



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

**ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА**

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Андрианова Анастасия Михайловна**

Класс: **8 класс**

Технический балл: **65**

Дата проведения: **12 марта 2022 г.**

**Результаты проверки:**

№	1	2	3	4	5	6
Оценка	15	15	0	15	20	0

Задача 1:

Пусть италий A пошел  $a$  кг, италий B -  $b$  кг,  
 $Q$  италий B -  $c$  кг

Тогда по условию

$$\begin{cases} a+b=220 \\ a+c=240 \\ b+c=250 \end{cases} \quad \begin{cases} 2(a+b+c)=710 \\ a+b+c=355 \\ a=a+b+c-(b+c)=105 \\ b=a+b+c-(a+c)=115 \\ c=a+b+c-(a+b)=135 \end{cases}$$

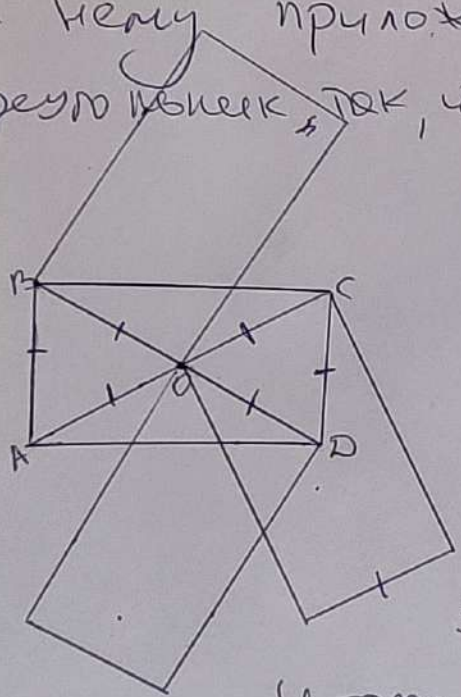
~~$c > a > b$~~   
 $c > b > a$

Значит, победил италий B, а он пошел вес 135 кг

Ответ: 135 кг

Задача 3:

Возьмём прямоугольный треугольник с углом  $30^\circ$  и к нему приложим еще один такой же прямоугольный треугольник так, чтобы получился прямоугольник:



В этом прямоугольнике ABCD мы проводим диагонали  $\angle BAC = 60^\circ$ , поэтому  $\triangle BOA$  - равносторонний Аналогично  $\triangle COD$  - равносторонний (В прямоугольнике диагонали точкой пересечения делятся на 4 равных отрезка)

И теперь мы как на рисунке строим 3 прямоугольника, равных первому

И тогда у каждого двух прямоугольников равны одна сторона точка и нет общей вершины для всех

Задача 4:

$$x_1 = 1 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = -1$$

$$x_4 = x_1 \cdot x_3 = -1; \quad x_5 = x_4 \cdot x_2 = -1 \quad x_6 = x_5 \cdot x_3 = 1 \quad x_7 = x_6 \cdot x_4 = -1 \quad x_8 = x_7 \cdot x_5 = 1$$

$$x_9 = x_8 \cdot x_6 = 1 \quad x_{10} = x_9 \cdot x_7 = -1 \quad x_{11} = x_{10} \cdot x_8 = -1 \quad x_{12} = x_{11} \cdot x_9 = -1 \quad x_{13} = x_{12} \cdot x_{10} = 1$$

$$x_{14} = x_{13} \cdot x_{11} = -1 \quad x_{15} = x_{14} \cdot x_{12} = 1 \quad x_{16} = x_{15} \cdot x_{13} = 1 \quad x_{17} = x_{16} \cdot x_{14} = -1$$

Выпишем все полученные значения в последовательность

$$\underbrace{1 \ 1 \ -1 \ -1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ 1 \ -1 \ -1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ 1 \ -1}$$

Каждая следующая семерка чисел полностью определяется предыдущей семеркой чисел. Теперь заметим, что вторая семерка чисел совпадает с третьей. Значит, в этой последовательности каждая семерка чисел будет

иметь вид

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & \\ \hline x_{7i+1} & x_{7i+2} & x_{7i+3} & x_{7i+4} & x_{7i+5} & x_{7i+6} & x_{7i+7} & \end{array}$$

Тогда

$$\begin{array}{r} 2022 \\ -14 \\ \hline 62 \\ -56 \\ \hline 62 \\ -56 \\ \hline 6 \text{ - остаток} \end{array}$$

Значит,  $x_{2022} = x_{7 \cdot 288 + 6} = 1$

Ответ:  $x_{2022} = 1$ .



