МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Космонавтика**

ФИО участника олимпиады: **Прохоров Павел Игоревич**

Класс: **9**

Технический балл: **93**

Дата проведения: **05 марта 2022 года**

шифр	1	2	3	4	5	6	тех.сумма	ИТОГ
9866299	10	10	8	20	20	20	88	93

① $f(t) + t\cdot f(1-t) = \dfrac{t+1}{t^2-t+1}$ $\qquad t^2-t+1 = \left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$

Чистовик	1

$$F(t) = \frac{t+1}{t^2-t+1} - t\cdot F(1-t)$$

$$f(1-t) = \frac{(1-t)+1}{\underbrace{(1-t)^2-(1-t)+1}_{1-2t+t^2-1+t+1}} - (1-t)\,f(1-(1-t)) = \frac{2-t}{t^2-t+1} - (1-t)\,f(t)$$

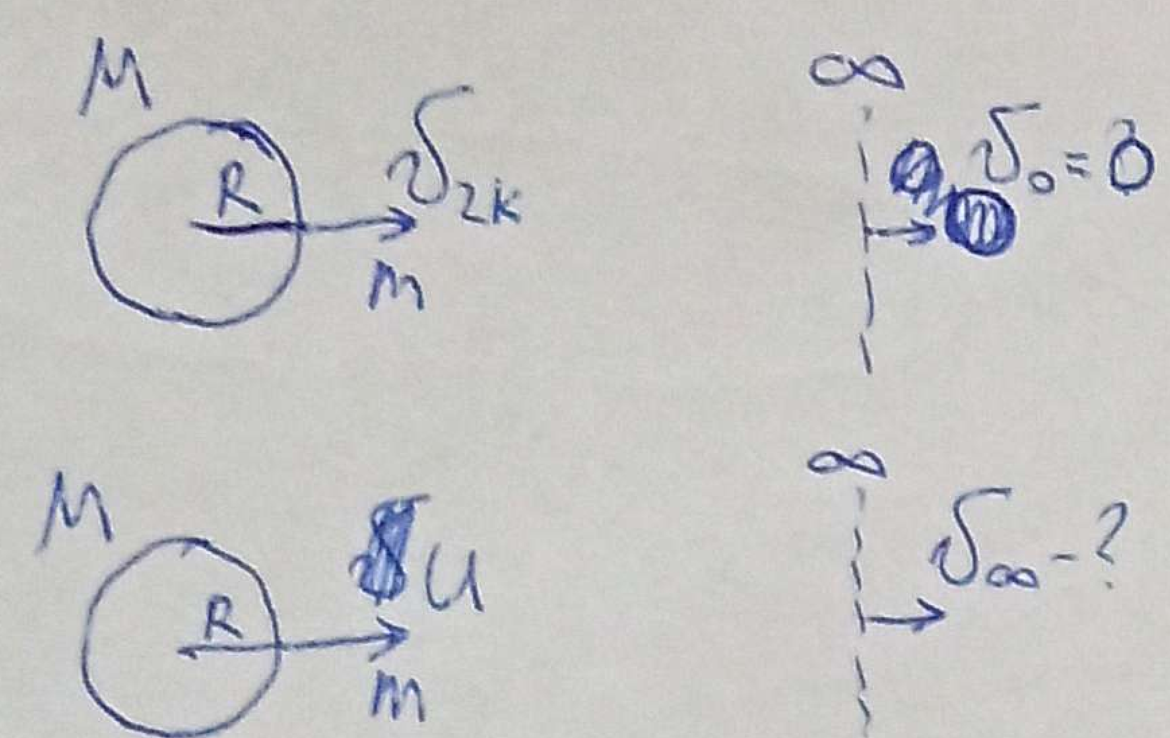
$$F(t) = \frac{t+1}{t^2-t+1} - t\cdot\left(\frac{2-t}{t^2-t+1} - (1-t)\,f(t)\right) = \frac{\overbrace{(t+1)}^{t+1} - \overbrace{t(2-t)}^{-2t+t^2}}{t^2-t+1} + t(1-t)\,f(t)$$

$$\underbrace{(1 - t(1-t))}_{1-t+t^2} f(t) = \frac{t^2-t+1}{\underbrace{t^2-t+1}_{>0}} = 1$$

$$f(t) = \frac{1}{t^2-t+1} \qquad F(5) = \frac{1}{5^2-5+1} = \frac{1}{21}$$

Ответ: $\frac{1}{21}$

②



ЗСЭ: потенциальная энергия поля притяжения

$$-G\frac{Mm}{R} + \frac{m\cdot\upsilon_{2k}^2}{2} = -G\underbrace{\frac{Mm}{R_\infty}}_{=0} + \underbrace{\frac{m\cdot\upsilon_0^2}{2}}_{=0} \quad \Big|\cdot\frac{2}{m}$$

$$\upsilon_{2k}^2 = 2G\frac{M}{R}$$

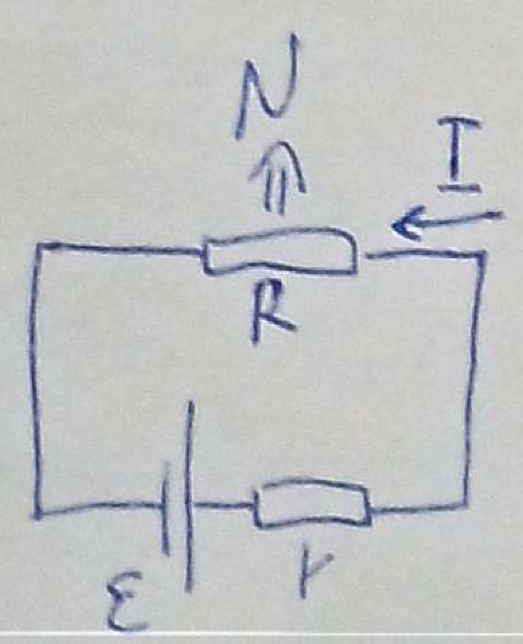
ЗСЭ: $$-G\frac{Mm}{R} + \frac{m\cdot u^2}{2} = -G\underbrace{\frac{Mm}{R_\infty}}_{=0} + \frac{m\,\upsilon_\infty^2}{2} \quad \Big|\cdot\frac{2}{m}$$

