МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Артемьев Иван Вадимович**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **90**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	15	15	10	5

Чистовик

$$A = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \dots + \frac{89}{(44\cdot 45)^2}$$

k-ый слагаемое в A это: $\frac{2k+1}{(k(k+1))^2}$

Заметим, что $\frac{2k+1}{(k(k+1))^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{k^2+2k+1-k^2}{(k(k+1))^2}$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{1^2} - \cancel{\frac{1}{2^2}} + \cancel{\frac{1}{2^2}} - \cancel{\frac{1}{3^2}} + \dots + \cancel{\frac{1}{43^2}} - \cancel{\frac{1}{44^2}} + \cancel{\frac{1}{44^2}} - \frac{1}{45^2} =$$

$$= 1 - \frac{1}{45^2}$$

$$B = \frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{(4-2\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)^2}}{\sqrt[6]{4}} =$$

$$= \frac{\sqrt[6]{2(2-\sqrt{3})(4+2\sqrt{3})}}{\sqrt[6]{4}} = \sqrt[6]{\frac{4(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{4}} = \sqrt[6]{2^2-(\sqrt{3})^2} = 1.$$

$$\Rightarrow A \vee B \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{45^2} \vee 1$$

„$\vee$" есть „$<$" $\Rightarrow A < B$

<u>Ответ:</u> число B больше.

Лист 1.

Чистовик

№2

Т.к. число делится на 19 или 23 и оно двузначно то у нас не много вариантов каким оно может быть, а именно:

:19: 19, 38, 57, 76, 95

:23: 23, 46, 69, 92

или 00. - но это двузначное число.

начинается с 1 => следующ. только 9.

после 9 может быть либо 5, либо 2. (95 или 92)

если это 2, то он след. 3 (23)

после 3: 8 (38) и после 8 ничего не м.б. т.к. никакое двузначное число начин. с 8 ⋮ ~~19~~ 19. или 23.

=> после 9 идет 5, после 5 → 7 (57)

после 7 → 6 (76), после 6 → 9. и вот мы снова попали в 9, ~~где~~ цикл замкнулся ~~№2~~ => дальше цифры будут повторяться по циклу

$1\underbrace{9576}_{T_1}\underbrace{9576}_{T_2}\underbrace{9576}_{T_3}\ldots\underbrace{9576}_{T_{504}}\underbrace{9\ldots}_{T_{505}}$

т.к. 2021 - 1 = 2020 ⋮ 4 (длину периода), то после 1 влезет целое число периодов.

рассмотрим последний (505-ый) период.

как мы знаем после 9 можно получить либо 9576

либо 9238

Лист 2

Чистовик

9238 – до этого мы не ~~тут~~ использовали, т.к. число бы не вышло, но теперь 8 – на конце и мы можем её использовать.
=> у нас получается два варианта числа:

$1\underbrace{9576}_{T_1}\underbrace{9576}_{T_2}\ldots\underbrace{9576}_{T_{504}}\underbrace{957\boxed{6}}_{T_{505}}$ – на конце 6

$1\underbrace{9576}_{T_1}\underbrace{9576}_{T_2}\ldots\underbrace{9576}_{T_{504}}\underbrace{923\boxed{8}}_{T_{505}}$ – на конце 8.

Ответ: 6 или 8.

№3

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}$$

давайте посчитаем $f(f(x))$

$$f(f(x))=\frac{1}{\sqrt[7]{1-\left(\frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}\right)^7}}=\frac{1}{\sqrt[7]{1-\frac{1}{1-x^7}}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt[7]{\frac{1-x^7-1}{1-x^7}}}=\cancel{\frac{1}{\sqrt[7]{x^7-1}}}=\frac{\sqrt[7]{x^7-1}}{\sqrt[7]{x^7}}$$

давайте посчитаем $f(f(f(x)))=f\left(\frac{\sqrt[7]{x^7-1}}{\sqrt[7]{x^7}}\right)$

Чистовик

$$f(f(f(x)))=\frac{1}{\sqrt[7]{1-\left(\frac{\sqrt[7]{x^7-1}}{\sqrt[7]{x^7}}\right)^7}}=\frac{1}{\sqrt[7]{1-\frac{x^7-1}{x^7}}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt[7]{\frac{x^7-x^7+1}{x^7}}}=x$$

$$\boxed{f(f(f(x)))=x}\Rightarrow f(f(f(2022)))=2022$$

$$\Rightarrow \underbrace{f(f(f(\ldots f}_{1304}(2022)\ldots)))=\underbrace{f(f\ldots f}_{1304-3=1301}(2022))\ldots)=\ldots$$

$$\ldots=\underbrace{f(f\ldots f}_{1301-3k}(2022)\ldots)=f(f(2022)) \circledequal$$

1299 ⋮ 3 $\Rightarrow \frac{1299}{3}$ сделали так и получили $f(f(x))$ – мы считали.