Задача 5:

$$(\overline{ab+bc})(\overline{bc+cd})(\overline{cd+de}) = 157605$$

$$(10a+11b+c)(10b+11c+d)(10c+11d+e) = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 79$$

$ab \leq 99$  и  $bc \leq 99$ , значит  $ab+bc \leq 198$ .

Иногда рассматривают все варианты, чему может равняться каждая из скобок:  $10a+11b+c$ ,  $10b+11c+d$ ,  $10c+11d+e$

Иногда огно из скобок

$78 =$	$10a+11b+c$ $a \neq 0$	$10b+11c+d$ $b \neq 0$	$10c+11d+e$ $c \neq 0$
$7 \cdot 11 + 0 \cdot 10 + 2$	$y \geq 93 \ z \geq 30$ $xyz > 157605$	$z \geq 93 \ x \geq 17$	
$6 \cdot 11 + 1 \cdot 10 + 3$	$y \geq 94 \ z \geq 40$ $xyz > 157605$	$z \geq 94 \ x \geq 27$ $xyz > 200000$	
$5 \cdot 11 + 2 \cdot 10 + 4$	$y \geq 95 \ z \geq 50$ $xyz > 157605$	и т.д.	
$4 \cdot 11 + 3 \cdot 10 + 5$	$y \geq 96 \ z \geq 60$ $xyz > 157605$	$xyz$ дыжет	
$3 \cdot 11 + 4 \cdot 10 + 6$	$y \geq 97 \ z \geq 70$ $xyz > 157605$	только	
$2 \cdot 11 + 5 \cdot 10 + 7$	$y \geq 98 \ z \geq 80$ $xyz > 157605$	убегает	
$1 \cdot 11 + 6 \cdot 10 + 8$	$y \geq 99 \ z \geq 90$ $xyz > 157605$		
$0 \cdot 11 + 7 \cdot 10 + 9$			

равно 78, т.к.  $78 \cdot 3 > 198$ ,  $78 \cdot 5 > 198$  и т.д.

Если  $b=1 \ c=6 \ d=3$   
 $(10a+11b+c)(10c+11d+e) = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19$

$(17+10a)(93+e) = 95 \cdot 21$   
 или  
 $(17+10a)(93+e) = 133 \cdot 35$

оба варианта не подходят, в остальных вариантах либо огно не целое число больше 93, либо не целое больше 17.

- 1)  $c=0 \ d=7 \ e=2$   $c=0$  - не годит т.к.  $c \neq 0$   $a < 0$  - не годит
- 2)  $c=1 \ d=6 \ e=3$   $10b+11c+d = 7 \ b=4$   $10a+11b+c = 35$
- 3)  $c=2 \ d=5 \ e=4$   $10b+11c+d = 7 \ b=3$   $10a+11b+c = 35$
- 4)  $c=3 \ d=4 \ e=5$   $10b+11c+d = 7 \ b=2$   $10a+11b+c = 35$   $a=1$
- 5)  $c=4 \ d=3 \ e=6$   $10b+11c+d = 7 \ b=1$   $10a+11b+c = 35$   $a=2$
- 6)  $c=5 \ d=2 \ e=7$   $10b+11c+d \geq 57$   $10b+11c+d = 57$   $b=0$  - не годит
- 7)  $c=6 \ d=1 \ e=8$   $10b+11c+d \geq 67$  - так не годит
- 8)  $c=7 \ d=0 \ e=9$   $10b+11c+d \geq 77$   $10b+11c+d = 77$  - так не годит

- \*  $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 = 1) 95 \cdot 21$
- 2)  $133 \cdot 35$
- 3)  $19 \cdot 105$
- 4)  $57 \cdot 35$

В итоге у нас получилось 2 варианта  $12345 = abcde$  и  $21436 = abcde$   
 Ответ:  $abcde = 12345$  или  $abcde = 21436$

Задача 2:

Числовик

Страница 4

$$\frac{1}{2022} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}; \quad \frac{1}{2022} = \frac{x+y}{xy}$$
$$xy = 2022(x+y)$$

$$\frac{xy}{2} - 2022x + \frac{xy}{2} - 2022y = 0$$

$$x\left(\frac{y}{2} - 2022\right) + y\left(\frac{x}{2} - 2022\right) = 0, \quad x \neq 0 \text{ и } y \neq 0$$

• если  $x > 0$  и  $y > 0$  и  $x \geq 4044$  и  $y \geq 4044$ , то  $\frac{y}{2} = 2022 = \frac{x}{2}$   
 $x = y = 4044$