$$\upsilon_\infty^2 = u^2 - 2G\frac{M}{R} = u^2 - \upsilon_{2k}^2$$

$$\upsilon_\infty = \sqrt{u^2 - \upsilon_{2k}^2} = 4{,}84 \text{ км/с}$$

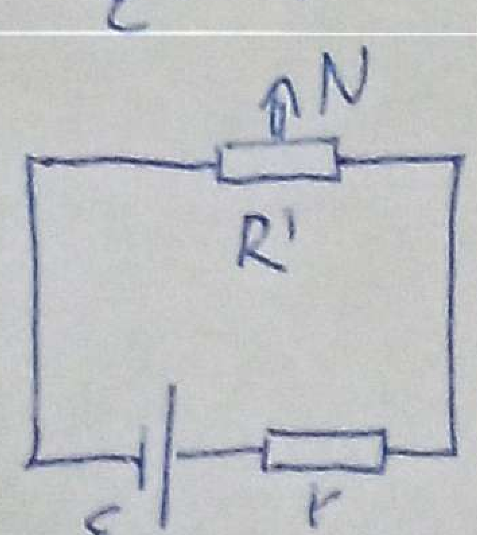
Ответ: 4,84 км/с

⑤



$$I = \frac{\varepsilon}{R+r} \qquad N = I^2R = \frac{\varepsilon^2}{(R+r)^2}R \qquad \frac{N}{\varepsilon^2} = \frac{R}{(R+r)^2}$$

$$I' = \frac{\varepsilon}{R'+r} \qquad N = I'^2R' = \frac{\varepsilon^2}{(R'+r)^2}R' \qquad \frac{N}{\varepsilon^2} = \frac{R'}{(R'+r)^2}$$



R, R' – корни уравнения $\dfrac{x}{(x+r)^2} = k$ $\qquad k = \dfrac{N}{\varepsilon^2} = \dfrac{R}{(R+r)^2}$

$$x = k(x+r)^2$$

$$kx^2 + (2kr-1)x + kr^2 = 0$$

$$R + R' = x_1 + x_2 = \frac{-(2kr-1)}{k} \quad \text{(по Т. Виета)}$$

$$R + R' = \frac{1}{k} - 2r = \frac{\varepsilon^2}{N} - 2r = \frac{(R+r)^2}{R} - 2r = \frac{R^2+r^2}{R}$$

$$R' = \frac{R^2+r^2}{R} - R = \frac{r^2}{R} < \frac{r^2}{r} = r \qquad (r<R)$$

$$N' = \varepsilon^2\cdot\frac{R'}{(R'+r)^2} = \varepsilon^2\cdot\frac{r^2/R}{\left(\frac{r^2}{R}+r\right)^2} = \varepsilon^2\cdot\frac{1/R}{\left(\frac{r}{R}+1\right)^2} = \varepsilon^2\cdot\frac{R}{(R+r)^2} \overset{\vee}{=} N$$

Ответ: можно: $R' = \dfrac{r^2}{R} < r$

③ Условие и второй пример противоречивы

Чистовик	2

Условие: Свет включается, если есть пара ~~??~~ выключателей, которая включена, и эти выключатели не являются соседями в ряду.

Пример: → 11100
← NO

В этом примере есть пара выключателей — 1-й и 3-й слева, которые включены, и эти выкл-ли не являются соседями в ряду. Свет должен включиться, но вывод в примере говорит обратное.

Поэтому приведу два решения - в зависимости от того, как понимать условие и правилен ли пример.

1) Условие включения света: существуют два выключателя, которые оба включены, и расстояние между ними больше 1 (они не соседние в ряду). Пример неверный.

Найдём положение (расстояние до левого края / индекс) ~~??~~ самого левого включённого выключателя и положение самого правого.

Если расстояние между ними (разность „положений") больше 1, то эти два выключателя подходят, ~~??~~ возвращаем "YES".

Иначе расстояние между любыми двумя включёнными выключ-и не больше расстояния между крайними, не больше 1, ~~??~~ искомой пары нет, возвращаем "NO".

2) Условие включения света: существует два включённых выключ., между которыми нет других включённых выключ., и они не являются соседними (расстояние между ними больше 1).

Пример → 11100 верен
← NO

Требуется найти такую конфигурацию: 1, затем несколько (>0) нулей, затем 1. Получится два включённых выключ., между которыми нет включённых и они не являются соседями.

Если найдётся единица, справа от которой (не обязательно вплотную рядом) есть 0, правее которого есть единица, то требуемая конфигурация существует - двигаемся из среднего нуля вправо-влево, ~~до единицы~~ пока не встретим единицы - а они обязательно встретятся, т.к. справа-слева от 0 точно есть хотя бы по одной единице.

Короче, ~~??~~ слева-направо ищем единицу, затем правее неё ищем 0, затем правее него ищем 1. Если всё нашли,

(продолжение)

выводим "YES", иначе - "NO".

Чистовик | 3

Реализация алгоритмов на Python 3.10:

1)

```
arr = list(map(int, input().split()))
i_left = -1
for i, a in enumerate(arr):
    if a:
        i_left = i
        break
i_right = -1
for i in range(len(arr)-1, -1, -1):
    if arr[i]:
        i_right = i
        break
~~if i_left == -1 or~~
if i_left != -1 and
    i_right - i_left > 1:
    print("YES")
else:
    print("NO")
```

2)

```
arr = list(map(int, input().split()))
found_1 = False
found_0 = False
for a in arr:
    if not found_1:
        if a:
            found_1 = True
        continue
    if not found_0:
        if not a:
            found_0 = True
        continue
    if a:  # found_1_right
        print("YES")
        break
else:
    print("NO")
```

4

Чистовик

(5) Во время пути XY космонавту потребуется пересечь хотя бы один из отрезков ломаной ~~..~~KLMN, так как она отрезает X ~~от~~ с параллелепипедом ABCDKLMN от поверхности остальной станции (c Y). Аналогично придется пересечь ломаную PQML (отрезает параллелепипед с Y).

