МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Багринцев Михаил Алексеевич**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **90**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	10	15	5	15	15	15

Чистовик. ①.

Задача 1. $A = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \ldots + \frac{87}{(43\cdot 44)^2} + \frac{89}{(44\cdot 45)^2}$

$$A = \sum_{n=1}^{44} \frac{2n+1}{(n\cdot(n+1))^2}.$$ ~~Заметим, что~~ $\cancel{\frac{1}{(n+1)^2}}$

Заметим, что $\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{2n+1}{(n\cdot(n+1))^2}$, т.е.

$$A = \sum_{n=1}^{44} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right).$$ Из метода телескопического суммирования, мы знаем, что такая сумма представима в виде разности двух чисел: $A = \frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{44}}\, \frac{1}{45^2} = 1 - \frac{1}{45^2}$. (дело в том, что все остальные эл-ты ~~с-хро~~ сокращаются)

Теперь подумаем о $B = \frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[6]{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt[6]{4}} = \frac{\sqrt[6]{16-12}}{\sqrt[6]{4}} = 1.$

Т.е. $A < 1 = B$.

Ответ: число B больше.

Чистовик. ②

Задача 2. $\overline{\underbrace{1\ldots\ldots}_{2021\text{ значение}}}$ Последняя цифра - ?

Выпишем все двузначные числа, делящиеся на 19 или на 23.

23	19
23	19
46	38
69	57
92	76
	95

Давайте изобразим своеобразный граф, в котором стрелочка идёт от цифры стоящей на n+1 месте в исходном числе к цифре, которое гипотетически может стоять на $n^{\text{ом}}$ месте. Это можно сделать, т.к. мы однозначно можем сказать какие цифры могут идти после каких.

$1 \to 9 \to 2 \to 3 \to 8$ - нет ~~числа~~ двузначного числа, начинающегося на 8, значит этот путь невозможен

$9 \to 5 \to 7 \to 6 \to 9$ зациклились.

Из этого графа мы поняли, что наше число имеет вид.

$\overline{195769576 9\ldots}$

Цикл длины 4, значит имеет смысл посмотреть число 2021 по mod4.

~~2021 ≡ 4 (mod~~ $2021 \equiv 1 \pmod 4$, значит ~~2021 ≡ ...~~ цифра числа, стоящая на $2017^{\text{ая}}$ месте совпадает с первой цифрой числа.

1 9 5 7 6 9 цифра

2021 2020 2019 2018 2017 место.

Значит первая цифра равна 6.

Ответ: 6.

Чистовик.

③

Задача 3. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}$. $\underbrace{f(f(\dots f(2022)\dots))}_{1304} = ?$

Применим несколько раз ф-ию f в ~~идее~~ надежде на то, что когда-то зациклимся.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}} \quad - 1 \text{ раз}.$$

$$f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-\frac{1}{1-x^7}}} = \frac{1}{\frac{x}{\sqrt[7]{x^7-1}}} = \frac{\sqrt[7]{x^7-1}}{x} \quad - 2 \text{ раз}.$$

$$f(f(f(x))) = \frac{\sqrt[7]{\frac{1}{1-x^7}-1}}{\frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}} = \frac{\frac{x}{\sqrt[7]{1-x^7}}}{\frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}} = x. \quad - 3 \text{ раз}.$$

Повезло, мы зациклились на 3ем применении f~~, т.е. 3 раза применения~~

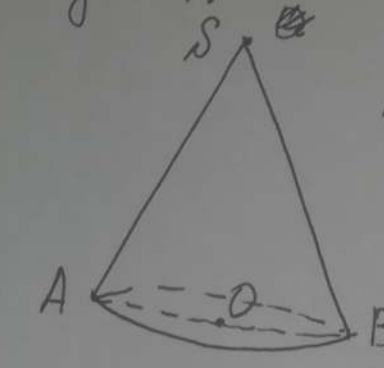
~~ф-ию f на~~ Т.е. $f(f(f(x))) = x$.

