МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Антипова Вероника Сергеевна**

Класс: **10 класс**

Технический балл: **60**

Дата проведения: **12 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	10	0	15	15	5	15	0

Чистовик лист 1/6

Задача 1

Пусть это число N: $N=20x+a$; $N=21y+a+1$; $0\le a\le 19$

$20x+a=21y+a+1$; $20x=21y+1$; $21y\underset{2}{\equiv}1 \Rightarrow y=2z+1$

$20x=42z+22$; $10x=21z+11$; $21z\underset{2}{\equiv}1$; $z=2t+1$

$10x=42t+21+11$; $10x=42t+32$; $5x=21t+16$; $21t\underset{5}{\equiv}4$; $21\underset{5}{\equiv}1 \Rightarrow t\underset{5}{\equiv}4$

$t=5k+4$; $5x=105k+84+16$; $5x=105k+100$; $\boxed{x=21k+20}$; подставим это в

$20x=21y+1$: $420k+400=21y+1$: $420k+399=21y$; $\boxed{y=20k+19}$

$N=420k+400+a$; $N\underset{22}{\equiv}2$; $420\underset{22}{\equiv}2$; $400\underset{22}{\equiv}4$

$420k+400+a\underset{22}{\equiv}2k+4+a$; $2k+4+a\underset{22}{\equiv}2$; при $k=0$: $4+a\underset{22}{\equiv}2 \Rightarrow$

$4+a\ge 24 \Rightarrow a\ge 20$ – противоречие $\Rightarrow$ $k\ge 1$. : при $k=1$:

$2+4+a\underset{22}{\equiv}2$; $6+a\underset{22}{\equiv}2$; $6+a\ge 24$; наименьшее a – $24-6=18$ – подходит под ограничение для a. $N=420+400+18=820+18=838$.

При $k\ge 2$ $N\ge 420\cdot 2+400=840+400>838 \Rightarrow$ наименьшее N – 838

Ответ: 838.

Задача 3

$$10^{2022}-9^{2022}=(10-9)(10^{2021}+10^{2020}\cdot 9+10^{2019}\cdot 9^2+\ldots+10^3\cdot 9^{2018}+10^2\cdot 9^{2019}+10\cdot 9^{2020}+9^{2021})=10^{2021}+10^{2020}\cdot 9+\ldots+10\cdot 9^{2020}+9^{2021}.$$

3 последние цифры это остаток от деления на 10^3. Все слагаемые, кроме трех последних делятся на 10^3. Значит, выражение сравним по модулю 10^3 с

$$10^2\cdot 9^{2019}+10\cdot 9^{2020}+9^{2021}=9^{2019}(100+90+81)=9^{2019}\cdot 271$$

$(9;1000)=1 \Rightarrow$ по т. Эйлера $9^{\varphi(1000)}\underset{1000}{\equiv}1$

$\varphi(1000)=\varphi(2^3\cdot 5^3)=2^2(2-1)\cdot 5^2(5-1)=4\cdot 25\cdot 4=400$; $9^{400}\underset{1000}{\equiv}1$

$2019\underset{400}{\equiv}19 \Rightarrow 9^{2019}\cdot 271\underset{1000}{\equiv}9^{19}\cdot 271$; $9^5=81\cdot 81\cdot 9=6561\cdot 9=59049\underset{1000}{\equiv}49 \Rightarrow$

$9^{19}\cdot 271\underset{1000}{\equiv}9^5\cdot 9^5\cdot 9^5\cdot 9^4\cdot 271\underset{1000}{\equiv}49^3\cdot 9^4\cdot 271=2401\cdot 49\cdot 6561\cdot 271\underset{1000}{\equiv}$

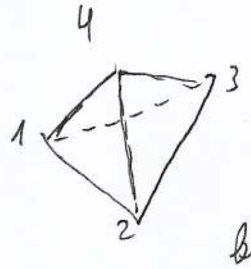
(продолжение на следующем листе)

$401 \cdot 49 \cdot 561 \cdot 271 = 19649 \cdot 561 \cdot 271 \underset{1000}{\equiv} 649 \cdot 561 \cdot 271 = 364089 \cdot 271$

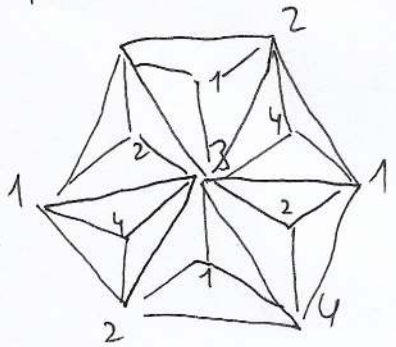
$\underset{100}{\equiv} 89 \cdot 271 = 24119 \underset{100}{\equiv} 119 \Rightarrow$ получаем 3 цифры равны 119.