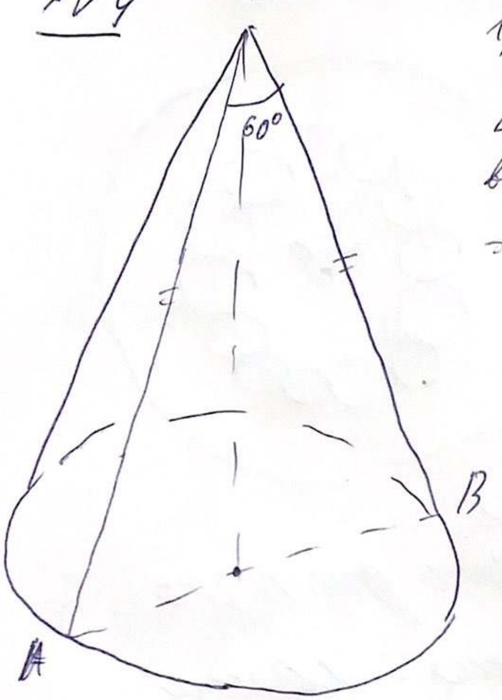
$$\circledequal \sqrt[7]{\frac{x^7-1}{x^7}}\underset{x=2022}{=}\sqrt[7]{\frac{2022^7-1}{2022^7}}=\frac{\sqrt[7]{2022^7-1}}{2022}$$

<u>Ответ</u>: $\frac{\sqrt[7]{2022^7-1}}{2022}$

Лист 4

Чистовик

№4



1) рассмотрим ∀ осев сечение

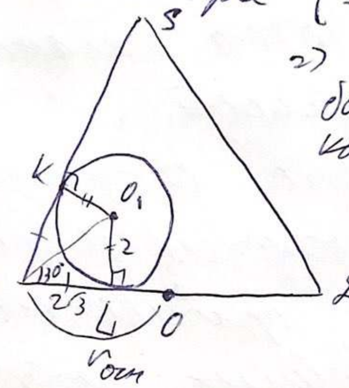
$\triangle SAB$ - р/б $AS = BS$, т.к.

все наклонные в конусе равны

$\Rightarrow \triangle SAB$ - р/б с углом $60°$ $\Rightarrow$

$\triangle SAB$ - р/с $\Rightarrow AB = d_{осн} = AS = BS$.

2) Рассмотрим осев сечение проходящее через центр ∀ шара ($\exists\, O_1$ - его центр)



$\Rightarrow$ в сечении будет большой круг, который касается и осн. и боков. поверхн.

$\angle SCD = 60°$

(·) K, L - точки касан.

$\Rightarrow \angle O_1CL = \angle O_1CK = 30°$, т.к. $\triangle CKO_1 = \triangle CLO_1$ (радиусы обр. с(?)...)

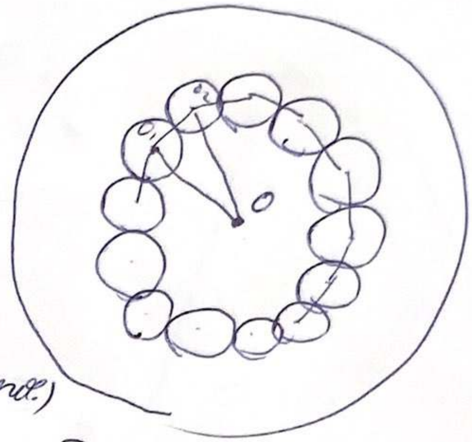
в $\triangle O_1CL$: $tg\angle O_1CL = tg\,30° = \frac{O_1L}{CL} = \frac{2}{CL} \Rightarrow CL = \frac{2}{tg\,30°} = 2\sqrt{3}$

$\exists$ (·) O - центр окружности осн. конуса

$r_{осн}$ - её радиус $\Rightarrow$ проекция центра ~~шара~~ ∀ шара лежит на расст. $r_{осн} - 2\sqrt{3}$ от (·)O.

Чистовик

Спроектируем (⊥) все шары на пл-ть основания

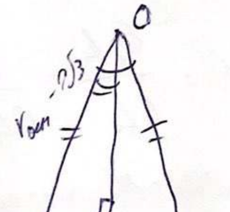


Т.к. шары касаются друг друга, то и их проекции, тоже касаются и радиус окружн. (спроектиров.) равен радиусу шара — 2.

Т.к 2 окружности касаются друг друга, то их центры и точка касания - лежат на одной прямой.

и если „стереть" окружности и нарисовать отрезки соед. соседние центры этих окружностей то получим правильный 13-угольник каждая из вершин которого удалено от (·)O на расст $= r_{осн} - 2\sqrt{3}$ и все рёбра равны $2+2=4$.

б) $\triangle OO_1O_2$:



$OH \perp O_1O_2 \Rightarrow H$ - серед O_1O_2 т.к. $\triangle OO_1O_2$ - р/б. $(OO_1 = OO_2 = r_{осн} - 2\sqrt{3})$

$\angle O_1OO_2 = \frac{360^\circ}{13}$, т.к. ~~...~~ это прав. 13-уг. $\Rightarrow \angle O_1OH = \frac{360^\circ}{13\cdot 2} = \frac{180^\circ}{13}$

$\sin\angle O_1OH = \sin\frac{180^\circ}{13} = \frac{2}{r_{осн} - 2\sqrt{3}} \Rightarrow (r_{осн} - 2\sqrt{3})\sin\frac{180^\circ}{13} = 2$

Чистовик

$$r_{огн} = \frac{2 + 2\sqrt{3}\cdot \sin\frac{180^\circ}{13}}{\sin\frac{180^\circ}{13}}$$

Ответ: $\frac{2}{\sin\frac{180^\circ}{13}} + 2\sqrt{3}$

<u>№6</u>

$\exists\ t = tg x$

$$a t^3 + (1-a-2a^2) t^2 + (2a^2 - 2a - 1) t + 2a = 0.$$

$$\Updownarrow$$

$$(t-2a)(t-1)\left(t+\frac{1}{a}\right) = 0.$$

(проверяется раскрытием скобок или подстановкой корней)