Тогда, т.к. $1304 \equiv 8 \equiv 2 \pmod 3$, то $f(f(\dots f(f(2022))\dots)) =$

$$= f(f(2022)) = \frac{\sqrt[7]{2022^7-1}}{2022}.$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt[7]{2022^7-1}}{2022}$

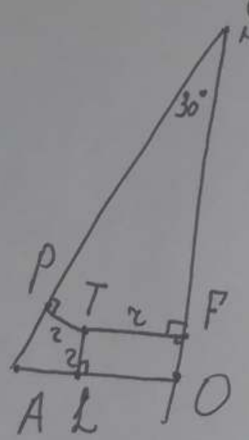
Задача 4.



R-?

Т.к. шары ~~кат~~ касаются между собой и боковой поверхности конуса, то ~~шары~~ центры шаров образуют правильный тринадцатиугольник.
(Также можно объяснить симметрией отн-но поворота отн-но SO на $\frac{2\pi}{13}$).

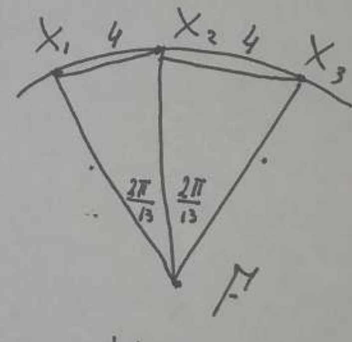
Рассмотрим осевое сечение (ASO).



T – центр одной из сфер

TF – радиус правильного ~~...~~ тринадцатиугольника

Вычислим радиус TF.

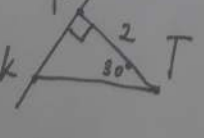


$X_i X_{i+1}$ – сторона правильного $13^{\text{ти}}$-угольника и равна двум радиусам ~~с~~ шаров.

$X_2F = X_3F = TF = r.$

По $\underline{Th.}$ Косинусов для $\Delta^{\text{ка}}$ X_2X_3F имеем $16 = 2r^2\left(1-\cos\frac{2\pi}{13}\right)$, откуда
$$r = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1-\cos\frac{2\pi}{13}}}$$

Продлим FT до $\cap^{\text{ия}}$ с SA в точке k



$kT = \frac{2}{\cos 30°} = \sqrt{3}$

Т.е. $kF = \sqrt{3} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1-\cos\frac{2\pi}{13}}}$

Тогда $SF = \operatorname{ctg} 30° \cdot \left(\sqrt{3} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1-\cos\frac{2\pi}{13}}}\right) = 3 + \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{1-\cos\frac{2\pi}{13}}}$

$$SO = SF + TL = 2 + SF = 5 + \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{1-\cos\frac{2\pi}{13}}}.$$ Чистовик

$$\triangle SFT \sim \triangle SOA \Leftrightarrow \frac{AO}{FT} = \frac{SO}{SF}$$

$$R = AO = \frac{FT\cdot SO}{SF} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1-\cos\frac{2\pi}{13}}}\cdot\left(\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{1-\cos\frac{2\pi}{13}}}+5\right)}{3+\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{1-\cos\frac{2\pi}{13}}}} = \frac{\frac{8\sqrt{3}}{1-\cos\frac{2\pi}{13}}+\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{1-\cos\frac{2\pi}{13}}}}{3+\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{1-\cos\frac{2\pi}{13}}}}$$

$$= \frac{\frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{1-\cos\frac{2\pi}{13}}}+10\sqrt{2}}{3\sqrt{1-\cos\frac{2\pi}{13}}+2\sqrt{6}} = \frac{8\sqrt{3}+10\sqrt{2}\cdot\sqrt{1-\cos\frac{2\pi}{13}}}{3\left(1-\cos\frac{2\pi}{13}\right)+2\sqrt{6}\cdot\sqrt{1-\cos\frac{2\pi}{13}}} =$$

$$= \frac{8\sqrt{3}+10\sqrt{2-2\cos\frac{2\pi}{13}}}{3-3\cos\frac{2\pi}{13}+2\sqrt{6-6\cos\frac{2\pi}{13}}}.$$

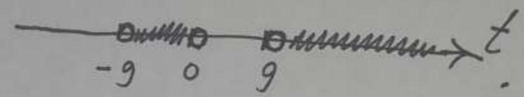
Ответ: $$\frac{8\sqrt{3}+10\sqrt{2-2\cos\frac{2\pi}{13}}}{3-3\cos\frac{2\pi}{13}+2\sqrt{6-6\cos\frac{2\pi}{13}}}.$$

Задача 5. Чистовик ⑥

Если среднее ~~четырёх~~ из 3-х чисел положительно, то и больше, либо равное положительно $\Rightarrow$ два числа должны быть больше нуля.