Ответ: 119.

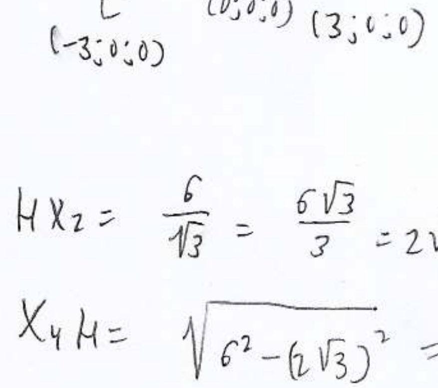
Задача 2.

Пронумеруем вершины пирамиды: 

, считаем она находится в таком положении, и вершина 3 остается неподвижной. Пусть, без ограничения общности её в первый раз перекатили через ~~ребро~~ ребро 23. Ниже нарисованы все положения ~~грани~~ ~~кф~~ пирамиды (вид сверху)

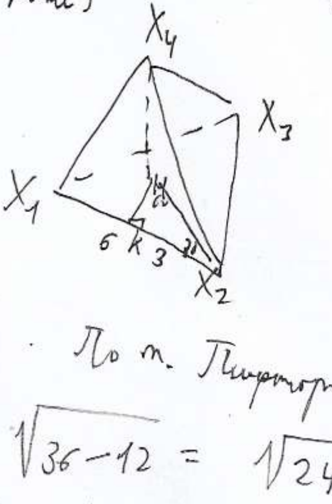


Заметим, что все подвижные вершины прошли одинаковый путь. Найдем, например, какой путь прошла вершина 1. Её путь состоит из 4-х одинаковых отрезков. Найдем длину этого отрезка с помощью метода координат..



На рис ниже изображены 1-е и 2-е положения пирамиды. Нужно найти длину отрезка AF.

Сначала найдем длину высоты ~~X₄H~~ X_4H в данной пирамиде (рис ниже)



$X_4H \perp (X_1X_3X_2) \Rightarrow \angle X_4HX_2 = 90$

$X_4X_2 = 6$; Опустим высоту HK на X_1X_2

~~$\angle HX_2$~~

$\angle HX_2K = \frac{60}{2} = 30$

$KX_2 = \frac{6}{2} = 3$. $\angle KHX_2 = 60$

$\sin 60 = \frac{KX_2}{HX_2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{HX_2}$;

$HX_2 = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$. По т. Пифагора для $\triangle X_4HX_2$:

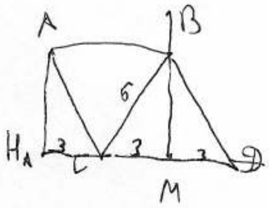
$X_4H = \sqrt{6^2-(2\sqrt{3})^2} = \sqrt{36-12} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

Теперь, пусть, середина CD — $(0;0;0)$; $C = (-3;0;0)$; $D - (3;0;0)$

(продолжение на следующем листе)

Задачи 2 (продолжение) Чистовик лист 3/6

$B(0; 3\sqrt{3}; 0)$. M - середина CD - $(0;0;0)$; F' - ~~пр~~ основание перп. из B на CD: $(0; \sqrt{3}; 0)$; $F: (0; \sqrt{3}; 2\sqrt{6})$. Найдём координаты точки A:



$AB \perp BM$ $(\angle ABM = 60+30 = 90°)$

$\triangle ACH_A = \triangle BCM \Rightarrow H_AC = CM = 3 \Rightarrow$

$A(-6; 3\sqrt{3}; 0)$

$\vec{AF}: (-6; 2\sqrt{3}; -2\sqrt{6})$ $|\vec{AF}| = \sqrt{36+12+24} = \sqrt{48+24} = \sqrt{72} =$

$2\sqrt{18} = 6\sqrt{2}$ Общий путь A это 4 таких отрезка, т.е. $6\sqrt{2} \cdot 4 = 24\sqrt{2}$

Ответ: $24\sqrt{2}$.