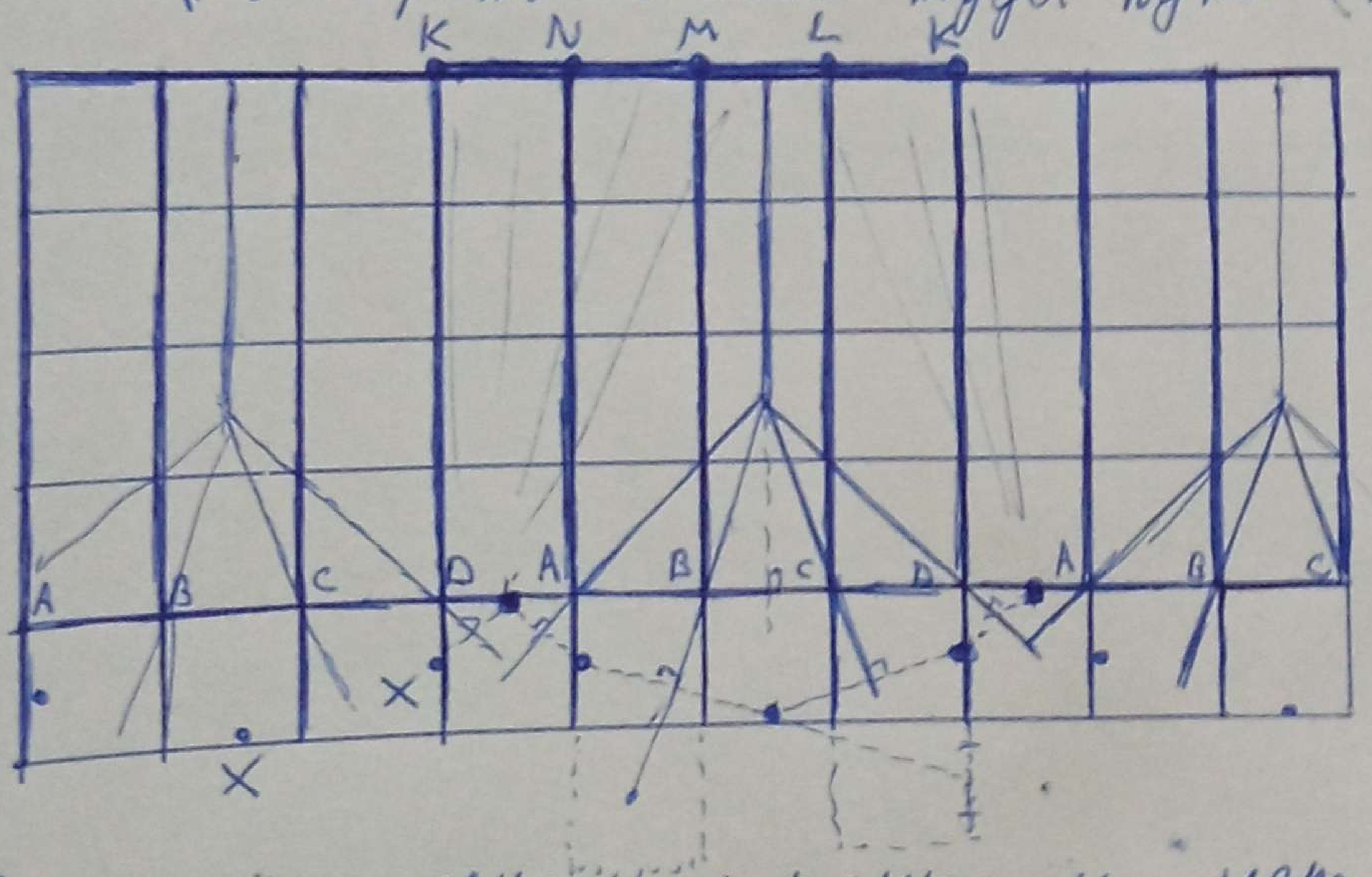
~~Построим кратчайшие пути~~

Тогда весь путь космонавта можно выразить так:

1) От X по парал-ду ABCDKLMN до точки V на KLMN
2) Затем от V до W (точки на PQML, возможно, совпадает с V)
3) От W по парал-ду EFGHPQLM до точки Y.

Минимизируем пути ① и ③.

Построим развёртку парал-да и всевозможные положения ~~..~~ квадратной стороны с X, ~~..~~ и все серединные перпендикуляры между положениями X – таким образом для каждой точки парал-да получится найти ближайшее к ней положение X, и кратчайший туда путь (~~прямая~~) (отрезок) до X)

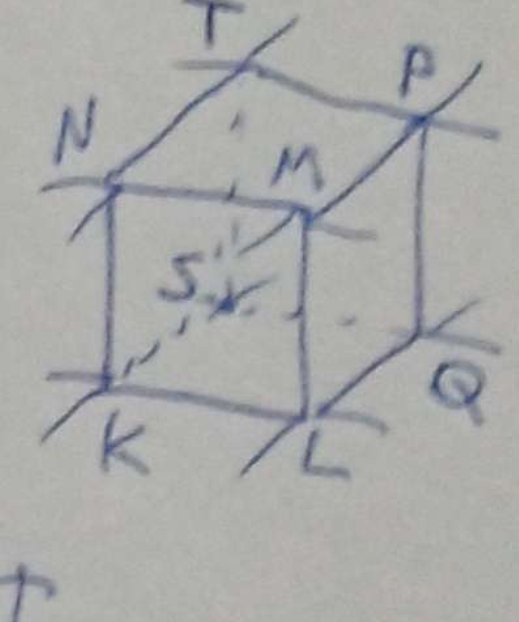


Видно, что до любой точки ломаной KLMN ~~..~~ путь от X самый короткий, если изначально двигаться по стороне ADKN.