$t = 2a$:

$$a\cdot 8a^3 + (1-a-2a^2)\cdot 4a^2 + (2a^2-2a-1)\cdot 2a + 2a = 8a^4 - 8a^4 + 4a^2 - 4a^3 + 4a^3 - 4a^2 - 2a + 2a = 0.$$

$t = 1$:

$$a + (1-a-2a^2) + (2a^2 - 2a - 1) + 2a = 0.$$

$t = -\frac{1}{a}$:

$$-\frac{a}{a^3} + \frac{(1-a-2a^2)}{a^2} - \frac{2a^2-2a-1}{a} + 2a = -\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} - \frac{1}{a} - 2 - 2a + 2 + \frac{1}{a} + 2a = 0.$$

у кубич. ур-ия не м.б. больше 3-х корней

Чистовик

$\Rightarrow \quad \operatorname{tg} x = 1$

$\operatorname{tg} x = 2a$ найдём min расст. между корнями $x_1 = \operatorname{arctg}(2a)$

$\operatorname{tg} x = -\frac{1}{a}$ $\quad x_2 = \operatorname{arctg}(-\frac{1}{a})$

$\exists \; f(x) = \left|\operatorname{arctg}(2x) - \operatorname{arctg}(-\frac{1}{x})\right| = |\operatorname{arctg}(2x) + \operatorname{arctg}\frac{1}{x}|$

если $x > 0$: $f(x) = \operatorname{arctg} 2x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$

$x < 0$: $f(x) = -(\operatorname{arctg} 2x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x})$

$x>0$:

$$f'(x) = \frac{1}{1+4x^2}\cdot 2 + \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= \frac{2}{1+4x^2} - \frac{1}{x^2+1} = \frac{2x^2+2-(1+4x^2)}{(1+4x^2)(x^2+1)} =$$

$$= \frac{2x^2+2-1-4x^2}{(1+4x^2)(x^2+1)} = \frac{-2x^2+1}{(1+4x^2)(x^2+1)} = 0 \iff$$

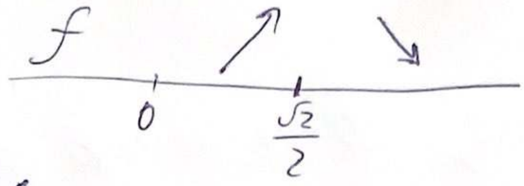
$\iff 2x^2 = 1 \quad x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \; x>0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$f'\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{2}{1+4\cdot\frac{2}{16}} - \frac{1}{1+\frac{2}{16}} = \frac{2}{1+\frac{1}{2}} - \frac{1}{1+\frac{2}{16}} =$$

$$= \frac{2\cdot 2}{3} - \frac{16}{16+2} = \frac{4}{3} - \frac{16}{18} = \frac{24-16}{18} > 0.$$

$$f'(1) = \frac{2}{1+4} - \frac{1}{1+1} = \frac{2}{5} - \frac{1}{2} = \frac{4}{10} - \frac{5}{10} < 0.$$

Чистовик

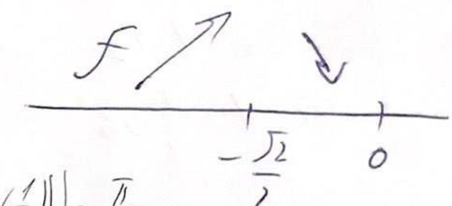
$\Rightarrow$ 

$x<0$:

$f'(x) = -\frac{1-2x^2}{(1+4x^2)(x^2+1)} = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2},\ x<0$

$x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$f'\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) = -\frac{24-16}{18} < 0$

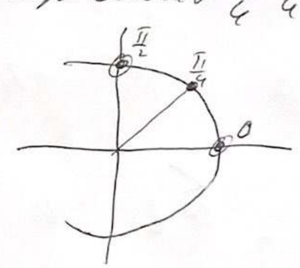
$f'(-1) = -\frac{4-5}{10} > 0. \Rightarrow$ 

$\lim\limits_{x\to 0\pm} f(x) = \lim\left(\left|\mathrm{arctg}(0) + \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{0}\right)\right|\right) = \frac{\pi}{2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\left(\underbrace{\mathrm{arctg}\,2x}_{\to\frac{\pi}{2}} + \underbrace{\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)}_{\to 0}\right) = \frac{\pi}{2}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\left(-\left(\underbrace{\mathrm{arctg}\,2x}_{\to-\frac{\pi}{2}} + \underbrace{\mathrm{arctg}\,\frac{1}{x}}_{\to 0}\right)\right) = \frac{\pi}{2}$

теперь если $a \to \infty$, то расст. между корнями $\frac{\pi}{4}$ и $\mathrm{arctg}\,2a \to \frac{\pi}{2}$: плохо.



$a \to +\infty$ или $a \to 0 \Rightarrow$ то $\frac{\pi}{4} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow$ расст. до $\frac{\pi}{2}$ и 0 < чем расст от 0 до $\frac{\pi}{2}$.

$\Rightarrow$ Наиб. расст. между корнями принимает min значение при $a \to +\infty$ или $a \to 0$.
и оно равно $\frac{\pi}{2}$

Ответ: наим расст $= \frac{\pi}{2}$ при $a \to +\infty$ и $a \to 0$.

