МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Аношин Иван Алексеевич**

Класс: **10 класс**

Технический балл: **55**

Дата проведения: **12 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	10	0	15	15	15	0	0

Чистовик

1

№1.

Пусть n - искомое число. Тогда по условию: $\begin{cases} n = 20a + r & (1) \\ n = 21b + r + 1 & (2) \\ n = 22c + 2 & (3) \end{cases}$, где $a, b, c, r, n \in \mathbb{N}$

Тогда $(2)-(1)$: $20a = 21b + 1$

$b + 1 = 20(a - b)$, отсюда $(b+1) \vdots 20 \Rightarrow \min(b) = 19$.

Проверим. 20 = 20(a - 19) $\Rightarrow a = 20$. Тогда $n = 400 + r = 399 + r + 1$.

Но $400 \equiv 4 (22) \Rightarrow$ чтобы остаток был 2 при дел. на 22, то надо, чтобы r был равен 20, но $r < 20$, т.к. это остаток $\Rightarrow \min(b) = 39 \Rightarrow$

$\Rightarrow n = 819 + r + 1$; $820 \equiv 6(22) \Rightarrow r = 18 \Rightarrow n = 838$

Ответ: $n = 838$

№3

Найти 3 последние цифры равносильно поиску остатка при делении на 1000, т.е.

$10^{2022} - 9^{2022} \equiv x\,(1000)$.

$10^{2022} - 9^{2022} = \underbrace{(10-9)}_{1}(10^{2021} + 10^{2020}\cdot 9 + \ldots + 1000\cdot 9^{2018} + 100\cdot 9^{2019} + 10\cdot 9^{2020} + 9^{2021})$

Заметим, что во второй скобке все, кроме 3 последних слагаемых $\vdots 1000 \Rightarrow$

$\Rightarrow 10^{2022} - 9^{2022} \underset{1000}{\equiv} 9^{2021} + 9^{2020}\cdot 10 + 9^{2019}\cdot 100 \underset{1000}{\equiv} 9^{2019}(9^2 + 90 + 100) \underset{1000}{\equiv} 9^{2019}\cdot 271$.

Осталось понять чему равен 9^{2019} по мод. 1000. Заметим, что

$9^{2019} = (10-1)^{2019} = 10^{2019} - C_{2019}^{1}\cdot 10^{2018} + \ldots + C_{2019}^{2016}\cdot 10^3 - C_{2019}^{2017}\cdot 10^2 + C_{2019}^{2018}\cdot 10 - 1$.

Опять же видно, что все, кроме 3 посл. слаг. делится на 1000

Тогда $9^{2019} \underset{1000}{\equiv} -C_{2019}^{2017}\cdot 100 + C_{2019}^{2018}\cdot 10 - 1 \equiv -\frac{2019\cdot 2018}{2}\cdot 100 + 20190 - 1 \equiv$

$\equiv -2019\cdot 1009\cdot 100 + 20189$. $2019\cdot 1009 \equiv 1\,(10) \Rightarrow -2019\cdot 1009\cdot 100 \equiv -100\,(1000)$

$20189 \equiv 189\,(1000)$

Тогда $9^{2019} \underset{1000}{\equiv} -100 + 189 \underset{1000}{\equiv} 89$. Тогда $10^{2022} - 9^{2022} \equiv 89\cdot 271 \equiv 119\,(1000)$

Ответ: 119

Чистовик (2)

N7.

По опр., число Каталана C_n — это число способов сделать правильную скобочную посл-ть из $2n$ скобок (правильная — число откр. скобок равно числу закр.)