$a = t^3 - 81t > 0$

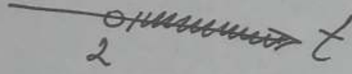
$t(t-9)(t+9) > 0$



$b = 11^t - 121 > 0$

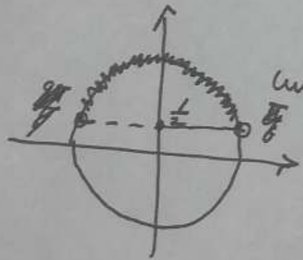
$11^t > 121$

$t > 2$

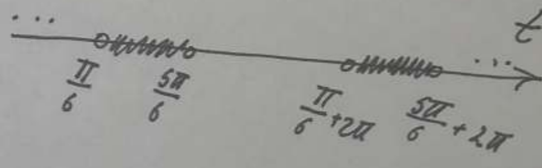


$c = \sin t - \frac{1}{2} > 0$

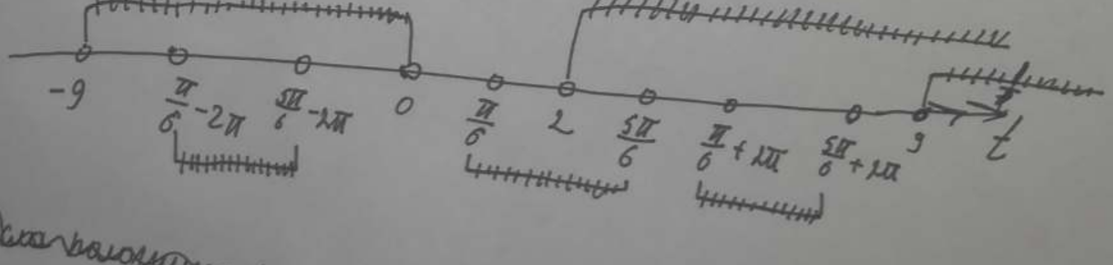
$\sin t > \frac{1}{2}$



или же



$t \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}.$



~~Числа положительны на промежутке~~

Чистовик. ⑦.

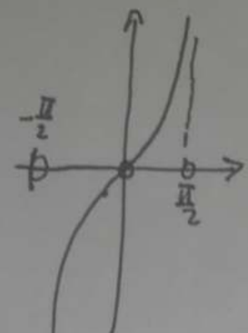
(2 числа положительны на промежутках (

$t \in \left(-\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}\right) \cup \left(2; \frac{5\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}\right) \cup (9; +\infty)$.

Ответ: $\left(-\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}\right) \cup \left(2; \frac{5\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}\right) \cup (9; +\infty)$.

Задача 6. Чистовик

$a \in \mathbb{R}$.

График $tg\,x$ 

. Если есть у уравнения от $tg\,x$, и корень $tg\,x \geq 1$ и корень $tg\,x \leq 0$, то расстояние не меньше $arctg(1) - arctg(0) = \frac{\pi}{4}$.

Функция $f(tg\,x) = a \cdot tg^3 x + (1 - a - 2a^2) \cdot tg^2 x + (2a^2 - 2a - 1) \cdot tg\,x + 2a = 0$.