Задача 5

$t^3+4t^2+4t+a=0$; по т. Виета: $x+y+z=-4$

$xy+xz+yz=4$

$(x+y+z)^2=16$; $x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz)=16$

$x^2+y^2+z^2+8=16$; $x^2+y^2+z^2=8$

$x^3-4y^2-4z^2-4y-4z+32=A$; сложим со $(*)$ $\cancel{4x^2}+4$ $4x^2+4y^2+4z^2=32$

$4x+4y+4z=-16$

$4x^2+4y^2+4z^2+4x+4y+4z=32-16=16$ $(*)$

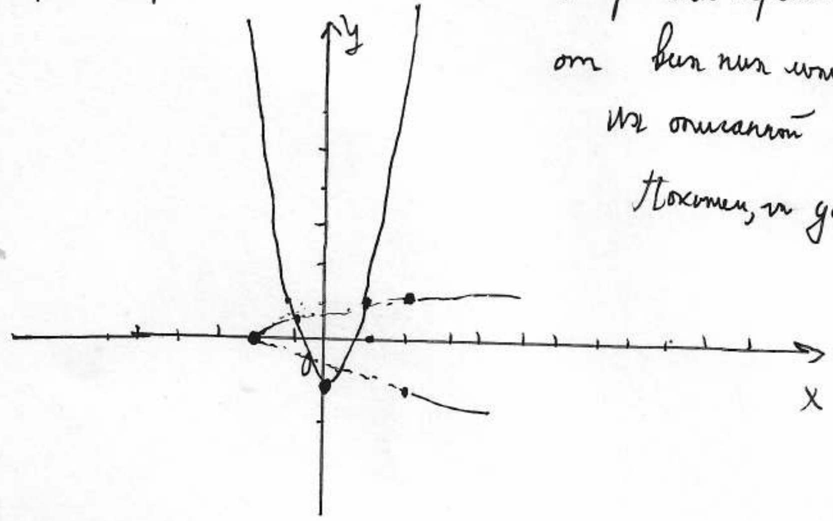
$x^3+4x^2+4x+32=16+A$

$x^3+4x^2+4x-16=A$; $x^3+4x^2+4x=-a \Rightarrow$

$A= -a-16$

Задача 6. Тиховс лист 4) 6

Построим графики:



Параболы пересекаются в 4-х точках $\Rightarrow$ точка, равноудалённая от всех них может быть только одна — центр их описанной окружности.

Покажем, что данная точка это точка $\left(\frac{1}{8}; \frac{1}{4}\right)$

Действительно, пусть $(x_1; y_1)$ — точка пересечения парабол, тогда, $y_1 = 2x_1^2 - 1$; $x_1 = 4y_1^2 - 2$; расстояние между точками равно:

$\cancel{\sqrt{\left(y_1 - \frac{1}{8}\right)^2 + (y}}$ $\sqrt{\left(x_1 - \frac{1}{8}\right)^2 + \left(y_1 - \frac{1}{4}\right)^2}$ ~~достаточно д-ть, что~~ =

$$\sqrt{x_1^2 - \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{64} + y_1^2 - \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{16}}; \quad y_1 = 2x_1^2 - 1$$

$$\sqrt{x_1^2 - \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{64} + 4x_1^4 - 4x_1^2 + 1 - x_1^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16}} = \sqrt{4x_1^4 - 4x_1^2 - \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{64} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16}}$$

Но $x_1 = 4y_1^2 - 2 = 4(4x_1^4 - 4x_1^2 + 1) - 2$; $16x_1^4 - 16x_1^2 - x_1 + 2 = 0 \quad | : 4$

$4x_1^4 - 4x_1^2 - \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow 4x_1^4 - 4x_1^2 - \frac{1}{4}x_1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow$ расстояние между точками равно: $\sqrt{\frac{1}{64} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16} - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{64} + 1 + \frac{1}{16}}$ — const $\Rightarrow$ оно одинаковое для всех 4-х точек пересечения, доказано.

Ответ: $\left(\frac{1}{8}; \frac{1}{4}\right)$.

