МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Акулов Артём Олегович**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **100**

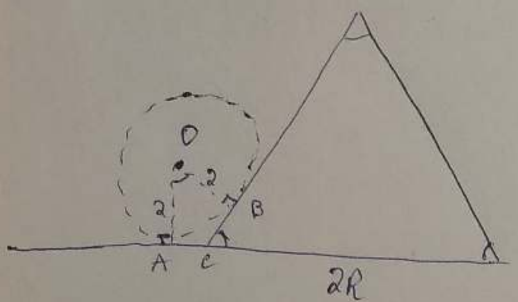
Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	15	15	15	10

Чистовик (2/6)

4) Поскольку угол при осевом сечении конуса при вершине $60°$, то в сечении равносторонний треугольник.



Четырёхугольник $OACB$ вписанный $\Rightarrow$ $OA = OB = 2$

$\angle AOB = 60° \Rightarrow \angle AOC = 30° \Rightarrow AC = \frac{2}{\sqrt{3}}$

Проекция конуса и отрезков, соединяющих центры соседних шаров на плоскость основания — окружность радиуса $R + AC = R + \frac{2}{\sqrt{3}}$ с вписанным 17-угольником со стороной 4. По т. синусов $\frac{4}{\sin\alpha} = 2R + \frac{4}{\sqrt{3}}$, где $\alpha = \frac{\pi}{17}$

Значит, $R = 2\left(\frac{1}{\sin\frac{\pi}{17}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Ответ: $2\left(\frac{1}{\sin\frac{\pi}{17}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

5) Заметим корни функций: для a это $t = 0; \pm 12$, для b это $8 = t$; для c это $t = \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$

~~Чтобы среднее число было положительным, необходимо~~

~~$a \cdot b \cdot c$~~ При этом 8 лежит на промежутке $\left(\frac{7\pi}{3}; \frac{8\pi}{3}\right)$, а 12 на промежутке $\left(\frac{8\pi}{3}; \frac{13\pi}{3}\right)$. Итак

(-12 на $\left(-\frac{16\pi}{3}; -\frac{11\pi}{3}\right)$)

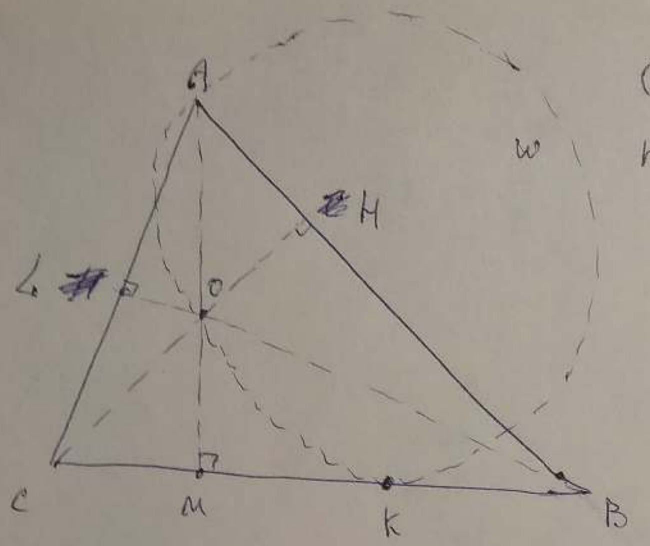
При $t \leq 12$ a и b неположительные, при $t \in (-12; 0]$ $(a>0, b<0)$ средним числом будет синус, >0 на $\left(-\frac{11\pi}{3}; -\frac{10\pi}{3}\right)$; $\left(-\frac{5\pi}{3}; -\frac{4\pi}{3}\right)$

При $t \in [0; 8]$ два числа (a и b) <0. При $t \in \left(8; \frac{8\pi}{3}\right)$ положительны b и c, при $t \in \left[\frac{8\pi}{3}; 12\right]$ a и c неположительны, при $t > 12$ a и b положительны. Значит, $t \in \left(-\frac{11\pi}{3}; -\frac{10\pi}{3}\right) \cup \left(-\frac{5\pi}{3}; -\frac{4\pi}{3}\right) \cup \left(8; \frac{8\pi}{3}\right) \cup (12; \infty)$.