Чистовик

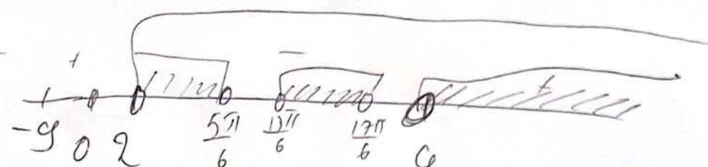
№5

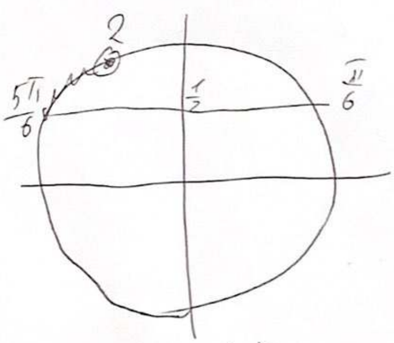
если тригон. число >0, то и каждое тоже
$\Rightarrow$ два числа >0.

б $t > 2$:

$\Rightarrow$ достаточно чтобы хотя одно из a или c было >0, т.к. $b = 11^t - 121 > 121 - 121 = 0$.

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t^3 - 81t > 0 \quad \rightarrow \quad t(t-9)(t+9) > 0 \\ \sin t - \frac{1}{2} > 0 \end{array}\right.$$





$2 < \frac{5\pi}{6}$, т.к. $12 < 15 = 5 \cdot 3 < 5\pi$

$\Rightarrow$ нам подх $\left(2; \frac{5\pi}{6}\right)$

и $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right)$, $k > 0$, $k \in \mathbb{Z}$

$k = 1$: $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi; \frac{5\pi}{6} + 2\pi\right) = \left(\frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}\right)$

$k = 2$: $\left(\frac{\pi}{6} + 4\pi; \frac{5\pi}{6} + 4\pi\right)$, но $9 < \frac{\pi}{6} + \underset{12}{\underset{\vee}{4\pi}}$ $\Rightarrow$ нет смысла считать это.

$\frac{17\pi}{6} < 9$, т.к. $17\pi < 54$, т.к. $17\pi < 17 \cdot 3{,}15 = 53{,}55 < 54$

$$\begin{array}{r} \times\, 3{,}15 \\ 17 \\ \hline +\,2205 \\ 315 \\ \hline 53{,}55 \end{array}$$

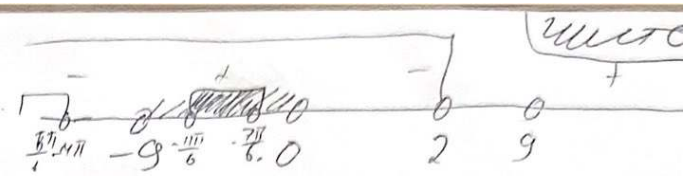
б $t < 2$

$\Rightarrow$ $b = 11^t - 121 < 0$.

$\Rightarrow$ надо чтобы a и c >0 (оба)

чистовик

$$\begin{cases} t^3 - 81t > 0 \\ \sin t - \frac{1}{2} > 0 \end{cases}$$



$\sin t > \frac{1}{2} \iff t \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right)$

$k > 0$ – не подх., т.к. $t > 0$, а у нас $t \in (-9; 0)$

$k = -1$: ~~$t \in \left(\frac{\pi}{6} - 2\pi; \frac{5\pi}{6} - 2\pi\right)$~~ $t \in \left(\frac{\pi}{6} - 2\pi; \frac{5\pi}{6} - 2\pi\right)$

$t \in \left(-\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}\right)$

$k = -2$: $t \in \left(\frac{\pi}{6} - 4\pi; \frac{5\pi}{6} - 4\pi\right)$

заметим, что $\frac{5\pi}{6} - 4\pi < -9$, т.к. $\frac{5\pi - 24\pi}{6} < -9$, т.к.

$-19\pi < -54$, т.к. $19\pi > 54$, т.к. $19\pi > 19 \cdot 3 = 57 > 54$.

$k \leq -2$ все отрезки < -9.

$\Rightarrow$ подходит только $t \in \left(-\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}\right)$.

$t = 2 \Rightarrow b = 0$

$a < 0$ – не подходит.

$c > 0$

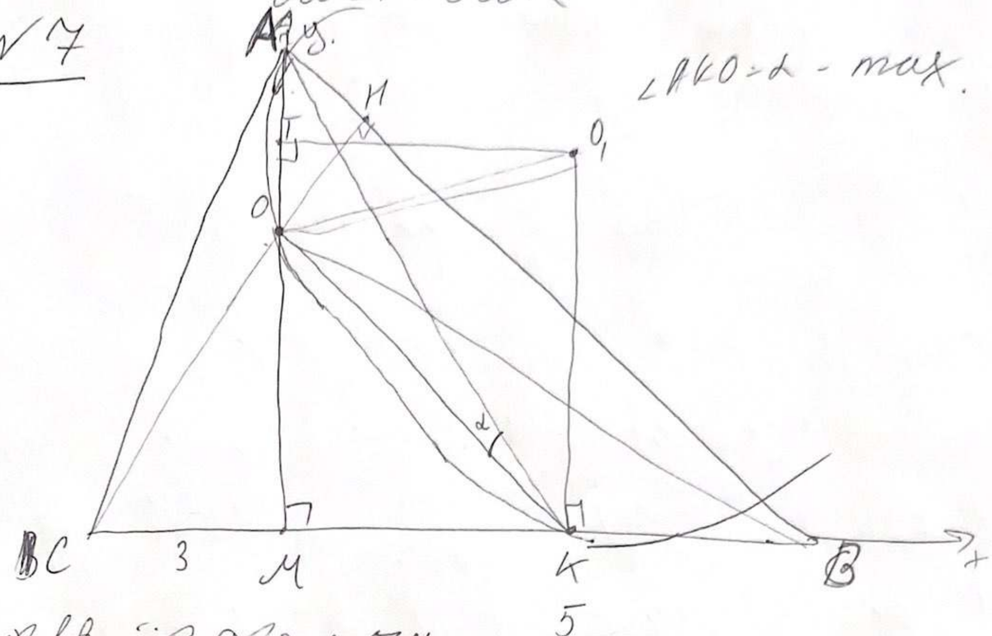
~~Ответ: $t \in \left(2; \frac{5\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}\right) \cup (9; +\infty)$~~

