МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Беляев Роман Дмитриевич**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **85**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	10	15	15	0	15	15

Чистовик 1

1.

Решение:

$\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}} = \sqrt[6]{1+2\sqrt{3}+3} = \sqrt[6]{(1+\sqrt{3})^2} = \sqrt[3]{|1+\sqrt{3}|} = \sqrt[3]{1+\sqrt{3}}$, т.к. $1+\sqrt{3}>0$,

тогда $A = \dfrac{\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{\sqrt[3]{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = 1.$

Заметим, что каждое слагаемое числа $B = \dfrac{3}{(1\cdot 2)^2} + \dfrac{5}{(2\cdot 3)^2} + \ldots + \dfrac{119}{(59\cdot 60)^2}$ имеет вид $\dfrac{2k+1}{k^2\cdot(k+1)^2}$ при $k=\overline{1,59}$, тогда $\dfrac{2k+1}{k^2\cdot(k+1)^2} = \dfrac{1}{k^2} - \dfrac{1}{(k+1)^2}$, откуда имеем,

$B = \dfrac{1}{1^2} - \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^2} - \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{3^2} - \dfrac{1}{4^2} + \ldots + \dfrac{1}{58^2} - \dfrac{1}{59^2} + \dfrac{1}{59^2} - \dfrac{1}{60^2} = \dfrac{1}{1^2} - \dfrac{1}{60^2} = 1 - \dfrac{1}{60^2}$,

т.к. все слагаемые взаимно уничтожаются, кроме 1 и последнего.

$B = 1 - \dfrac{1}{60^2} < 1 = A \Rightarrow A > B.$

Ответ: A.

Сканировано с CamScanner

2.

Решение:

Рассмотрим все двузначные числа, которые делятся на:

19 : 19, 38, 57, 76, 95 ;

23 : 23, 46, 69, 92. (*)

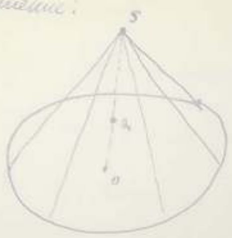
Значит, все двузначные числа, образованные соседними цифрами числа должны совпадать с выше перечисленными. Первая цифра $4_{,} \Rightarrow$ 2 цифра – 6, т.к. есть только одно число из ряда (*), которое может начинаться на 4, аналогично однозначно восстанавливаем первые 3 цифры: 469...

Далее есть 2 варианта: 1) после 9 идет 2, тогда имеем: 469238..., но ни одно число ряда (*) не начинается с 8 ⇒ не подходит случай;

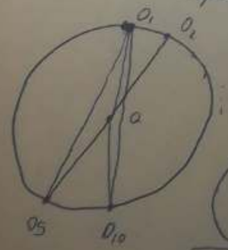
2) после 9 идет 5: 4695769..., мы вновь пришли к цифре 9, значит, мы зациклились в цифрах, т.е. после каждой 9 идут цифры: 5,7,6,9,... . В одном цикле 4 цифры. Имеем: $2022 = 3 + 4 \cdot 504 + 3$, т.к. перед ~~зацы~~ зацикливанием есть 3 цифры 4,6,9, то в конце остается неполный цикл, содержащий 3 цифры: 5,7,6. Значит, последняя цифра – 6.

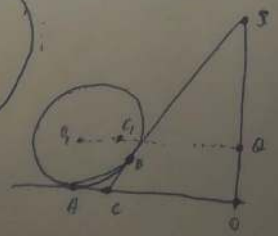
Ответ: 6.

4. Решение:



Т.к. шары касаются боковой ~~части~~ поверхн. конуса, ~~то~~ и плоскости основания (назовем ее α), то они расположены в одной части пространства с S (S - вершина конуса, O - центр основания).
Обозначим $O_1, \dots, O_{17}$ - центры 1, 2, …, 17 шара соотв.
Они касаются α ⇒ расстояние от O_i до α равно r.
Значит, $O_i \in \beta$ - плоскости, находящейся на рассот. r от α и пересекающей отрезок SO в т. Q. В силу симметрии конуса, $O_1Q = O_2Q = \dots = O_{17}Q$.
Значит, $O_1, \dots, O_{17}$ лежат на окр. ω с центром Q и радиусом r.
~~Пусть 1 шар пересекает α в т. A, тогда~~
Имеем правильный 17-угольник, сторона которого равна расстоянию между центрами касающихся шаров, т.е. $r + r = 4$. Найдем r по т. синусов для $\triangle O_1O_9O_{10}$.
Где $\angle O_1QO_2 = \angle O_2QO_1 = \dots = \angle O_{17}QO_1 = \frac{2\pi}{17}$. Тогда $2r = \frac{O_9O_{10}}{\sin\angle O_9O_1O_{10}} = \frac{O_9O_{10}}{\sin\frac{1}{2}\angle O_9QO_{10}} = \frac{4}{\sin\frac{\pi}{17}} \Rightarrow r = \frac{2}{\sin\frac{\pi}{17}}$.
Пусть 1 шар пересекает α в т. A, тогда рассм. плоск. γ - (SOA), заметим, что если C - т. пересечения основания конуса и OS, то $C \in \gamma$, $SO \perp \alpha \Rightarrow O_1 \in \gamma$, т.к.





$O_1A \perp \alpha$, $A \in \gamma$; B - т. касания шара 1 и конуса, тогда $B \in SC \Rightarrow B \in \gamma$.
$\angle CSO = \frac{1}{2}60^\circ = 30^\circ \Rightarrow \angle BCO = 60^\circ \Rightarrow \angle ACB = 120^\circ$.
$\angle O_1AC = \angle CBO_1 = 90^\circ$, т.к. CA и CB - касательные ⇒ AO_1BC - вписанный ⇒ $\angle AO_1B = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ \Rightarrow \triangle AO_1B$ - равносторонний ⇒ $AB = 2$,
(Продолжение)

4. (продолжение) Чистовик 4

Найдем AC по т. косинусов для $\triangle ABC$: $AC = CB = x$;

$AB^2 = 4 = 2x^2 + 2x^2 \cdot \frac{1}{2} = 3x^2 \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Пусть $C_1 \in O_1Q$ и $CC_1 \perp \alpha$, тогда спроектировав O_1Q на AO имеем:

$AO = r$, $C_1 \to C$. Тогда R (радиус основания конуса), $R = r - OC = \frac{2}{\sin\frac{\pi}{17}} - \frac{2}{\sqrt{3}}$

Ответ: $R = \frac{2}{\sin\frac{\pi}{17}} - \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Решение: Обозначим $t = ctg\, x$, тогда имеем:

$$at^3 + (2a^2 - a - 2)t^2 + (2 - 4a - 2a^2)t + 4a = 0 \quad (*)$$

Заметим, что $t = 1$ - корень, тогда:

$$
\begin{array}{r|l}
at^3 + (2a^2 - a - 2)t^2 + (2 - 4a - 2a^2)t + 4a & t-1 \\
\hline
-\;at^3 - at^2 & at^2 + (2a^2-2)t - 4a \\
(2a^2-2)t^2 & \\
-\;(2a^2-2)t^2 - (2a^2-2)t & \\
-4at + 4a &
\end{array}
$$

Т.е. исходное ур-е равносильно следующему:

$(t-1)(at^2 + (2a^2-2)t - 4a) = 0$

Рассмотрим случаи:

1) $a = 0$, тогда $(*) \Leftrightarrow -2t^2 + 2t = 0 \Leftrightarrow t(t-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{4} \end{array}\right.$ при $x \in (0; \pi)$,

Это единственные корни и расст. между ними равно $\frac{\pi}{4}$.

2) $a \neq 0$, докажем, что случай не годится, т.к. наиб. расстояние будет больше $\frac{\pi}{4}$. Пусть это не так, тогда:

$(t-1)(at^2 + (2a^2-2)t - 4a) = 0$ $|:a$, можно, т.к. $a \neq 0$.

$\Leftrightarrow$

$(t-1)(t^2 + (2a - \frac{2}{a})t - 4a) = 0$

$\Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t^2 + (2a - \frac{2}{a})t - 4 = 0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow$

По т. Виета заметим, что $-2a$ и $\frac{2}{a}$ - корни уравнения $t^2 + (2a - \frac{2}{a}) - 4 = 0$, тогда

$\left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -2a \\ t = \frac{2}{a} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} \\ ctg\, x_1 = -2a \\ ctg\, x_2 = \frac{2}{a} \end{array}\right.$

Расстояние между $\frac{\pi}{4}$ и $x_1 > \frac{\pi}{4}$ и $x_2 < \frac{\pi}{4}$ по предположению $\Rightarrow x_1 \in (0; \frac{\pi}{2})$, $x_2 \in (0; \frac{\pi}{2}) \Rightarrow ctg\, x_2, ctg\, x_1 > 0 \Rightarrow$