• если  $x > 0$  и  $y > 0$  то  $\frac{y}{2} - 2022 > 0$ , а  $\frac{x}{2} - 2022 < 0$  (с точностью наоборот)

$$y > 4044 \quad x < 4044$$

$$x\left(\frac{y}{2} - 2022\right) = y\left(2022 - \frac{x}{2}\right) \quad | \cdot 2$$

$$x(y - 4044) = y(4044 - x)$$

$$xy - 4044x = 4044y - xy$$

$$2xy = 4044(x+y)$$

• если  $x < 0$  и  $y < 0$ , то  $x\left(\frac{y}{2} - 2022\right) + y\left(\frac{x}{2} - 2022\right) \geq 0$

• если  $x \leq 0$ , а  $y \geq 0$ , то  $\frac{x}{2} - 2022 < 0$ , тогда  $\frac{y}{2} - 2022 \stackrel{!}{>} 0$

$$x\left(\frac{y}{2} - 2022\right) + y\left(\frac{x}{2} - 2022\right) = 0, \quad x\left(\frac{y}{2} - 2022\right) = y\left(2022 - \frac{x}{2}\right)$$

$$xy = 2022(y-x)$$

и в то же время  $xy = 2022(x+y)$ , тогда  
 $x=0$  —  
противоречие

Ответ: одно решение -  $x = y = 4044$

$$\frac{1}{2022} = \frac{1}{4044} + \frac{1}{4044} = \frac{2}{4044} = \frac{1}{2022}$$



$$\frac{1}{2022} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy}$$

# УСРНОВУК

$$xy = 2022x + 2022y$$

$$x(y - 2022) = 2022y$$

$$\therefore xy = 2022(x+y) : x$$

$$\begin{array}{r} 1011 \overline{) 3337} \\ \underline{- 9} \\ 11 \overline{) 26} \\ \underline{- 9} \\ 21 \end{array}$$

Група 1

$$2022x + 2022y = 157605$$

$$(ab + bc)(bc + cd)(cd + de)$$

А Б В

$$A + B = 220$$

$$A + B = 240$$

$$B + B = 250$$

$$2(A+B) = 710$$

$$A+B+B = 355$$

$$B = 135 \quad A = 105$$

$$D = 115$$

$$\begin{array}{r} 5 \overline{) 1521} \\ \underline{- 10} \\ 521 \\ \underline{- 45} \\ 71 \\ \underline{- 70} \\ 1 \end{array}$$

$$(ab + bc)(bc + cd)(cd + de) = 157605$$

$$(10a + 11b + c)(10b + 11c + d)(10c + 11d + e) = 5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 79$$

$$10a + 11b + c = 79$$

$$10b + 11c + d = 105$$

$$10c + 11d + e = 19$$

abcde =

$$10000a + 1000b + 100c + 10d + e = 21$$

$$10000a + 11000b + 1000c = 15$$

$$10000b - 11000c - 1000d = 35$$

$$10000a + 1000b - 10000c - 1000d + 10000c + 11000d + 1000e = 19$$

$$\begin{array}{r} 19 \\ 57 \\ 95 \\ 133 \end{array}$$

$$10507 \overline{) 1501}$$

$$\begin{array}{r} 1501 \\ \underline{- 133} \\ 171 \\ \underline{- 171} \\ 0 \end{array}$$

$$2022(x+y) = 157605$$

$$2022x + 2022y = 157605$$

$$2022y = 1$$

$$2022x = 1$$

# ЧЕРНОВИК

Справимся?

$$x_n = x_{n-1} \cdot x_{n-3}$$

$$4044 - a + 4044b \quad x_1 = 1 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = 1$$

$$2022^2 \cdot 4 - 4044a + 4044b + 08 = 2022^2 \cdot 2 - 2022a + 2022b + 2022 \cdot 4b = 2022^2 \cdot 4 - 4044a + 4044b - 08 \quad s = 1$$