Ответ: $\left(-\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}\right) \cup \left(2; \frac{5\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}\right) \cup (9; +\infty)$.

Чистовик

№7

$\angle AKO = \alpha$ - max.



~~Введём коорд. оси:~~

~~K: (a; 0)~~
~~B: (5; 0)~~
~~C: (-3; 0)~~
A: (0; h)

1) Построим окружность A, O, K с ц. O_1

$\angle AKO = \frac{1}{2}\angle AO_1O = \frac{1}{2}\frac{b}{r} \Rightarrow r\downarrow,\ \angle AO_1O\uparrow,\ \alpha\uparrow$

$\Rightarrow$ найдём раз, когда эта окружн. касается BC.

$O_1T \perp AO$, T – серед. AO, $O_1K \perp CB \Rightarrow$

$\Rightarrow r = MO + \frac{1}{2}OT$; $\angle CTB = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow$ TM – высота $\triangle CTB \Rightarrow h = TM$ в $\triangle CTB$;

$h = \sqrt{3\cdot 5} = \sqrt{15}$ Ответ: $\sqrt{15}$ Лист 12

ЧЕРНОВИК

$$A = \frac{3}{(1\cdot2)^2} + \frac{5}{(2\cdot3)^2} + \dots + \frac{87}{(43\cdot44)^2} + \frac{89}{(44\cdot45)^2}$$

$$B = \frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{(4-2\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)^2}}{\sqrt[3]{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt[6]{2(2-\sqrt{3})(3+1+2\sqrt{3})}}{\sqrt[6]{4}} = \sqrt[6]{\frac{4(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{4}} = \sqrt[6]{4-3} = 1.$$

$$A = \quad \frac{2k+1}{(k(k+1))^2} = \frac{a}{k^2} - \frac{b}{(k+1)^2} = \frac{a(k+1)^2 - bk^2}{(k(k+1))^2} =$$

$$= ak^2 + 2ak + a - bk^2$$

$$a = 1 \quad b = -1. \quad = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{k^2+2k+1-k^2}{(k(k+1))^2}$$

$$A = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{44^2} - \frac{1}{45^2} =$$

$$= 1 - \frac{1}{45^2} < 1$$

ЧЕРНОВИК

$\begin{array}{r} 23 \\ + \quad 4 \\ \hline 92 \end{array}$

$\cancel{19}a_1\ a_2\ \dots\ a_{2020}\ a_{2021}$

19 23
38 46
57 69
76 92
95

$19a_3$

$1\underbrace{9\overset{238}{5}76}\underbrace{9576}\dots$

$2020 : 4. \Rightarrow \boxed{a_{2021} = 6.}$

$f(x) = f(f(f(f(x))))$

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}$ $\quad f(f(x)) = \dfrac{1}{\sqrt[7]{1-\left(\dfrac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}\right)^7}} =$

$\underline{f(f(\dots f(2022)))\dots)))}$

1304.

1304 : 2
652 : 2
326 : 2
163

1302

$= \dfrac{1}{\sqrt[7]{1-\dfrac{1}{1-x^7}}} = \dfrac{1}{\sqrt[7]{\dfrac{1-x^7-1}{1-x^7}}} = \dfrac{1}{\sqrt[7]{\dfrac{x^7}{x^7-1}}} =$

$\dfrac{t-1}{t} = 1 - \dfrac{1}{t}$

$= \dfrac{\sqrt[7]{x^7-1}}{x}$

$= \boxed{x}$

$f(f(f(x))) = \dfrac{1}{\sqrt[7]{1-\left(\sqrt[7]{\dfrac{x^7-1}{x^7}}\right)^7}} = \dfrac{1}{\sqrt[7]{1-\dfrac{x^7-1}{x^7}}} = \dfrac{1}{\sqrt[7]{\dfrac{\cancel{x^7}-\cancel{x^7}+1}{x^7}}} =$

$\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$ ЧЕРНОВИК. $\frac{1}{\sqrt{1+2}}$

$\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}+\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{1+4x^2}+\frac{x^2}{x^2-1}=$