* a ведёт себя знакопеременно, b — монотонно возрастает.
(т.е. меняют знак с $-$ на $+$ в корнях)

(для выполнения условия достаточно двух положит. чисел)

7)



Чистовик (4/6)

Введём обозначения как на рисунке.

Точка K – ничто иное как точка касания окружности, проходящей через A и O и касающейся BC, поскольку если ~~то~~ окр., проходящая через A и O будет пересекать BC, то внутри этого отрезка пересечения все углы AKO (K-точки на отрезке) будут больше углов AZO (Z-точка пересечения) (просто потому что захватывают дугу $\overset{\frown}{AO}$ и ещё что-то).

Также, такая окружность (кас. BC) единственна с центром в правой полуплоскости от AO (т.к. можно этот центр двигать по сер.-пер-у к AO и радиус будет монотонно изменятся)

По св-у касат. и секущей (для ω) $MK^2 = MO \cdot MA$

Из окружностей (AHMC), (ALMB), (CLHB) имеем

$AO \cdot OM = CO \cdot OH = BO \cdot OL$. Также из окружности ~~(LOMC)~~ (HOMB) имеем $CO \cdot CH = CM \cdot CB = 3 \cdot 8 = 24$

$CH = CO + OH \Rightarrow CO^2 + CO \cdot OH = 24$. Но $CO^2 = CM^2 + OM^2 = 9 + OM^2$

Итак, $9 + OM^2 + AO \cdot OM = 24 \Rightarrow OM(\underbrace{OM + AO}_{AM}) = 15$

Значит, $MK^2 = 15 \Rightarrow MK = \sqrt{15}$

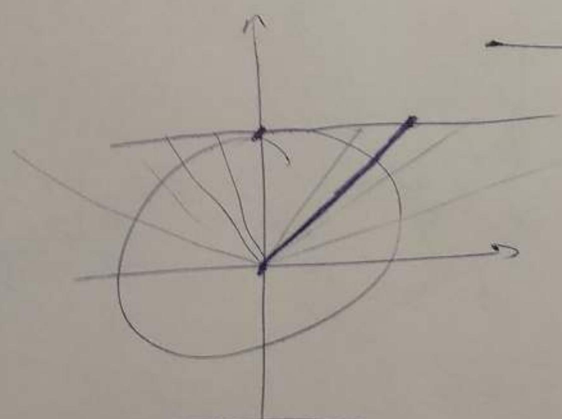
Черновик (5/6)

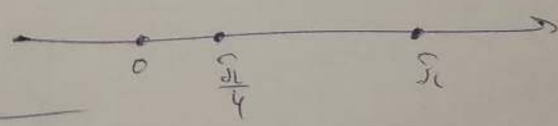
$a\cdot ctg^3x - a\cdot ctg^2x \quad + (2a^2-2)ctg^2x - (2a^2-2)ctg\,x - 4a(ctg\,x-1) = 0$

$a\,ctg^2x(ctg\,x-1) \qquad (2a^2-2)ctg\,x(ctg\,x-1) - \cancel{4a}$

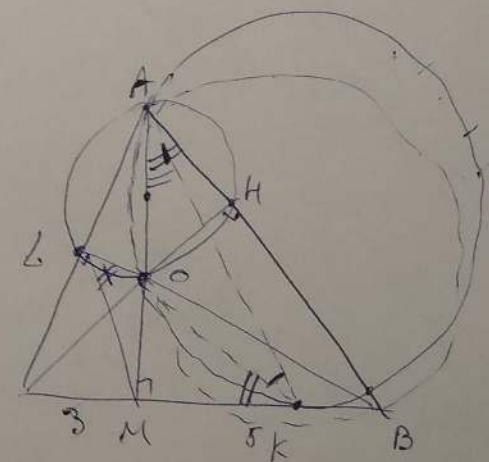
$(ctg\,x-1)(a\,ctg^2x + \cancel{2a}\ 2(a-1)(a+1)\,ctg\,x - 4a) = 0$