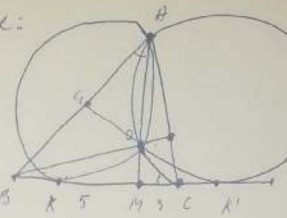
$\Rightarrow ctg\, x_1 \cdot ctg\, x_2 > 0$, но $ctg\, x_1 \cdot ctg\, x_2 = -2a \cdot \frac{2}{a} = -4 < 0$ - противоречие $\Rightarrow$ предположение неверно и наиб. расст. между корнями достигается при $a = 0$.

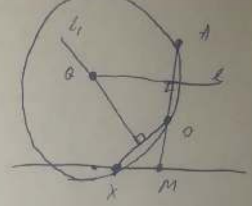
Ответ: 0.

5.

7. Шлемович 6

Решение:





Пусть K и K' - точки пересечения отрезков BM и луча MC с окружн. $(M; \sqrt{15})$, тогда т.к. $\sqrt{15} < 5 \Rightarrow K \in [BM]$, $\sqrt{15} > 3 \Rightarrow K' \notin [MC]$, но $K' \in MC$ - луч.

Пусть CC_1 - высота $\triangle ABC$, тогда $\angle BCC_1 = 90^\circ - \angle B = \angle BAM \Rightarrow$ $\Rightarrow \angle MCO = \angle BCC_1 = \angle BAM \Rightarrow \triangle MAB \sim \triangle MCO$ по 2 углам, т.к. $\angle AMB = \angle OMC = 90^\circ$.

Отсюда верно: $\frac{MA}{MB} = \frac{MC}{MO} \Rightarrow MO \cdot MA = MC \cdot MB = 3 \cdot 5 = 15$.

Но $MK^2 = MK'^2 = 15 \Rightarrow$ $MK^2 = MO \cdot MA = MK'^2 \Rightarrow$ окр.-и (AOK) и (AOK') касаются BC. Докажем, что если произвольная точка X лежит на луче MK или MK', то $\angle AXO < \angle AKO = \angle AK'O$.

Обозначим $(AKO) - \omega$. ~~Пусть X лежит~~. Понятно, что если X лежит на луче KB или на луче CK' за т. K', то (рассмотрим 1 случай, второй разбирается аналогично, только для т. K', а не т. K) если $XO \cap \omega = Z$, $XA \cap \omega = Y$, очевидно, что $Y, Z \in \cup OKA$, т.к. $X \in (KB)$. Тогда $\angle AXO = \frac{1}{2}(\cup OA - \cup YZ) < \frac{1}{2}\cup OA = \angle AKO \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \angle AXO < \angle AKO$ (во 2 случае: $\angle AXO < AK'O$) разбирается аналогично). При $X \in (KM)$ (или $X \in (MK')$ - имеем, что если Q - центр окр. (AOX), то Q лежит на сер. пер. ℓ к AO и на сер. пер. ℓ к OQ, тогда при приближении т. X к M вдоль KM, (обозначим сер. пер. к OA - ℓ, к OX - ℓ_1), получаем, что $\angle(\ell_1, BC)$ - ~~увеличивается~~ ~~уменьшается~~ уменьшается непрерывно, т.к. непрерывно увеличивается $\angle OXM \Rightarrow \angle(\ell_1, \ell) = \angle(\ell_1, BC)$, т.к. $\ell_1 \perp AO$, $AO \perp BC \Rightarrow \ell \parallel BC$, тоже непрерывно уменьшается $\Rightarrow$ радиус окр. (AOX) непрерывно увеличивается при X, движ. к $M \Rightarrow$ т.к. AO неизменна, то $\frac{1}{\sin\angle AXO} = \frac{2R}{AO}$ тоже увеличивается $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ т.к. $\angle AXO < 90^\circ$, то $\angle AXO$ уменьшается $\Rightarrow$ (во 2 случае аналогично) $\Rightarrow \angle AKO$ - наибольший $\Rightarrow$ $\Rightarrow MK = \sqrt{15}$.

Ответ. $\sqrt{15}$.

3.