$(2+1)^2+2t+1.$

$=\frac{(x^2+1)+x^2(4x^2+1)}{(4x^2+1)(x^2+1)}=$ $t+1+4t^2+t=-4t^2+1$

$D=4-4\cdot4<0$

$-4t^2+1=0$

$2\,\mathrm{arctg}\sqrt{2}$ $\vee\frac{\pi}{2}$

$\mathrm{arctg}\sqrt{2}>\frac{\pi}{4}$ $4t^2=1$ >0

$\frac{x^2-1+x^2(1-4x^2)}{(1-4x^2)(x^2-1)}=$ $t^2=\frac{1}{4}$

$f'(-\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{1}{1+}$ $=0$ $t=\frac{1}{2}$ $x>0$

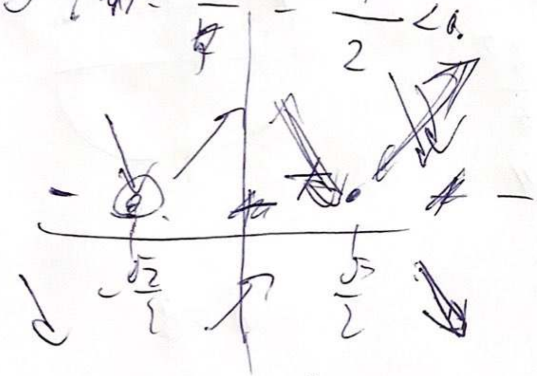
$=x^2-1+x^2-4(x^2)^2=-4x^4+2x^2-1$ $+2\,\mathrm{arctg}\sqrt{2}<\frac{\pi}{2}$

$D=4-4\cdot4<0$ $x^2=\frac{1}{2}$

$f'(1)=\frac{1}{5}-\frac{1}{2}<0.$

$x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\mathrm{arctg}\sqrt{2}<\frac{\pi}{4}$

$\frac{\pi}{4}=\mathrm{arctg}\,1<\mathrm{arctg}\sqrt{2}$



$f'(-1)=$

$f'(\frac{\sqrt{2}}{4})=\frac{1}{1+4\cdot\frac{2}{16}}-\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{2}{16}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}-\frac{1}{1+8}=$

$=\frac{1}{\frac{3}{2}}-\frac{1}{9}=\frac{2}{3}-\frac{1}{9}=\frac{6}{9}-\frac{1}{9}>0$

$x\to\infty:$ $\lim_{x\to\infty}\mathrm{arctg}(2x)-\mathrm{arctg}(-\frac{1}{x})=\frac{\pi}{2}-0>\frac{\pi}{2}$

$x=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$ $\left|\mathrm{arctg}(2\cdot-\frac{\sqrt{2}}{2})-\mathrm{arctg}(+\frac{2}{\sqrt{2}})\right|=\mathrm{arctg}(-\sqrt{2})-\mathrm{arctg}(\sqrt{2})=$

$=|-2\,\mathrm{arctg}(\sqrt{2})|$

ЧЕРНОВИК

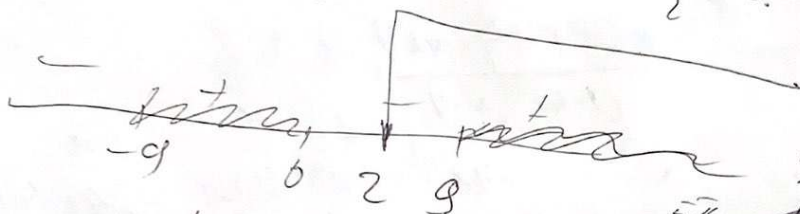
$a = t^3 - 81t = t(t-9)(t+9)$

$b = 11^t - 121$

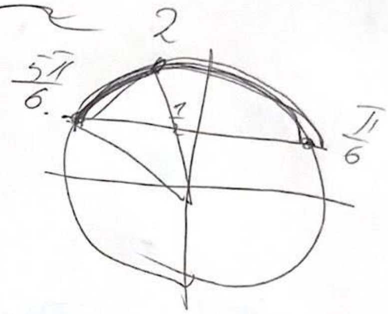
$c = \sin t - \frac{1}{2}.$

$t \geq 2 \Rightarrow 11^t - 121 \geq 0.$

то дост.: $\left[\begin{array}{l} t^3 - 81t > 0 \\ \sin t - \frac{1}{2} > 0 \end{array}\right.$ $\quad t(t-9)(t+9) > 0$ $\quad \sin t - \frac{1}{2} > 0.$



$\sin t > \frac{1}{2}$



$2 < \frac{5\pi}{6}$

$12 < 5\pi$

$\frac{\pi}{6} - 4\pi \vee -9.$

$\frac{\pi - 24\pi}{6} \vee -9 \quad 51$

$4\pi > 9.$

$-23\pi \vee -54$

$23\pi \wedge 54$

$\frac{17\pi}{6} \vee 9.$

$17\pi \vee 54$

$0{,}14 \cdot 17$: $98 + 14 = 2{,}38$ $\quad 2$

$0{,}15 \cdot 17$: $105 + 15 = 2{,}55$ $\quad 3$

$17 \cdot 3 = 30 + 21 = 51$

$+ 0{,}2 \cdot 17 = 3{,}4$

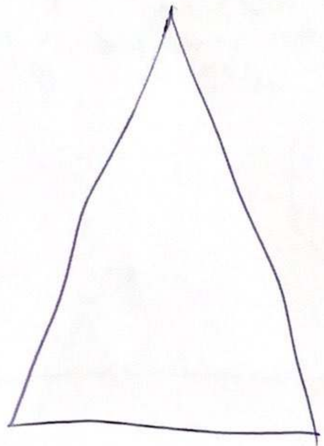
$\frac{5\pi}{6} - 4\pi = \frac{5\pi - 24\pi}{6} = \frac{-19\pi}{6} \vee -9$