т.к. 1 пара скобок уже фиксирована

Тогда всего из 9 пакетов сделать такую посл-ть есть C_9 способов. ~~Вычтем случаи, когда пакеты находятся вне большого,~~

~~т.е.~~

~~1 + 9~~
~~2 + 8~~
~~3 + 7~~
~~4 + 6~~
~~5 + 5~~

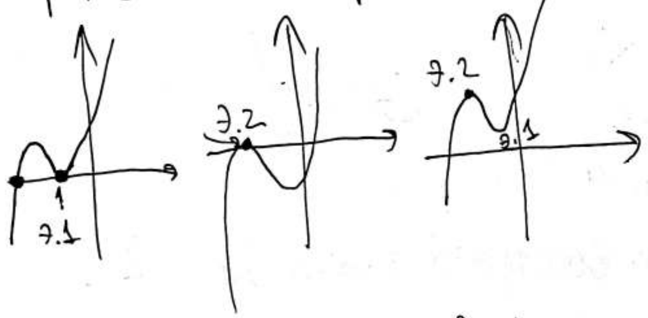
$\cancel{C_{10} - C_9 - C_8 \cdot C_2 - C_7 \cdot C_3 - C_6 \cdot C_4 - C_5^2}$

Ответ: способов C_9 $\cancel{C_{10} - C_9 - C_8 \cdot C_2 - C_7 \cdot C_3 - C_6 \cdot C_4} - C_5^2$.

Чистовик (3)

№5. $f(t)$

$t^3+4t^2+4t+a=0$, есть 3 корня $z>y>x$. Для начала определим границы a. Кубическая ~~парабола~~ график вида t^3+4t^2+4t+a имеет 2 лок. экстремума (т.к. производная равна $3t^2+8t+4$ и это ур-ние имеет 2 корня). Значит если экстремумы - это корни, то ~~парабола~~ график имеет 2 корня. При этом т.к. $3t^2+8t+4$ имеет ровно 2 разл. корня, то оба экстремума одновременно корнями быть не могут. Но если мы найдем эти 2 экстремума, то любое a, которое двигает график вверх или вниз в пределах диапазона от 1 экстр. до другого подходит (выключая сами экстремумы), а любое a не из него не подходит, т.к. график будет иметь ровно 1 корень. Ниже приведены картинки, на которых показаны рассуждения.



Итак, найдём экстремумы.

$3t^2+8t+4=0$

$(3t+2)(t+2)=0$

$t_1=-\frac{2}{3}$; $t_2=-2$.

Тогда, зная что $f(t_1)=f(t_2)=0$ найдём граничные a:

t_1: $-8+16-8+a=0$

$a=0$

t_2:

$-\frac{8}{27}+\frac{16}{9}-\frac{8}{3}+a=0$

$-\frac{8}{27}+\frac{48}{27}-\frac{72}{27}+a=0$

$a=\frac{72-48+8}{27}=\frac{32}{27}$

То есть $\frac{32}{27}>a>0$

Теперь рассмотрим A.

По Т. Виета имеем: $\begin{cases} xyz=-a \\ xy+yz+zx=4 \\ x+y+z=-4 \end{cases} \Rightarrow A=x^3-4y^2-4z^2-4y-4z+32=x^3-4(y^2+z^2)-4(y+z)+32=$

$=x^3+(y^2+z^2)(x+y+z)-(y+z)(xy+yz+zx)+32=$

$=x^3+y^3+z^3-2xyz+32=x^3+y^3+z^3+2a+32$

$x^3+y^3+z^3=d$

Пусть $x+y+z=b$ Тогда:

$xy+yz+zx=c$.

$x^3+y^3+z^3=b^3=b^2\cdot b=b(b^2-2c)+2bc$

$b(b^2-2c)=d+bc+3a \Rightarrow d=b^3-3bc-3a=-64+48-3a=-16-3a$

Тогда $A=d+2a+32=-16-3a+2a+32=$

$=\boxed{16-a}$

Таким образом $A = 16 - a$

Тогда т.к. $\frac{32}{27} > a > 0$ получаем, что $16 - 0 > A > 16 - \frac{32}{27}$

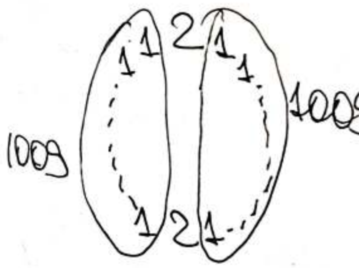
$$16 > A > 14\frac{22}{27}$$

Ответ

Листовик 4

N4 Ответ: победит второй

Первым ходом первый игрок в любом случае сделает двойку. Покажем, как игроку 2 точно не проиграть. Для этого от 2ки на первом ходу отступим по 1009 единиц от двойки с обеих сторон и оставшиеся 2 единицы суммируем. Получим:



