 60°. Значит наклон орбиты равен либо 60°, либо 120°. В первом случае спутник вращается в ту же сторону, что и Земля вокруг своей оси, а во втором в обратную.

~~Скоро~~ $\vec{\vartheta}_{абс} = \vec{\vartheta}_{отн} + \vec{\vartheta}_{пер}$ (закон сложения скоростей)



Скорости спутника относительно точек на поверхности Земли:

$\vartheta_A' = \vartheta_A \cos i + \vartheta_З$

$\vartheta_B' = \vartheta_B + \vartheta_З \cos i$

Рассмотрим сначала более простой случай с круговой орбитой (т.е. $\vartheta_A = \vartheta_B$):

$\vartheta_A' = \vartheta \cos i + \vartheta_З$

$\vartheta_B' = \vartheta + \vartheta_З \cos i$

Если $i = 60°$:

$\vartheta_A' = 0{,}5\vartheta + \vartheta_З > 0$

$\vartheta_B' = \vartheta + 0{,}5\vartheta_З > 0$

$\vartheta_A', \vartheta_B'$ одного знака

$\left(\vartheta_З = \frac{2\pi \cdot R_З}{T_З}\right)$

Если $i = 120°$:

$\vartheta_A' = -0{,}5\vartheta + \vartheta_З$

$\vartheta_B' = \vartheta - 0{,}5\vartheta_З$

$\vartheta_A', \vartheta_B'$ могут быть разных знаков. Из-за этого на траектории могут образовываться петли. В нашем случае их нет.

Данное №1 и данное №86 соответствует широте спутника 0°. Спутник сделал полный оборот за эти 86 замеров данных. Заметим, что $\lambda_1 = 162°$, а $\lambda_{86} = -162°$. Значит, за ~~время~~ период спутника Земля повернулась на $162° + 162° = 324°$.

Земле такой поворот делает за время $T = \frac{324°}{360°} \cdot T_З = 21{,}6^h$

III закон Кеплера: $\frac{T^2}{a^3} = \frac{T_Л^3}{a_Л^3} \Rightarrow a = a_Л \sqrt[3]{\frac{T^2}{T_Л^2}} \approx \underline{39814 км}$

~~Большая полуось достаточно большая~~ В таком случае скорость спутника, движущегося по круговой орбите, была бы $\vartheta \approx 11581$ км/ч. Тогда если $i = 120°$, то ϑ_A' и ϑ_B' разных знаков. Значит, должны быть петли, но их у нас нет. Значит, $\underline{i = 60°}$

По рисунку можно увидеть, что точки расположены дальше друг от друга в центре картинки, у экватора, чем по краям картинки и у полюсов. Значит центр картинки соответствует наибольшей скорости спутника относительно точек на поверхности Земли.

Над экватором: $\vartheta_э = \vartheta_1 \cos 60° + \vartheta_з = 0,5\vartheta_1 + \vartheta_з$

В наивысшей над экватором точке: $\vartheta_i = \vartheta_з \cos 60° + \vartheta_{з2} = 0,5\vartheta_з + \vartheta_{з2}$

Можно понять, что наибольшая скорость относительно поверхности Земли будет тогда, когда спутник в перицентре своей орбиты. Наименьшая - в апоцентре.

Длина экватора $l_э = 2\pi R \approx \cancel{40 \cdot 10^3 км}$ 40030км

На картинке $\cancel{1см} \leftrightarrow$ 16,5см $\leftrightarrow$ соответствие $\cancel{40 \cdot 10^3 км}$ 40030км

1см $\leftrightarrow$ 2 426км

Наибольшее расст. между точками по Земле:

$l_{max} = \dfrac{2,7 см \cdot 2426 км}{3} = 2183,4 км$

За период спутника прошло 85 равных промежутков времени: $\Delta t = \dfrac{T}{85} = \dfrac{21,6^h}{85} \approx 0^h 15^m 15^s$

$\vartheta'_{max} = \dfrac{l_{max}}{\Delta t} \approx 8590,4 \frac{км}{ч}$

Это на экваторе: $\vartheta'_{max} = 0,5\vartheta_\pi + \vartheta_з$

$\vartheta_\pi = \dfrac{\vartheta'_{max} - \vartheta_з}{0,5} = \dfrac{\vartheta'_{max} - \frac{2\pi R_з}{T_з}}{0,5} = 13844,8 \frac{км}{ч}$

$\vartheta_\pi = \sqrt{\dfrac{GM_з}{a} \cdot \dfrac{1+e}{1-e}}$; $\vartheta_\pi^2 = \dfrac{GM_з}{a} \cdot \dfrac{1+e}{1-e}$; $\vartheta_\pi^2 a - \vartheta_\pi^2 a e = GM_з + GM_з e$

$e(GM_з + \vartheta_\pi^2 a) = \vartheta_\pi^2 a - GM_з \Rightarrow e = \dfrac{\vartheta_\pi^2 a - GM_з}{GM_з + \vartheta_\pi^2 a} \approx 0,19$

$\boxed{R_з = 6371 км}$

$r_\pi = a(1-e) \approx 32249 км$; $r_\alpha = a(1+e) \approx 47379 км$

$h_\pi = r_\pi - R_з = 25878 км$; $h_\alpha = r_\alpha - R_з = 41008 км$

Ответ: а) $i = 60°$; б) $a = 39814 км$; в) $h_\pi = 25878 км$; $h_\alpha = 41008 км$.

Задача №6.

Можно закрыть непрерывную часть солнечной батареи д ее края. например, половину от ее края белой поверхностью, например.
В таком случае при попадании света на закрытую часть будет $\Delta p_1 = 2m\vartheta_x$, а на открытую $\Delta p_2 = m\vartheta_x$. Тогда сила давления света:

$F_1 = \frac{\Delta p_1}{\Delta t} = \frac{2m\vartheta_x}{\Delta t}$
(частицы отскакивают)

$F_2 = \frac{\Delta p_2}{\Delta t} = \frac{m\vartheta_x}{\Delta t}$
(частицы поглощаются)

~~$ma = F_1 - F_2 =$~~

$F_1 - F_2 = \frac{m\vartheta_x}{\Delta t}$

Тогда появится неуравновешенный ~~вращательный~~ момент сил, который вызовет вращение.

Плюс к тому, вероятнее всего, двигатели работают как раз за счет солнечных батарей. Если закрыть половину из них – энергии будет в 2 раза меньше, а значит, мощность двигателей тоже уменьшится в 2 раза. Они уже не будут так сильно „сопротивляться" вращению.

Еще один вариант, если двигатели работают исключительно от солнечных батарей, – ~~закрыть батарею~~ перекрыть чем-либо свет на полоборота спутника. В таком случае он не будет вращаться эти полоборота (180°) из-за неработы двигателей. Когда он примет нужную ~~положение~~ ориентацию, двигатели как раз включатся. Можно запустить еще один спутник с ~~ее~~ чуть меньшей большой полуосью ~~или высокую и круг~~ ~~Но это сложно, и непонятно, что с ним делать потом. Или~~ или крупную и высокую баллистическую ракету.

Полностью закрыть ^сами^ пластины, т.е. покрыть их чем-то не выйдет, ведь тогда на них будет действовать сила давления света, а двигатели ей противостоять не будут.

Так что первый вариант кажется наиболее простым и подходящим.

Можно ~~опять~~ также придать импульс крылу, ~~но он~~