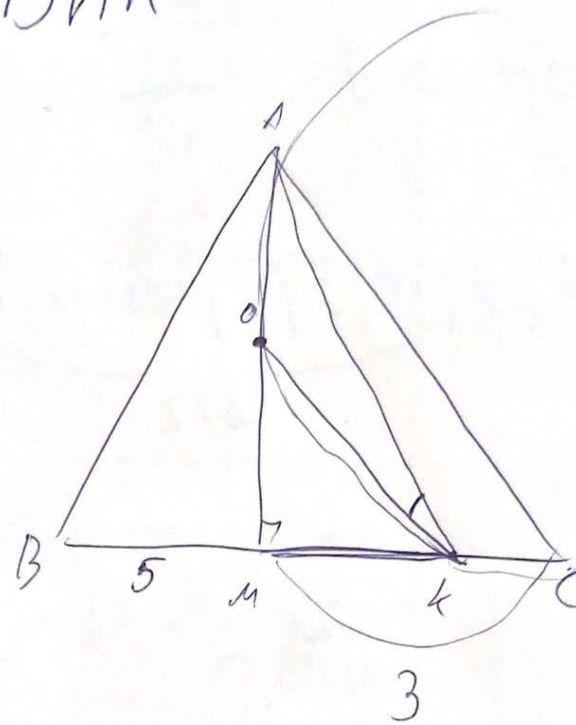
$3{,}14 \cdot 17 \vee 54$

$\frac{\pi}{6} - 2\pi = \frac{\pi - 12\pi}{6} = \frac{11\pi}{...} 19\pi \wedge 54$

$\frac{5 - 12}{6} = -\frac{7\pi}{6}$

ЧЕРНОВИК



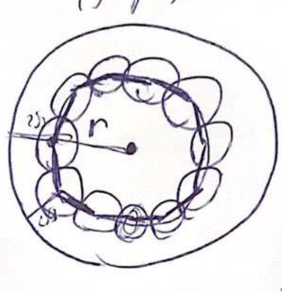


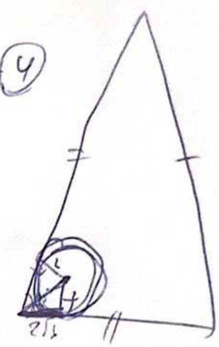
ЧЕРНОВИК

$$f(f(2022)) = \frac{\sqrt[3]{x^7-1}}{x} = \frac{\sqrt[3]{2022^7-1}}{2022}$$

$$f(f(\underbrace{f(f(f(2022)))}_{2022}))$$

13-кр, сост. = 4





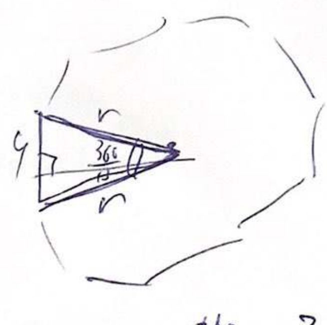
$$\frac{2}{x} = tg30°$$

$$\frac{\sin 30}{\cos 30} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{2}{tg30°} = \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 2\sqrt{3}$$