C Y всё аналогично – короче всего путь ~~по~~ начиная с PQGF.

Я нашёл другое решение, но нет времени переписывать, воспользуюсь тем, что уже есть:

Аналогично ~~началу~~ ~~..~~ ломаная ML~~T~~ST разрезает ~~..~~ поверхность станции на две симметричные относительно её плоскости части. Тогда путь выглядит так:



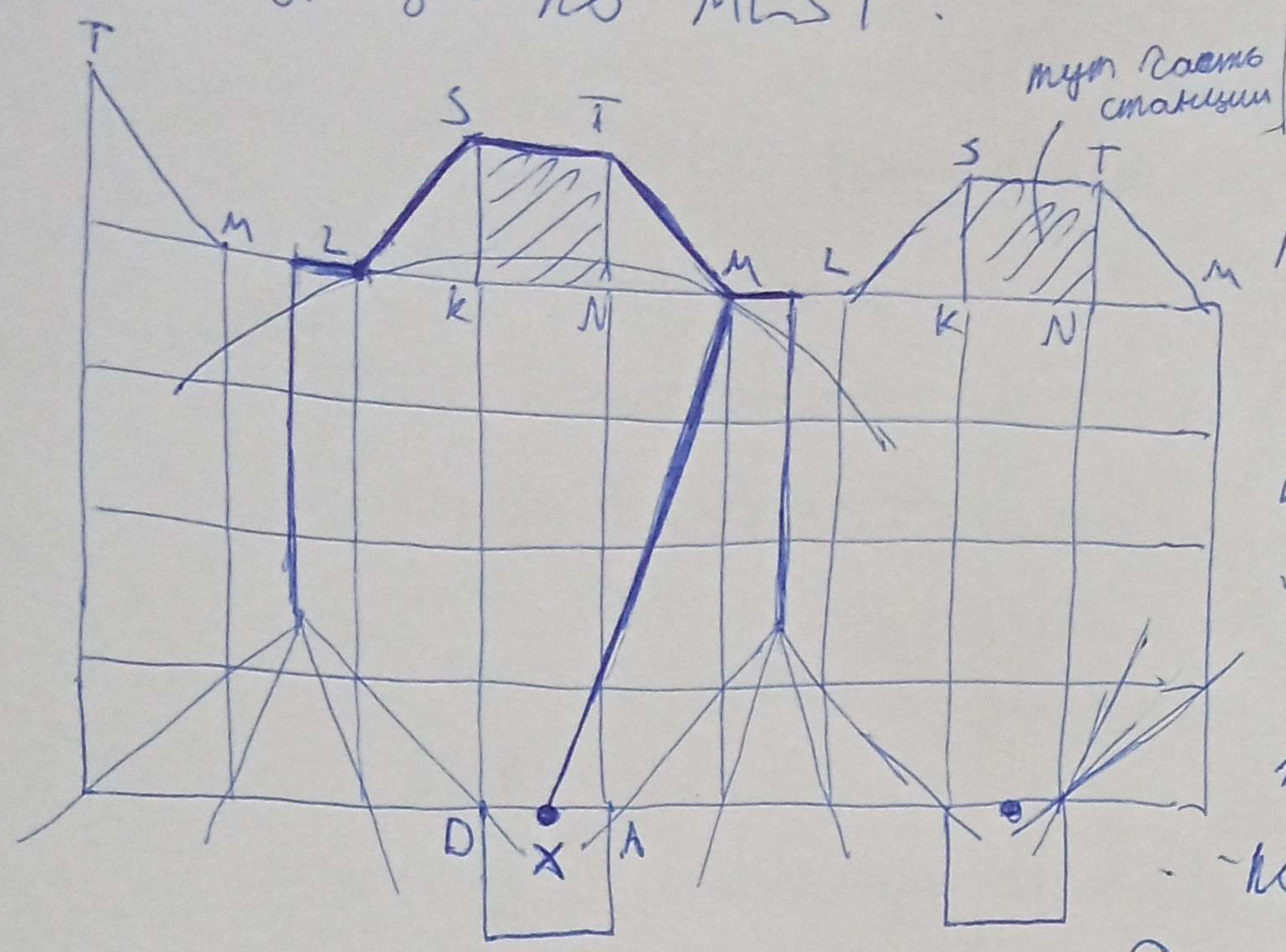
Кратчайший путь от X до V на ломаной MLST

Такой же кратчайший путь от V до Y.
симметричный

5

Чистовик

Вновь нарисуем развёртку параллелепипеда, только теперь вместе с частью центра станции до разреза по MLST:



Как уже доказано ранее, от дальних точек параллелепипеда ~~ближайшей точкой~~ кратчайшим путём является путь через ADKN. Найдём ближайшую к этому положению X точку.

Это точки M и L.

Возьмём M.

$V = M$.