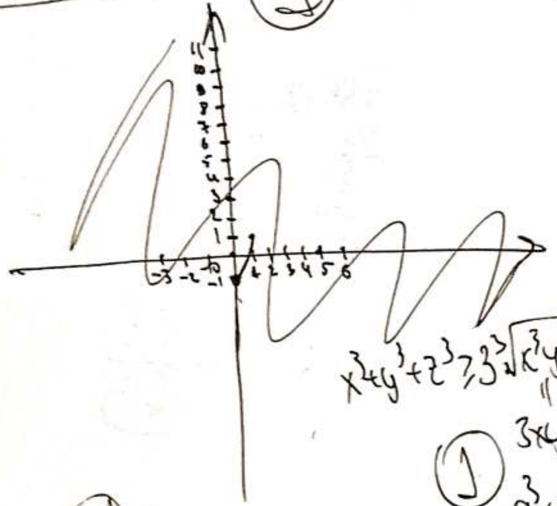
Теперь будем повторять ходы первого центрально симметрично, при этом, если первый выиграл, что значит после нашего хода была создана какая-то выигрышная комбинация чисел по кругу, а засчёт симметрии мест, откуда можно выиграть хотя бы 2. Это значит, что вместо симметричного хода перед потенциальной победой первого мы могли сходить также, как сходил бы первый при его выигрыше и победить. То есть если удастся создать такую комбинацию чисел по кругу, что суммированием возможно получить 4 при ~~любом суммир~~ в какой-то позиции, то второй победит.

Теперь докажем, что 4 получится всегда. ~~Докажем, что~~ Посмотрим на первую получившуюся тройку (она когда-нибудь появится, т.к. max число в кругу растёт на 1 за ход) ~~Пусть при~~ Пусть при каком-то раскладе 4 получить будет нельзя. Тогда тройка получится суммой 1 и 2, но если 4 получить станет все ещё нельзя, то слева и справа от тройки стоят 2 (т.к. тройка первая ⇒ все ост. числа 1 или 2) Тогда за ход до её получения картина такая ~~(стоп. до отражения)~~

2 2 1 2 или 2 1 2 2.

Но тогда видно, что 2 двойки стоят подряд, а значит 4 возможно было получить ✓. Если же тройки не было, что max число всегда 2? Тогда т.к. сумма всех чисел постоянна, а с каждым ходом число двоек растёт, то когда-то их станет больше чем единиц ⇒ возможно будет получить 4 ✓. Значит 4 можно получить всегда вне зависимости от ходов ⇒ ⇒ победит второй