~~Заметим $f(1) = a$~~ Заметим $f(1) = 0$, значит $f(t)$ можно переписать как

$$f(tg\,x) = (tg\,x - 1) \cdot (a \cdot tg^2 x + (1 - 2a^2) \cdot tg\,x - 2a)$$

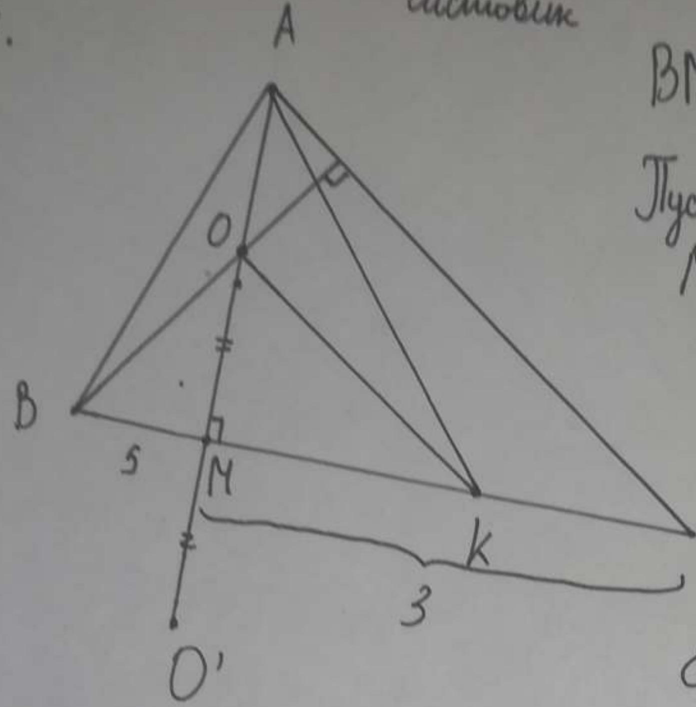
$$f(tg\,x) = (tg\,x - 1) \cdot \left(tg\,x + \frac{1}{a}\right) \cdot (tg\,x - 2a) \cdot a \Rightarrow$$

есть корень меньше или равный 0 и корень 1 $\Rightarrow$ расстояние не меньше $\frac{\pi}{4}$.

Если $a = 0$, то $f(tg\,x) = tg^2 x - tg\,x = tg\,x(tg\,x - 1) \Rightarrow$ расстояние равно $\frac{\pi}{4}$.

Ответ: $\frac{\pi}{4}$.

Задача 7. Чистовик ⑨



$BM = 5$, $MC = 3$

Пусть O' симметрична O отн-но M. Тогда ~~B, M, A, C~~ B, A, C, O' на одной окр-ти, откуда
$$BM \cdot MC = AM \cdot MO' = AM \cdot MO = 15.$$

Если $\angle OKA$ максимален, то $\sin(\angle OKA)$ также максимален.

$$\sin(\angle OKA) = \frac{\sin(\angle OAK)\cdot OA}{OK} \text{ (по Th. Синусов)} = \frac{MK \cdot OA}{AK \cdot OK} = OA \cdot \frac{MK}{\sqrt{AM^2 + MK^2}\cdot\sqrt{KM^2 + MO^2}} = OA \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{AM^2 \cdot KM^2}{MK^2} + MK^2 + AM^2 + OM^2}} \leq \frac{OA}{\sqrt{2\cdot AM \cdot OM \cdot AM^2 \cdot OM^2}} = \frac{OA}{AM + OM},$$
где $\frac{AM^2 \cdot KM^2}{MK^2} + MK^2$ от точки K ничего не зависит и равно ~~[illegible]~~ неравенство будет при
$$\frac{AM^2 \cdot KM^2}{MK^2} + MK^2 = 2AM \cdot OM \Rightarrow MK = \sqrt{AM \cdot OM} = \sqrt{15}.$$

Ответ: $\sqrt{15}$.

~~Чистовик~~ Черновик. ①

Отдельная нумерация для черновиков и чистовиков. Каждый нужно подписывать.

1.) $\frac{3}{(1\cdot 2)^2}+\frac{5}{(2\cdot 3)^2}+\ldots+\frac{87}{(43\cdot 44)^2}+\frac{89}{(44\cdot 45)^2} \vee \frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}.$

$43\cdot 2=86+1.$

$\cancel{\frac{n+?}{(n(n+1))^2}+\ldots}$

$\frac{1}{(n(n+1))^2}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{n+1-n}{n(n+1)}=\frac{1}{n(n+1)}$

$\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{(n+1)^2-n^2}{(n+1)^2\cdot n^2}=\frac{2n+1}{((n+1)n)^2}.$

$\frac{3}{(1\cdot 2)^2}+\frac{5}{(2\cdot 3)^2}+\ldots+\frac{89}{(44\cdot 45)^2}=1-\frac{1}{45^2}.$

$\frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}.$

$\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}=\left(\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}}\right).$

$4=16-4\cdot 3=\frac{\sqrt[6]{4}}{\sqrt[3]{2}}=1.$

Черновик

19і

$\underbrace{1\ldots\ldots}_{2021 \text{ знач.}}$

Числа дел на

23	19
23	19
~~46~~ 46	38
69	57
92	76
	95.