$$x = 4044 - a$$

$$y = 4044 + b$$

$$2022b - 2022a - 08 = 0$$

$$08 = 2022(b - a)$$

$$b - a = \frac{08}{2022} = \frac{2}{2022} = \frac{1}{1011}$$

$$b = a + \frac{1}{1011}$$

$$x = 2022$$

$$y = 2022 \cdot 2$$

$$a(b + 2022) = 2022b$$

$$b = 337$$

$$a = 337(1 + 6) = 2022(337)$$

$$7a = 2022$$

$$a = \frac{2022}{7}$$

$$y = 2022 \cdot 2022$$

$$y = 2022 \cdot 2022$$

$$y = 2022(2022 + 2021)$$

$$+ 2022 \cdot 2021$$

$$\frac{1}{2022} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy}$$

$$2022y = x$$

$$2022x = y$$

$$\pi(y \in \mathbb{N} \mid x \geq |y|)$$

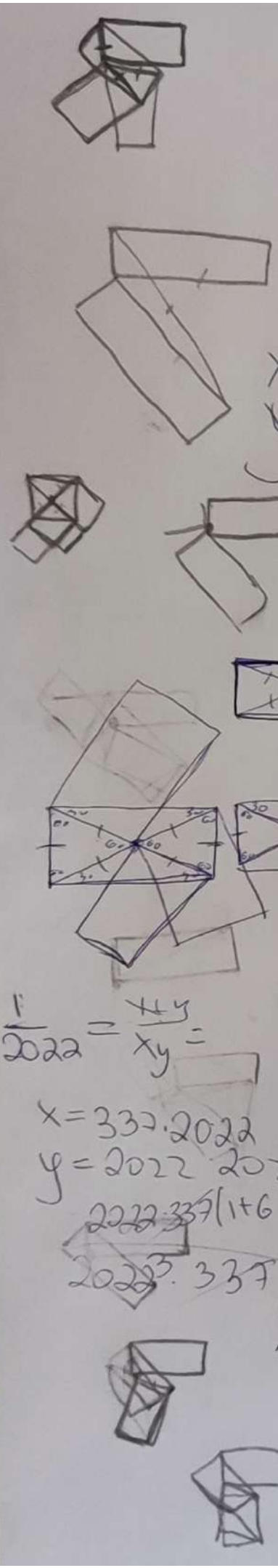
$$x = y + a$$

$$y^2 + ay = 4044y + 2022a$$

$$y^2 + y(a - 4044) - 2022a = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 0^2 - 8 \cdot 88a^2 = 4044^2 + 8 \cdot 2022a^2 = a^2 + 4044^2$$

$$x_1 =$$



а, б

$x + y = 2022(x + y)$

$x + y$

$x_1 =$



# ЧЕРНОБУК

Страница 3

$$(10a+11b+c)(10b+11c+d)(10c+11d+e) = 5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 79 \cdot 19$$

$$78 = 7 \cdot 11 + 10 \cdot 0 + 2 \quad b=7 \quad c=0$$

$$= 6 \cdot 11 + 10 \cdot 1 + 3 \quad b=6 \quad c=1$$

$$= 5 \cdot 11 + 10 \cdot 2 + 4 \quad b=5 \quad c=2$$

$$= 4 \cdot 11 + 10 \cdot 3 + 5 \quad b=4 \quad c=3$$

$$= 3 \cdot 11 + 10 \cdot 4 + 6 \quad b=3 \quad c=4$$

$$= 2 \cdot 11 + 10 \cdot 5 + 7 \quad b=2 \quad c=5$$

$$= 1 \cdot 11 + 10 \cdot 6 + 8 \quad b=1 \quad c=6$$

$$= 0 \cdot 11 + 10 \cdot 7 + 9 \quad b=0 \quad c=7$$

$95+4=105$   
 $96+6=102$   
 $94+8=102$   
 $95+d=105$   
 $d=10$   
 $96+d=102$   
 $d=6$   
 $97+8=105$   
 $d=8$

79 15 133  
 79 21 95  
 79 35 57  
 79 105 19

$$7 \cdot 11 + 0$$

$$6 \cdot 11 + 1$$

$$5 \cdot 11 + 2$$

$$4 \cdot 11 + 3$$

$$3 \cdot 11 + 4$$

$$2 \cdot 11 + 5$$

$$1 \cdot 11 + 6$$

$$0 \cdot 11 + 7$$

$$35 \cdot 57 \cdot 79 \quad \text{ok}$$

$$5 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 19 \cdot 79$$

$$35 \cdot 57 \cdot 79$$

$$\frac{xy}{2} - 2022x + \frac{xy}{2} - 2022y =$$

$$4 \left( \frac{xy}{2} - 2022x \right) + 4 \left( \frac{xy}{2} - 2022y \right) = 0$$

$$\frac{4}{2} < 2022$$

$$x < 0$$

$$y > 0$$

$$x \neq 0$$

$$y \neq 0$$

$$\frac{4}{2} = 2022 = \frac{x}{2}$$

если равно от переменной

$$x = y = 4044$$