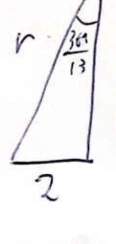
$$l = 2\pi r$$

$$\frac{360}{13}$$



$$r_{окр} = 2\sqrt{3} + \frac{2}{\sin\frac{180}{13}}.$$

$$\frac{360}{26} = \frac{180}{13}$$



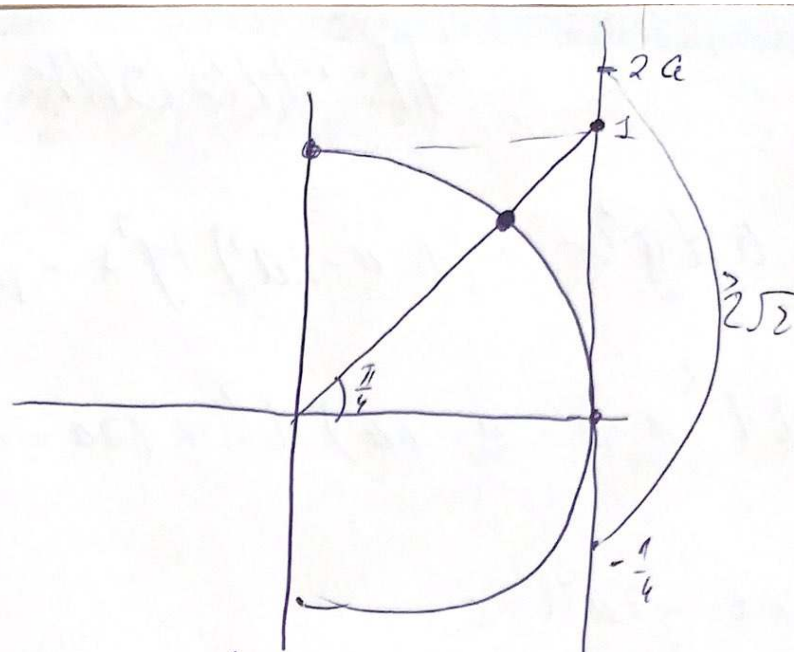
$$\sin\frac{180}{13} = \frac{2}{r}$$

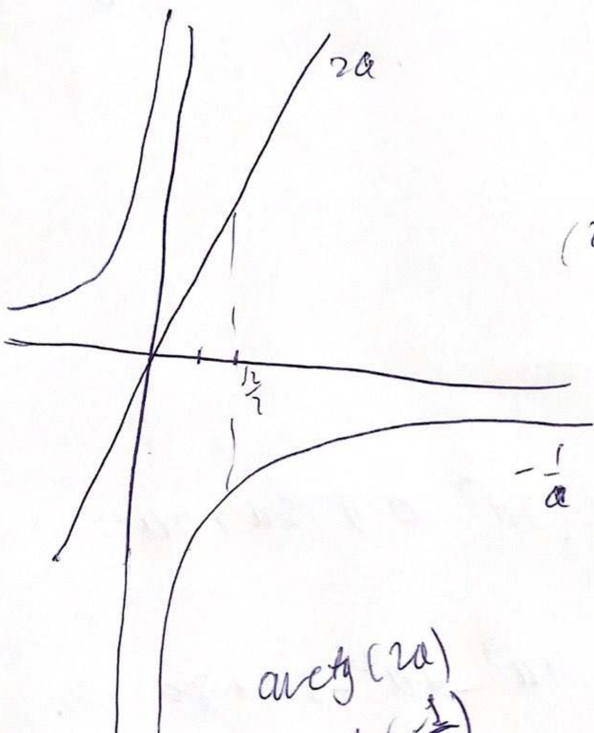
$$r = \frac{2}{\sin\frac{180}{13}}$$

$t = 2a = tg\,x$

$t = 1 = tg\,x$

$t = -\frac{1}{a} = tg\,x$





$(2a + \frac{1}{a}) \to \min$

$2a + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{2a \cdot \frac{1}{a}} = 2\sqrt{2}$ $\quad -2$

$-\frac{1}{a} - 2a \geq 2\sqrt{-\frac{1}{a} \cdot -2a} = 2\sqrt{2}$

$arctg(ax)$

$2a = \frac{1}{a}$

$tg\,x_1 - tg\,x_2 \geq 2\sqrt{2}$

arcsin $\cancel{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}$ $\quad 2a^2 = 1$

arccos

$2a = \sqrt{2}$ $\quad a = \frac{\sqrt{2}}{2}$

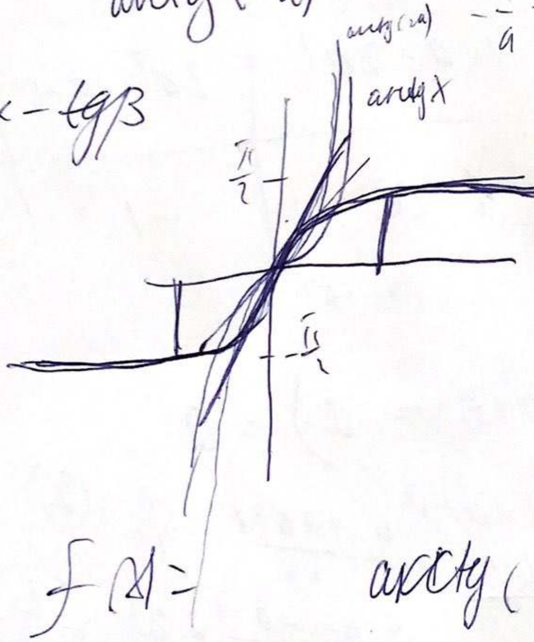
$-\frac{1}{a} = -\sqrt{2}$

$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$arctg(2a)$

$arctg(-\frac{1}{a})$

$tg\,\alpha - tg\,\beta$

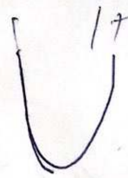


$2a < 1$

$a < \frac{1}{2}$

$\frac{1}{a} > 2$

$-\frac{1}{a} < -2$



$\frac{1}{1+x^2}$

min

$f(x) = arctg(2x) - arctg(-\frac{1}{x})$

ЧЕРНОВИК

$$a\,tg^3x+(1-a-2a^2)\,tg^2x+(2a^2-2a-1)\,tg\,x+2a=0.$$

$$at^3+(1-a-2a^2)t^2+(2a^2-2a-1)t+2a=0.$$

$$at^3-2a^2t^2=0.$$

$$t^2(at-2a^2)=0.$$

$$t=2a.$$

$$a\cdot 8a^3+(1-a-2a^2)\cdot 4a^2+(2a^2-2a-1)\cdot 2a+2a=$$

$$=\cancel{8a^4}+4a^2-\cancel{4a^3}-\cancel{8a^4}+\cancel{4a^3}-\cancel{4a^2}-\cancel{2a}+\cancel{2a}=0.$$

$(t-2a)$

	a	$1-a-2a^2$	$2a^2-2a-1$	$2a$
$2a$	a	$1-a$	-1	$0.$

$2a-2a^2$

$$(t-2a)(at^2+(1-a)t-1)=0.$$

$$D=(1-a)^2+4a=a^2+2a+1=(a+1)^2$$

$$t_{1,2}=\frac{a-1\pm(a+1)}{2a}=\frac{a-1+a+1}{2a}=\frac{2a}{2a}=1$$

$$=\frac{a-1-a-1}{2a}=\frac{-2}{2a}=-\frac{1}{a}$$

ЧЕРНОВИК

ЧЕРНОВИК