$$\begin{array}{r} \times 69 \\ 23 \\ \hline 92 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 38 \\ 19 \\ \hline 57 \end{array} \quad \begin{array}{r} \times 38 \\ 2 \\ \hline 76 \end{array}$$

~~80~~

80

$80+a \underset{19}{\equiv} 4+a$

$80+a \underset{23}{\equiv} 11+a.$

$19 \to 92$

$1 \to 9 \to 2 \to 3 \to 8$

$9 \to 5 \to 7 \to 6 \to 9$

3.) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}$.

$$\underbrace{f(f(f(\ldots(f(x)))))}_{2022} = ?$$

$-1+x^7$

1304

$$\frac{1}{\sqrt[7]{1-\left(\frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}\right)^7}} = \frac{1}{\sqrt[7]{1-\frac{1}{1-x^7}}} = \frac{1}{\sqrt[7]{\frac{1-x^7-1}{1-x^7}}} = \frac{1}{\frac{x}{\sqrt[7]{x^7-1}}} = \frac{\sqrt[7]{x^7-1}}{x}$$

$$\frac{\sqrt[7]{\frac{1}{1-x^7}-1}}{\frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}} = \frac{\frac{x}{\sqrt[7]{1-x^7}}}{\frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}} = x.$$

$1304 \underset{3}{\equiv} 8 \underset{3}{\equiv} 2.$

$$\frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}} \to \frac{\sqrt[7]{x^7-1}}{x} \to x \to \frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}$$

1 1 1

13

Черновик

$\frac{\pi}{6} - 2\pi = \frac{\pi}{6} - \frac{12\pi}{6} = -\frac{11\pi}{6}$

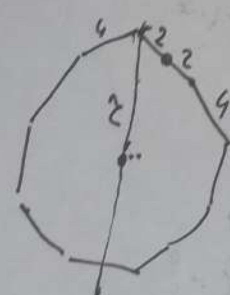
$-\frac{7\pi}{6}$.

$\frac{\pi}{6} + 2\pi =$

R-?

Центры шаров образуют правильный

$a\,tg^3x + (1-a-2a^2)\,tg^2x$ $13^{ти}$-угольник.

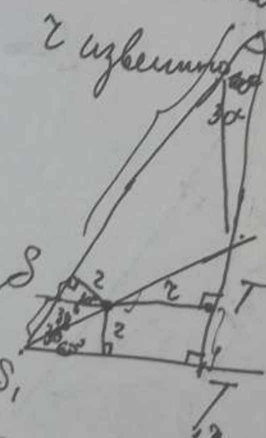


a, b, c

достаточно и необход.

положительности $2^х$ чисел.

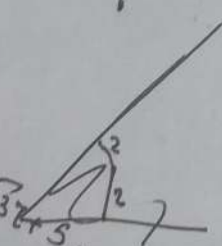
r известно



$KT = ctg30° \cdot (r+\sqrt{3}) =$

$= \sqrt{3}(r+\sqrt{3})$

$TT_1 = 2 \Rightarrow KT_1 = \sqrt{3}r + 5.$



$TS = r + \frac{2}{\cos 30°} =$

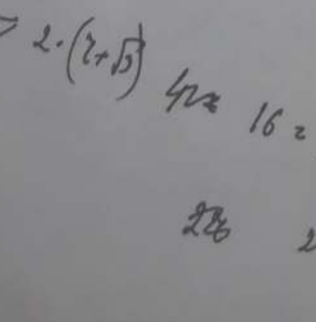
$= r + \frac{2}{\frac{2}{\sqrt{3}}} = r + \sqrt{3}$

r-?

A, ок.