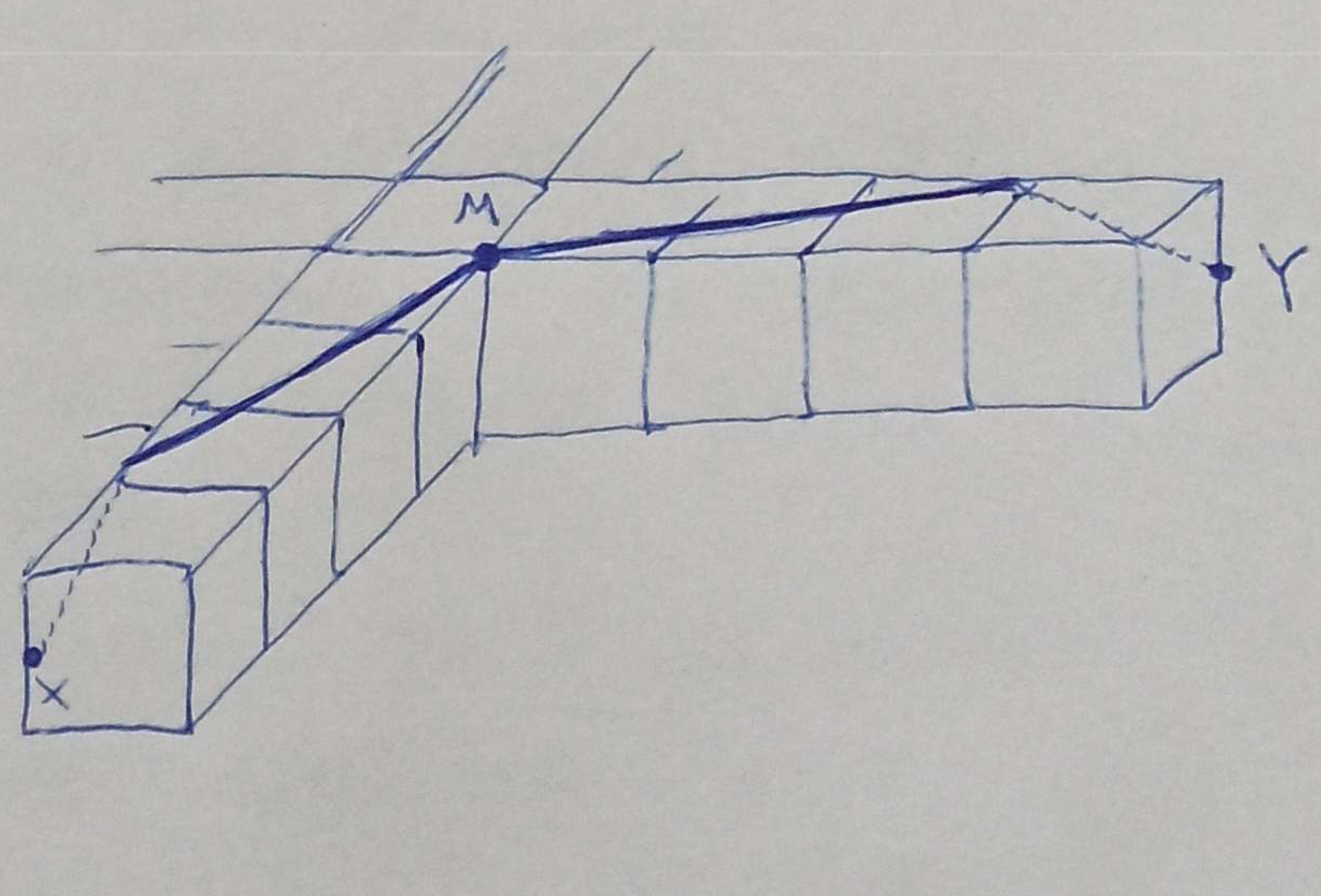
$$XM_{кратч} = \sqrt{1{,}5^2 + 4^2} = \frac{1}{2}\sqrt{73}$$

$3^2 + 8^2$

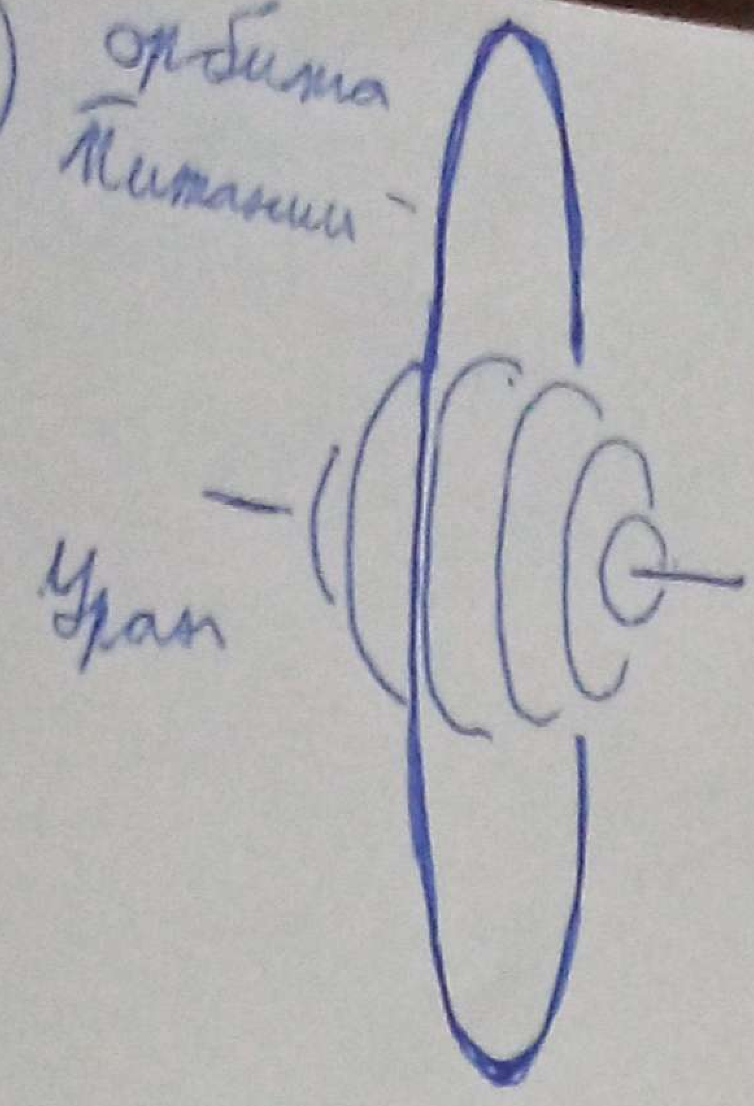
$$MY_{кратч} = XM_{кратч} = \frac{1}{2}\sqrt{73}$$