$y_1 = \dfrac{-a^2+1 \pm \sqrt{(a^2-1)^2+4a^2}}{a}$





$ctg\,x = -a^2+1 \pm \underbrace{\sqrt{a^4+2a^2+1}}\ a^2+1$



$MO\cdot OA = CO\cdot OH = BO\cdot OL$

$5\cdot 8 = BH\cdot BA = BO\cdot BL$

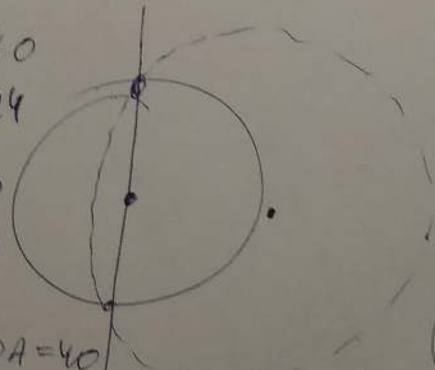
$MK^2 = MO\cdot MA$

$BO\cdot BL = 40$

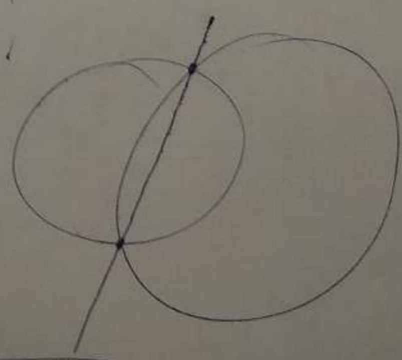
$CO\cdot CH = 24$

$BO^2 + OL\cdot BO = 40$

$CO^2 + CO\cdot OH = 24$



$MO^2 + 3^2\ 25 + MO\cdot OA = 40$



$MO^2 + MO\cdot OA - 15 = 0$

$MO = \dfrac{-OA \pm \sqrt{OA^2+60}}{2}$

$MO = \dfrac{\sqrt{OA^2+60} - OA}{2}$

$MO(MO+OA) = \cancel{4}\ 15$

Черновик
(5/6)

19, 38, 57, 76, 95

23, 46, 69, 92

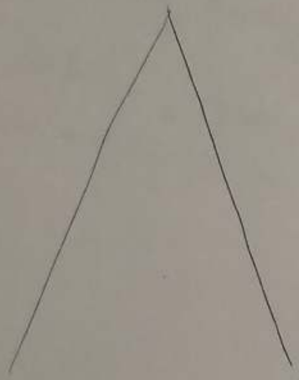
469^{5769}_{238}

$$f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-\frac{1}{1-x^7}}} = \frac{\sqrt[7]{1-x^7}}{\sqrt[7]{1-x^7-1}} = \frac{\sqrt[7]{1-x^7}}{-x}$$

$\min(\max(x_1-x_2))$

$x_1, x_2 \in (0;\pi)$

$$f(f(f(x))) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-\frac{1-x^7}{-x^7}}} = \frac{-x}{\sqrt[7]{-x^7-1+x^7}} = x$$