$\frac{360°}{13}$

$\frac{2\pi}{13}$



$SK = 2 \cdot (r+\sqrt{3})$

$16 = 2r^2 - 2r^2 \cdot \cos\frac{2\pi}{13}.$

$2r^2 = \frac{16}{1-\cos\frac{2\pi}{13}}$

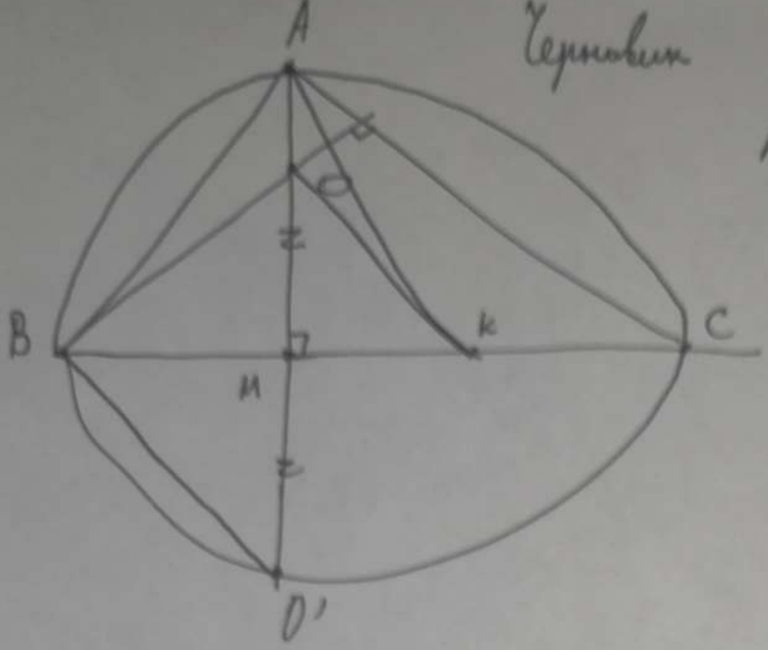
$r = \sqrt{\frac{8}{1-\cos\frac{2\pi}{13}}}$

$r = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1-\cos\frac{2\pi}{13}}}.$

30°

$\frac{1}{a} + (\frac{1}{a} + 2a) - 2a = 0.$

Черновик



$BM \cdot MC = AM \cdot MO' = AM \cdot MO$

A, O, окл...

$$a\,tg^3x + (1-a-2a^2)\cdot tg^2x + (2a^2-2a-1)\,tg\,x + 2a = 0.$$

$tg\,x$ на $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ возр. $tg\,x = 1$

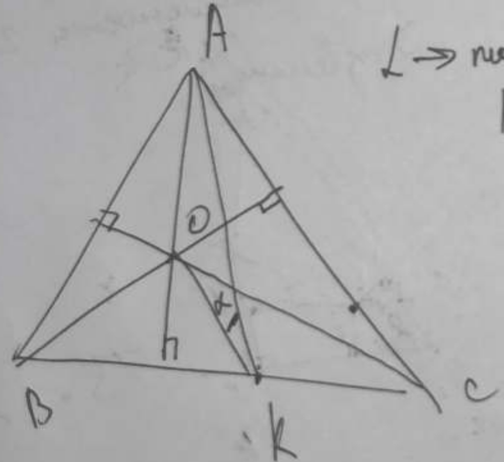
$tg = 0.$

Черновик

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}$$

$$f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-\frac{1}{1-x^7}}} = \frac{1}{\sqrt[7]{\frac{1-x^7-1}{1-x^7}}} = \frac{\sqrt[7]{1-x^7}}{-x}.$$

$$\frac{1}{\sqrt[7]{1+\frac{1-x^7}{+x^7}}} = \frac{1}{\sqrt[7]{\frac{x^7+1-x^7}{x^7}}} = x.$$

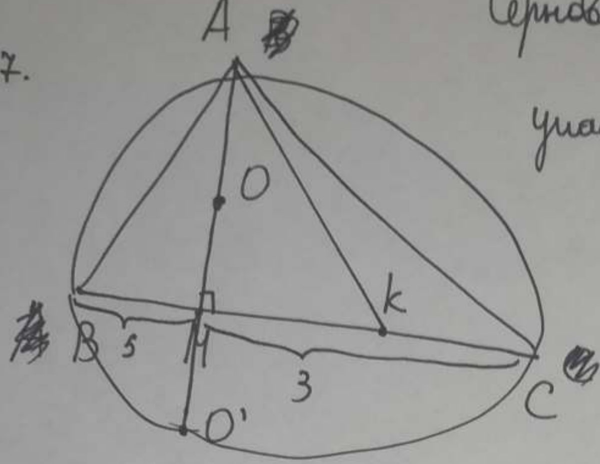


$\angle \to \max$

$MK - ?$

Задача 7.

Черновик



удал ..