$$XY_{кратч} = XM_{кратч} + MY_{кратч} = \sqrt{73} \approx 8{,}54$$

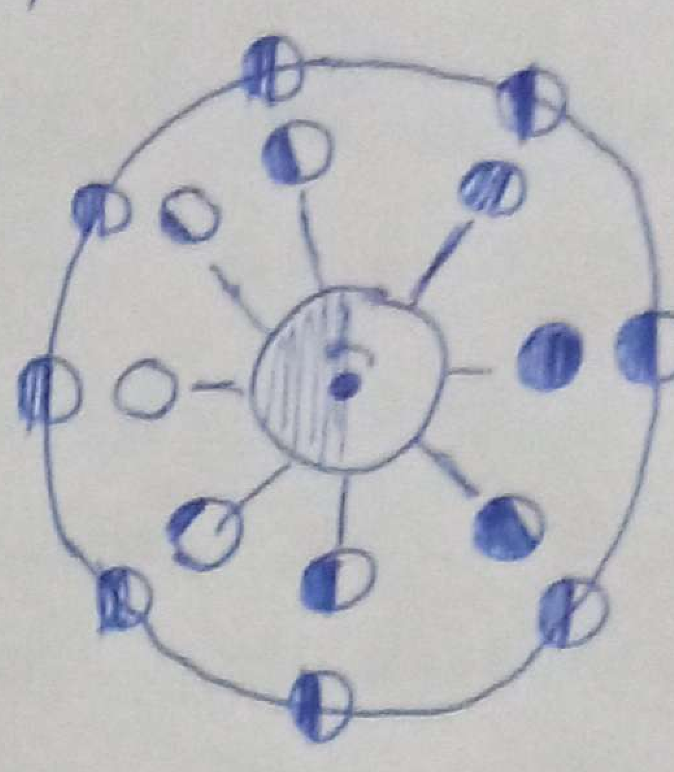
Ответ: ~~путь~~ путь длиной $\sqrt{73} \approx 8{,}54$:

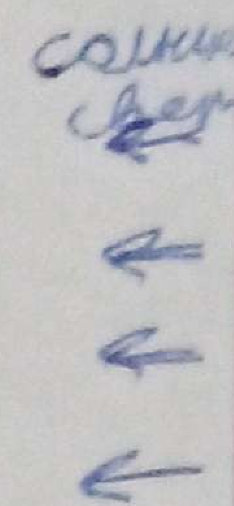


(6)

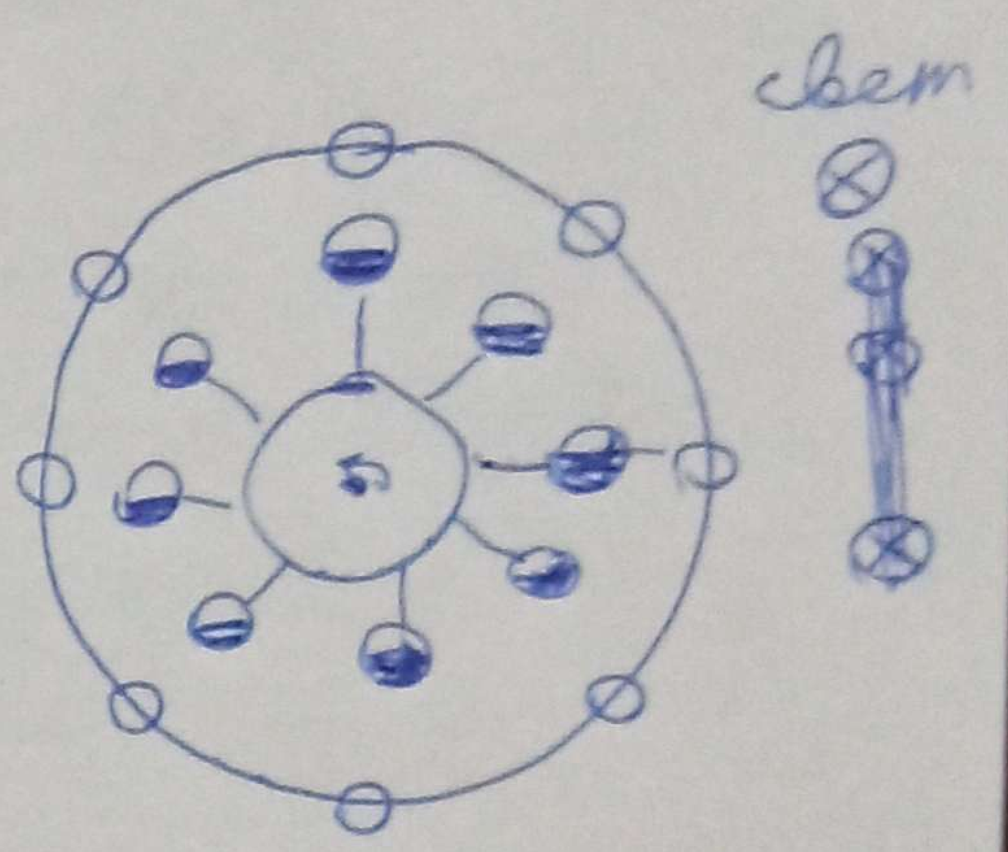


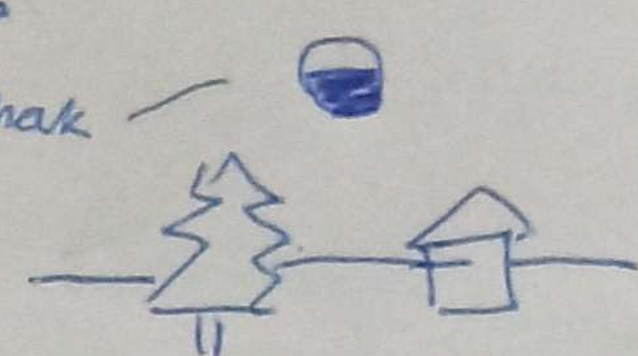
Когда Уран находится в такой точке своей орбиты, что Солнце находится в плоскости его экватора, жители Урана могут наблюдать все фазы Титании, от ~~но~~ 0 до 1, (как Луну с Земли).