Задача 4: Итоговые мысли 5/6

Будем считать, что если игрок очередным ходом может сделать 4, он её делает и выигрывает (очевидно, это ~~[illegible]~~ оптимальная стратегия). Покажем, что ~~никогда~~ на окружности не может появиться числа ≥ 3. Действительно, после 4 игра сразу заканчивается $\Rightarrow$ можно считать, что 4 там нет. Тогда, если на окружности когда-то появилось число ≥ 3, то там когда-то ~~сначала~~ сначала появилось число 3 (в противном случае как из 2-х чисел, каждое из которых 1 и 2 в какой-то момент получили число ≥ 5 — противоречие). Рассмотрим первый такой момент. 3 могло получиться только как $1+2$. При этом если ~~а~~ 2-м соседом этих 1 или 2 было число 1, то следующий игрок сделает $3+1=4$ и выиграет. Но тогда ~~с обоих сторон~~, эти оба соседа 2 и рядом с 2 стоит ещё одна двойка, и этот игрок своим ходом сделал $2+2=4$ и выиграл, а не $2+1=3$.

Значит, после каждого делания числа ≥ 3 игрок, сделавший его, проигрывает. Значит, единственные возможные ходы игроков это делать $1+1=2$ так, чтобы не оставить после своего хода другому игроку две двойки подряд, и тот, кто не может сделать такой ход, проигрывает. Тогда покажем, что 2-й игрок может выиграть. Действительно, ~~пусть 1-й~~ 1-й игрок 1-м ходом сделает 2 из 2-х единиц. Тогда 2-й игрок своим 1-м ходом может сходить так, чтобы после его хода на окружности было две двойки, и на каждой дуге между ними одинаковое число единиц. Тогда из сказанного выше 1-й игрок не будет трогать эти две двойки, и тогда 2-й игрок сможет повторять его ходы симметрично относительно прямой, соединяющей две двойки. ~~Из сказанного выше получаем~~ Тогда он не проиграет (2-й игрок)
~~и игра когда~~ (продолжение на следующем листе)

Задача 4 (продолжение)   Чистовик лист 6/15

Предположим, что получилось число. Во время игры заканчивают на одном числе, и оно равно сумме всех, т.е. 2022 > 4. Но выше было показано, что такого не может быть. Значит, 2-й выигрывает.

Ответ: да, 2-й игрок.

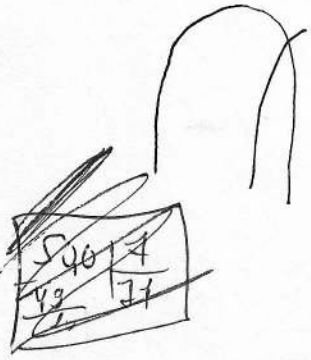
$\frac{5 \cdot 100}{7}$ Герашвили ! лист 7