$a=0$

$2a$

$-2ctg^2x + 2ctgx \ne 0$

$ctgx(1-ctgx)=0$

$f(f$

$-2(-1+2a+a^2)$

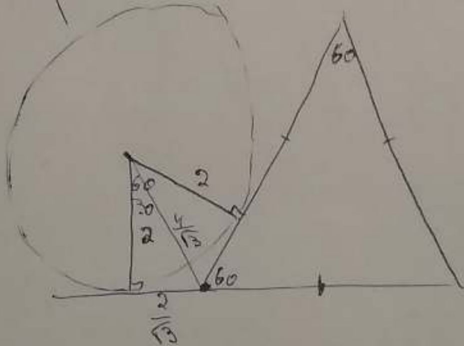
$\frac{D}{4} = \cancel{2}\ \ 1+1$

$a = -1 \pm \sqrt{2}$

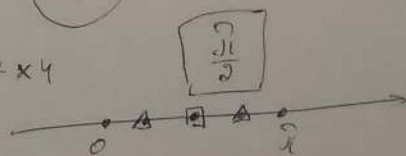
$\underbrace{x = \frac{\pi}{2}+\pi k}$

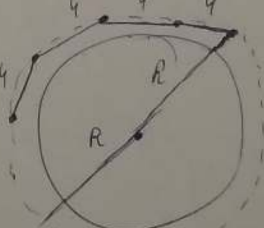
$\underbrace{x = \frac{\pi}{4}+\pi k}$

$-2(a+1+\sqrt{2})(a+1-\sqrt{2})$



17×4





$$\frac{4}{\sin\alpha} = 2R + \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$\alpha = \frac{\pi}{17}$

$$R = \cancel{\tfrac{4}{2}}\,2\left(\frac{1}{\sin\frac{\pi}{17}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$3t^2 - 144$

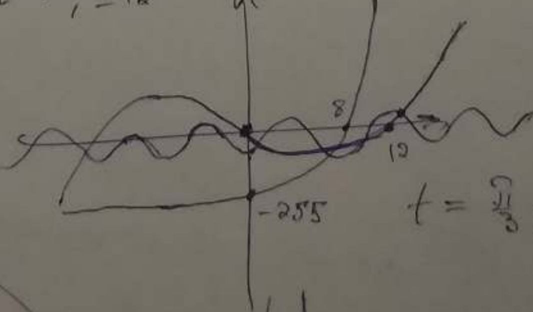
$t = 12$

2

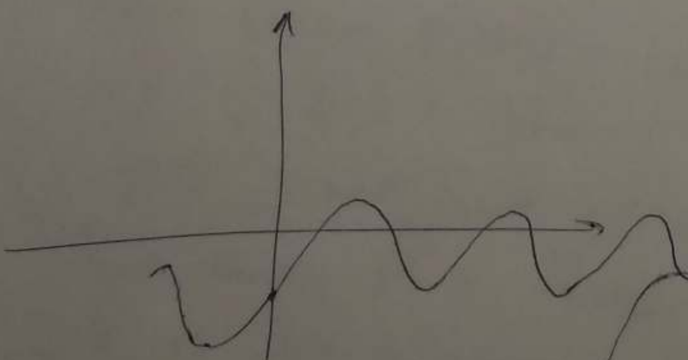
$144 \cdot 12 - 144 \cdot 12$

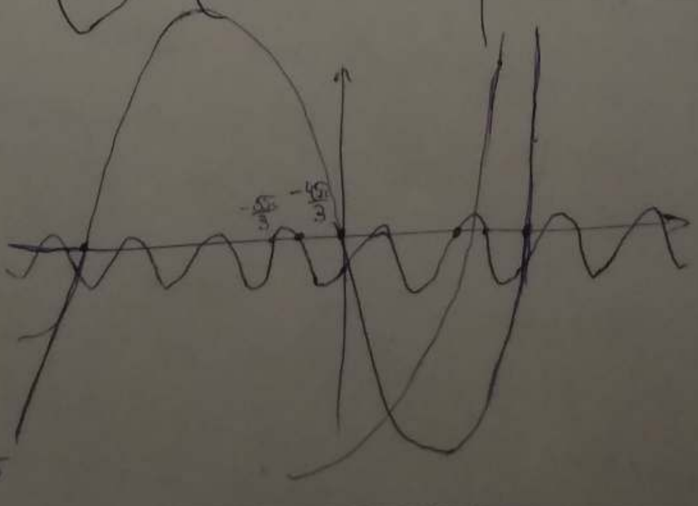
$t(t^2-144)$

$t = 0; \pm 12$



$t = \frac{\pi}{3};\ \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$





$-\frac{11 \cdot 3,15}{3} =$

$+$

$-11 \cdot 1,05 =$

$= -11,55$

Чистовик (1/6)