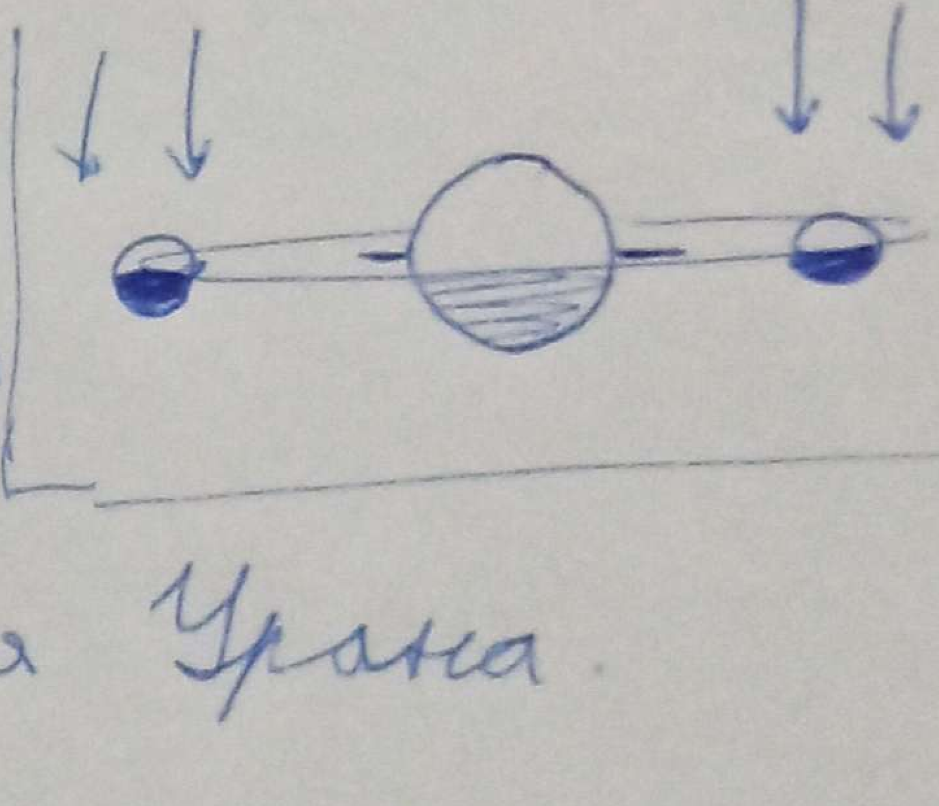


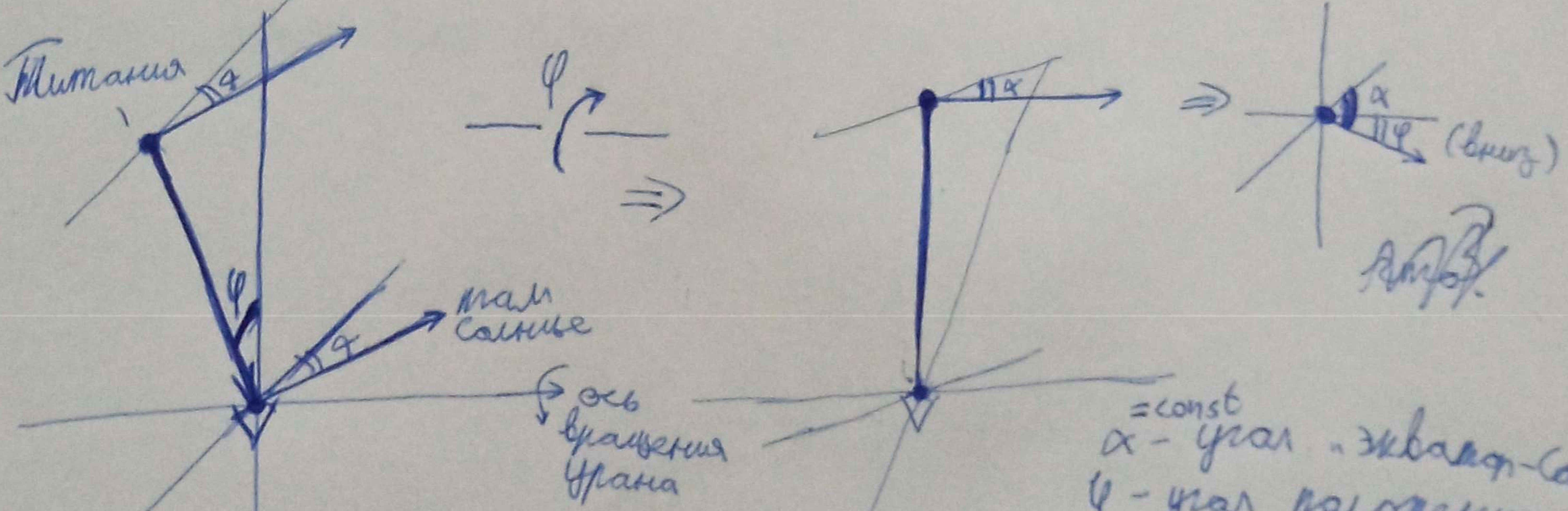
Когда же ~~солнц~~ Ось вращения урана направлена на Солнце, то Титания на протяжении всего витка в фазе $\frac{1}{2}$, причём направленной "вверх":