$y = 2x^2 - 1 \qquad x = 4y^2 - 2$

4

5

7



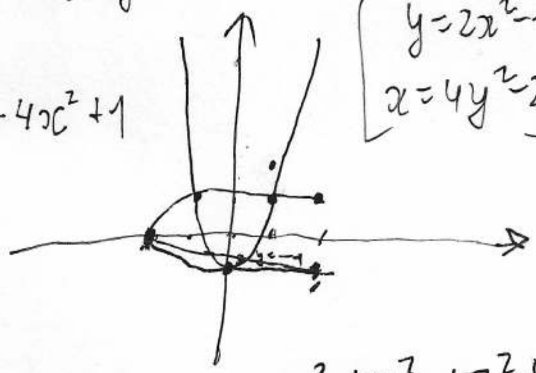
$\cancel{y = 2 \cdot 16y^4}$

$x = 4(4x^4 - 4x^2 + 1) - 2$

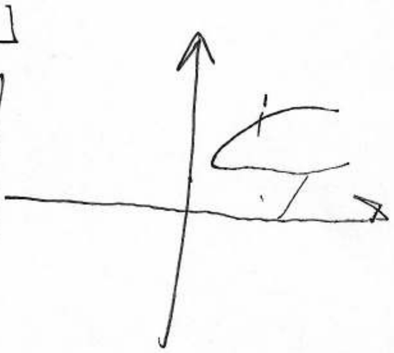
$x = 16x^4 - 16x^2 + 4 - 2$

$\underbrace{16x^4 - 16x^2 - x + 2 = 0}$

$y = 2x^2 - 1 \qquad x = 4y^2 - 2$



$\left[\begin{array}{l} y = 2x^2 - 1 \\ x = 4y^2 - 2 \end{array}\right.$



$x^2 + y^2 = x^2 + 4x^4 - 4x^2 + 1$

$x^2 + 4x^4 - 4x^2 + 1 =$

$4x^4 - 3x^2 + 1$

$t^3 + 4t^2 + 4t + a = 0$

$x^3 - 4y^2 - 4z^2 - 4y - 4z + 32$

$x < y \le$

$y = -1$

$2 = 4y^2$

$2y^2 = 0$

$y = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$2y = 4x^2 - 2$

$x = 4y^2 - 2$

$\left\{\begin{array}{l} x + y + z = -4 \\ xy + xz + yz = 4 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 8 \end{array}\right.$

$4x^2 - 2y = 4y^2 - x$

$xyz = a$

Dr $(x; n)$ було по- казати уроку

$\frac{16}{16}$

$x_0 ; y_0$

$\frac{1}{4}$

$\frac{16}{16 \cdot 16}$

$\sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2} = const$

$\sqrt{x_0^2 - 2x_0 x + x^2 + y_0^2 - 2y_0 y + y^2} =$

Черновик лист 8

$22n+2$

$20x+a$

$21y+a+1$

10^{2022} $\quad y^{2022}$ $\quad \equiv 1000$

$20x+a=21y+a+1$

$20x=21y+1$ $\quad y = 2z+1$

$20x=42z+22$

$10x=21z+11$ $\quad : z=2t+1$

$10x=42t+21+11$

$10x=42t+32$

$5x=21t+16$ $\quad : t=5k+4$

$5x=105k+84+16$

$5x=105k+100$

$x=21k+20$

$y=20k+19$

$\cancel{20\cdot 21k+400\,x\,7}$

$420k+400=21y+1$

$420k+399=21y$

$20k+19=y$

$k=0$

$81+90+100=271$

$420:22 = 19$, $\ \ 200$, $\ \ 198$, $\ \ 2$

$399:21 = 19$, $\ \ 189$

$400:22=18$, $\ \ 180$, $\ \ 176$, $\ \ 4$

$2019:3=673$

$836:22=38$, $\ \ 66$, $\ \ 176$

$838:20=41$, $\ \ 80$, $\ \ 38$, $\ \ 20$, $\ \ \boxed{18}$

$838-19=819$

$819:21=39$, $\ \ 63$, $\ \ 189$

$1000-19$

9^{2022}

$a^{2022}-b^{2022}=(a-b)(a^{2021}+a^{2020}b$

$\boxed{1000}$ $\quad 729$ $\quad 9 \equiv 1000$

$9\cdot9\cdot9=$ $\ \ 6561\cdot 9 = 59049$

$81\cdot81=6561$ $\quad \boxed{6561}$

$t^3+4t^2+4t+a=0$ Чернови[illegible]

$x^3+4x^2+4x+a=0$

$y^3+4y^2+4y+a=0$

$t^3+4t^2+4t+a=0$

$x+y+z \quad xy \quad -xyz$

$x^3-y^3+4(x^2-y^2)+4(x-y)=0$

$(x-y)(x^2+xy+y^2)+4(x-y)(x+y)+4(x-y)=0$

$x^2+xy+y^2+4x+4y+4=0$

$xyz=32$

$x+y+z=$

$\cancel{(x-x)(x-y)(x-z)}$

$(t-x)(t-y)(t-z)$

$x^3-4y^2-4z^2-4y-4z+32=0$

$x^3-4(y^2+z^2+y+z)+32$

$x^3-4y^2-4z^2-4y-4z+32=z$

$4x^2+4y^2+4z^2= \quad 32$

$x+y+z=-4$

$xy+xz+yz=4$

$(x+y+z)^2=16$

$x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz)=16$

$x^2+y^2+z^2+8=16$

$x^2+y^2+z^2=8$

$x^3+4x^2-4y-4z=z$

$4y+4z+4x=-16$

$x^3+4x^2+4x=z-16$

$-a=z-16$

$4t^2=-a$

$t=\sqrt{-\frac{a}{4}}$

$t^3=-t^4$

$t^3=-4t$

$t^2=-4$