1) $A = \frac{\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{3}}\,\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = 1$

$B = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \ldots + \frac{117}{(58\cdot 59)^2} + \frac{119}{(59\cdot 60)^2} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{58^2} - \frac{1}{59^2} +$
$+ \frac{1}{59^2} - \frac{1}{60^2} = 1 - \frac{1}{60^2} = \frac{3599}{3600}$. Т.к. $1 > \frac{3599}{3600}$, A больше B

Ответ: $A > B$

$\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{(a+1)^2} = \frac{(a+1)^2 - a^2}{(a(a+1))^2} = \frac{2a+1}{(a(a+1))^2} \right)$

2) Двузначные числа, $\vdots 19$: 19, 38, 57, 76, 95
$\vdots 23$: 23, 46, 69, 92 (*)

Поскольку число начинается на 4, то далее можно продолжить только таким способом:

~~469~~ $469\,{}^{5769\ldots}_{238}$ Т.к. нет числа из (*), начинающегося на 8, ~~единственное~~ возможное число:

$469\underbrace{5769}\underbrace{5769}\ldots$ Т.к. $2022 \equiv 2 \pmod 4$ В конце будут 3 цифры из четвёрки, т.е. возможны 2 окончания:

$\ldots\underbrace{5769}238$ или $\underbrace{5769}576$.

Ответ: 8 или 6

3) $f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt[7]{1 - \frac{1}{1-x^7}}} = \frac{\sqrt[7]{1-x^7}}{\sqrt[7]{1-x^7-1}} = \frac{\sqrt[7]{1-x^7}}{\sqrt[7]{-x^7}} = \frac{\sqrt[7]{1-x^7}}{-x}$

$f(f(f(x))) = \frac{1}{\sqrt[7]{1 - \frac{1-x^7}{-x^7}}} = \frac{\sqrt[7]{-x^7}}{\sqrt[7]{-x^7 - 1 + x^7}} = x$

Итак, после трёхкратного применения мы зацикливаемся.

Т.к. $1304 \equiv 2 \pmod 3$, то искомое выражение

$\frac{\sqrt[7]{1-2022^7}}{-2022} = \frac{\sqrt[7]{2022^7-1}}{2022}$

6) Заметим, что $ctg\,x = 1$ — корень при любом a. Чистовик (3/~~6~~)

Значит $(ctg\,x - 1)(a\,ctg^2 x + 2(a^2-1)\,ctg\,x - 4a) = 0$

$x = \frac{\pi}{4} + \pi k$

~~Т. е. как минимум расстояние $\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ обеспечено.~~

Если у квадратного уравнения есть корень, то корень$_{(x)}$ на отрезке $(0;\pi)$ точно есть. При $a=0$ $ctg\,x = 0$ и $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, т.е. расстояние $\frac{\pi}{4}$. ~~Видимо, условие подразумевает наличие у квадр. ур. ≥ 1 корня, иначе можно взять a, при которых у него корней нет, и сказать, что расстояние 0. (при $(a^2-1$~~

$$\frac{D}{4} = (a^2-1)^2 + 4a^2 > 0$$

$$a^4 - 2a^2 + 1 + 4a^2 = (a^2+1)^2$$

$$ctg\,x = \frac{1-a^2 \pm (a^2+1)}{a} = \frac{2}{a};\ -\frac{2a^2}{a} = -2a$$

Один из корней точно <0, поэтому найдётся корень$_{(x)}$ $> \frac{\pi}{2}$, т.е. расстояние будет $> \frac{\pi}{4}$.

Значит, при $a=0$ и только при нём расстояние минимально и равно $\frac{\pi}{4}$.