Черновик ①



$(y^2+z^2)(x+y+z)-(y+z)(xy+yz+zx)=$

$=xy^2+xz^2+y^3+yz^2+zy^2+z^3-xy^2-y^2z-xyz-xyz-yz^2-z^2x=$

$=y^3+$

$x^3+y^3+z^3-2\underbrace{xyz}_{a}+32$

$x^3+y^3+z^3\geq 3\sqrt[3]{x^3y^3z^3}=3xyz$ $\geq a+32$

$a^3+2a+34\geq A\geq a+32$

$t^3+4t^2+4t+1=0$

① a^3+2

1 2 1 → 1 2 1 → 1 2 1 ② 1009 1 2 1 1009

1 2 1 ② $t(t^2+4t+4)$

$t(t+2)^2$

$2018+2=2020$

1 1 1 1 1 1 1 1 → 1 2 1 1 1 1 1 1 2 1 1 2 1 1 2 1 1 2 1 2 1 2 2 1 2 1 1 1 2

$(t-x)(t-y)(t-z)=0$

$(t^2-tx-ty+xy)(t-z)$

$t^3-t^2(x+y+z)+t(xy+yz+zx)-xyz$

$a=-xyz$

$xy+yz+xz=4$

$x+y+z=4$

$(x-y)(x-z)+x-$

$(y^2+z^2+y+z)(x+y+z)$

$x^2((2y-1)^2+(2z-1)^2)+30$

$\cancel{xy^2+xz^2+xz+xy+y^3+yz^2+y^2+yz+zy+}$

x^3-xy-x^2z+xyz

tz^2+yz+z^2

$x^3-4(y^2+z^2+y+z)+32$

$\cancel{(y-z)(y+z)}$

$\left(t+\frac{8}{3}\right)\left(t^2+\frac{4}{3}t+\frac{4}{9}\right)$

$t^3+\frac{8}{3}t^2+\frac{4}{3}t^2+\frac{32}{9}t+\frac{4}{9}t+\frac{32}{27}$

Черновик

Черновик 2

$n \equiv 2 (22)$

$n \equiv k (20)$

$n \equiv k+1 (21)$

24	4	3	21 1
46	6	4	42 2
68	8	5	63 3
90	10	6	4
112	12	7	
	14	8	
	16	9	
	18	10	
	0	11	
	2	12	
	4	13	
	6	14	
	8	15	
	10	16	
	12	17	
	14	18	
	16	19	
	18	20	
	0	0	
	2	1	
	4	2	
	6	3	
	8	4	
	10	5	
	12	6	
	14	7	
	16	8	
	18	9	
	0	10	
	2	11	
	4	12	
	6	13	
	8	14	
	10	15	
	12	16	
	14	17	
	16	18	
	18	19	

20189

100+189

289

$9^{2019} \equiv 289 (1000)$

$289 \times 271 = 289 + 2023 + 578 = 319$

$271 \times 89 = 2439$

$2439 - 2168 = 119$

$24390 - 271 = 119$

$27100 - 2710 = 24390$

$22 \times 38 = 176 + 66 = 836 + 2 \rightarrow \boxed{838}$

$838 : 20 = 41$, 80, 38, 20, 18

$838 : 21 = 39$, 63, 208, 189, 19

$$\begin{cases} n = 20x + y \\ n = 21z + y + 1 \\ n = 22a + 2 \end{cases}$$

$21 \times 19 = 189$, 21, 399

$21z + 1 = 20x$

$20z + z + 1 = 20x$

$z + 1 = 20(x - z)$

$\min z+1 = 19 \rightarrow 39 \rightarrow \dots$

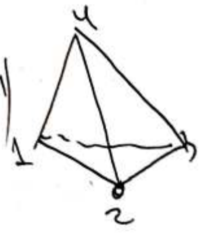
$400 : 22 = 18$, 22, 180, 176, 4

39×21

$820 : 22 = 37$, 66, 160, 154, 0

9

$1\left(\underbrace{10^{2021} + 10^{2020} \cdot 9 + \dots + 10 \cdot 9^{2016}}_{\equiv 0} + 9^{2021}\right)$



$190 + 81 = 271$

$\frac{2019!}{\cancel{2017!} \cdot 2!} = \boxed{2019 \cdot 1009}$

$10^{2022} - 9^{2022}$

$(10^{1011} - 9^{1011})(10^{1011} + 9^{1011})$

$19 \times 9 = 171$

$9^{2021} + 9^{2020} \cdot 10 + 9^{2019} \cdot 100$

$9^{2019}(81 + 90 + 100)$

$\cancel{(10-9)(10^{1010} + 10^{1009} \cdot 9 + \dots + 10 \cdot 9^{1009} + 9^{1010})}$

$(n-1)^2 = n^2 - 2n + 1$

$(n-1)^3 = n^3 - 3n^2 + 3n - 1$

$9^{2019} \cdot 271$

mod 1000 =

$19 \cdot 9 \cdot 100 = 17100$

$(10-1)^{2019} = \underbrace{10^n - C^1_{2019} 10^{n-1} + C^2_n 10^{n-2} - \dots}_{\vdots 1000} + C^{2017}_{2019} 10^2 + C^{2018}_{2019} 10 - 1$

$-2019 \cdot 1009 \cdot 100 + 20190 - 1 \equiv 1000$