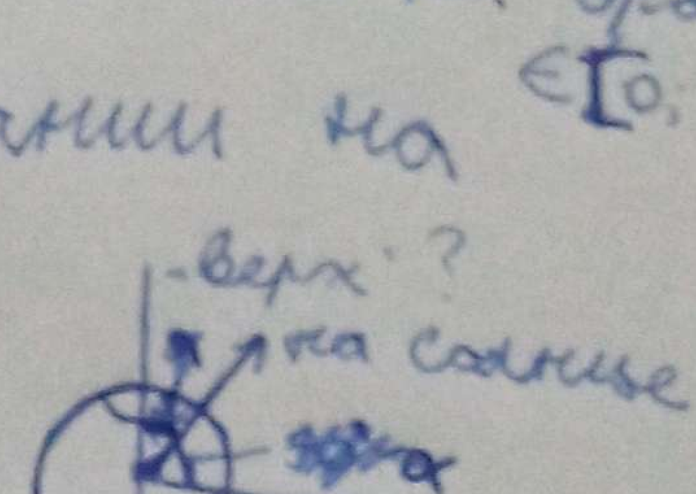
(*) Продолжительность года Урана >> ~~продолжительность~~ период вращения Титании по орбите, поэтому за время одного витка Титании Солнце остаётся примерно в одном направлении относительно оси вращения Урана.





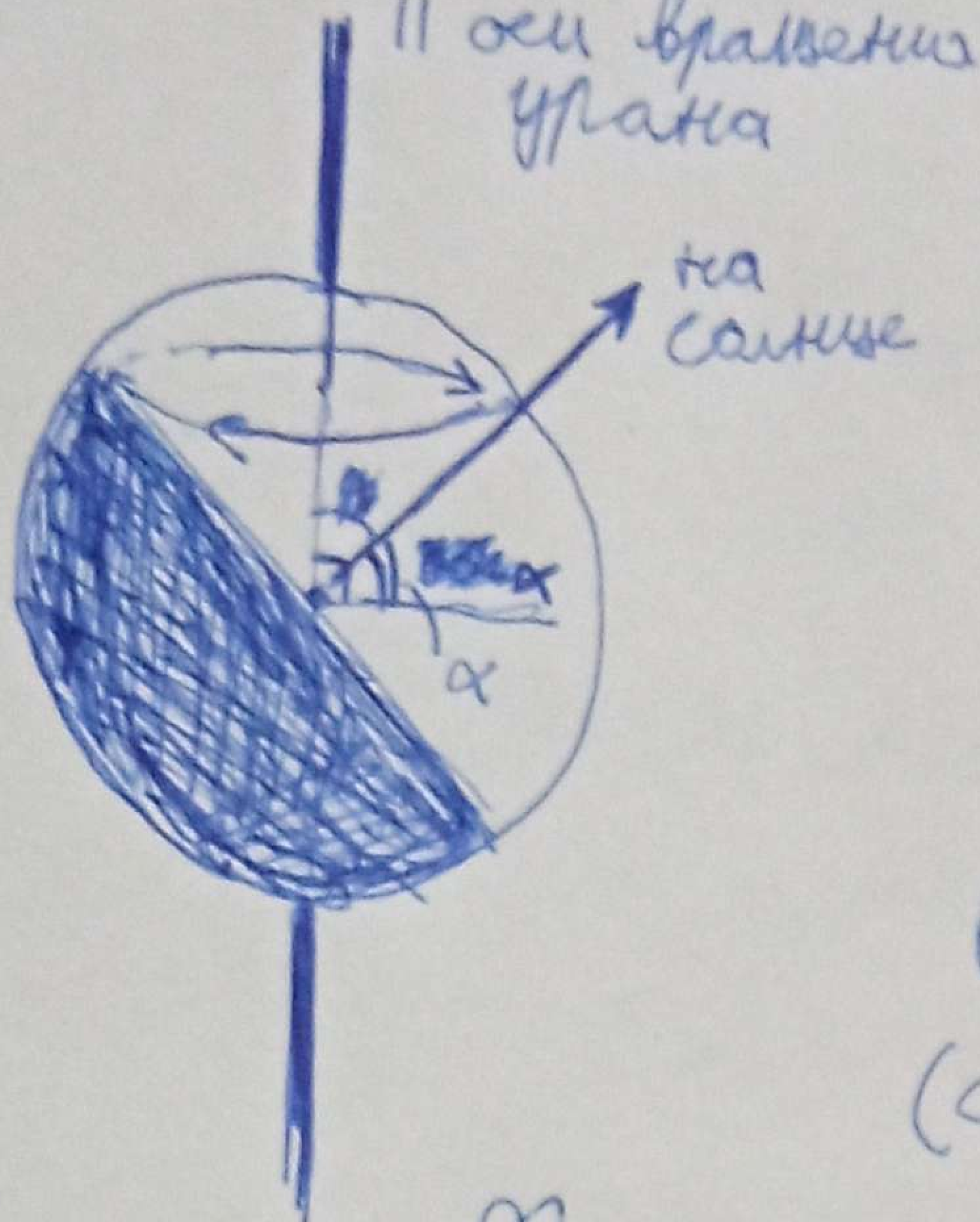
α – угол "экватор-Солнце" $=const$
φ – угол положения Титании на орбите $\in[0; 360°)$

Рассмотрим вектор направления от Титании на Солнце (центр освещённой части).



Два ломающих мозг построения спустя:
(я не знаю, как эти действия описать)

Во время вращения Титании вокруг Урана ~~Отн~~ её направление на Солнце относительно наблюдателя на Уране движется так:



Вектор направления на Солнце отстоит от положения, параллельного оси вращения Урана, на $90° - \alpha$ (α – угол „Солнце – экватор Урана") и вращается вокруг него соответственно вращению Титании вокруг Урана (с такой же ~~скоро~~ угловой скоростью).

Фаза изменяется в соответствии с вектором направления ((скалярное произведение с направлением Титания–Уран) $\cdot \frac{1}{2} + 0{,}5$)