Чистовик №7

Решение:

$$f(f(x)) = \sqrt[7]{\frac{1}{1-\frac{1}{1-x^7}}} = \frac{-\sqrt[7]{1-x^7}}{\sqrt[7]{x^7}} = \frac{-\sqrt[7]{1-x^7}}{x}$$

$$f(f(f(x))) = \sqrt[7]{\frac{1}{1-\left(\frac{-\sqrt[7]{1-x^7}}{x}\right)^7}} = \sqrt[7]{\frac{1}{1+\frac{1-x^7}{x^7}}} = x.$$

Значит, $f(f(f(x))) = x$, отсюда, введя функцию $g(x) = \underbrace{f(\ldots(f}_{1304}(x))\ldots)$ получаем:

$g(x) = \underbrace{f(f(\ldots(f}_{1304}(x))\ldots) = \underbrace{f(f(\ldots(f}_{1304-3=1301}(x))\ldots) = \underbrace{f(f(\ldots(f}_{1301-3=1298}(x))\ldots) = \ldots = f(f(x))$, т.к. $1304 \equiv_3 2$.

Отсюда искомое число $g(2022) = f(f(2022)) = \frac{\sqrt[7]{2022^7-1}}{2022}$.

Ответ: $\frac{\sqrt[7]{2022^7-1}}{2022}$.

Черновик 1

$$\frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}} \qquad \frac{1}{1-\ldots}$$

$$f(f(x)) = \sqrt[7]{\frac{1}{1-\frac{1}{1-x^7}}} = \sqrt[7]{\frac{1-x^7}{-x^7}} = \frac{\sqrt[7]{1-x^7}}{-x}$$

$$f(f(f(x))) = \cancel{\sqrt[7]{\frac{x^7}{1-x^7}}} = \sqrt[7]{\frac{1}{1+\frac{1-x^7}{x^7}}} = \cancel{\frac{x}{2x^7-1}}\sqrt[7]{\frac{x^7}{1}} = x.$$

1304 $\quad f(f(f(f(x)))) = f(x) \quad x$

-3

$1301 - 900 = 401 - 300 = 101$

$101 - 90 = 11 - 9 = 2$

$(1+\sqrt{3})^2$

$$\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}-1} =$$

$$= \sqrt[3]{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \sqrt[3]{2}$$

$A = 1.$

~~3600 = 12~~ $\quad 3600 = 1200 \cdot 3 = 12 \cdot 12 \cdot 50$

$$B = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \ldots + \frac{117}{(58\cdot 59)^2} + \frac{119}{(59\cdot 60)^2} \vee 1$$

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \frac{7}{144}$$

$3\cdot 36 = 108$

$$\frac{108}{144} + \frac{20}{144} + \frac{7}{144} = \frac{135}{144} = \frac{50\cdot 135}{3600}$$

$\times 135$
50
6750

$$\left(\frac{A}{k(k+1)}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{A}{k} + \frac{A}{k+1}\right)^2 =$$

$$\frac{9}{(4\cdot 5)^2} = \frac{9}{400} = \frac{81}{3600} \qquad \frac{9}{400} < \frac{9}{144}$$

$19_y 23$

$$\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}$$

$$= \frac{B}{k^2} \quad \frac{}{(k+1)^2}$$

$$(k^2+2k+1)\cdot B - k^2 B =$$
$$= (2k+1)\cdot B$$

$$B = \frac{1}{1} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{58^2} - \frac{1}{59^2} + \frac{1}{59^2} - \frac{1}{60^2} =$$

$$= 1 - \frac{1}{60^2} < 1 = A.$$

Черновик №2

$\sqrt{\frac{1}{1-x^7}}$

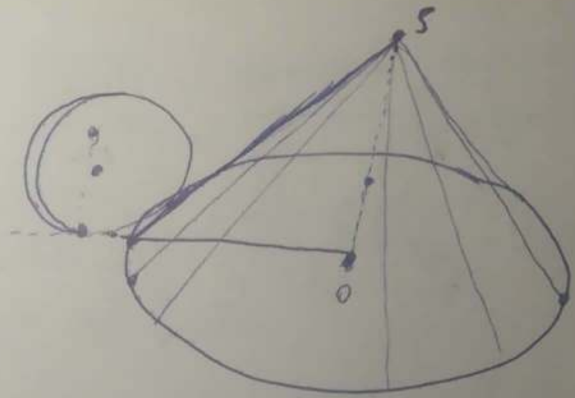
19, 23

19, 38, 57, 76, 95

23, 46, 69, 92

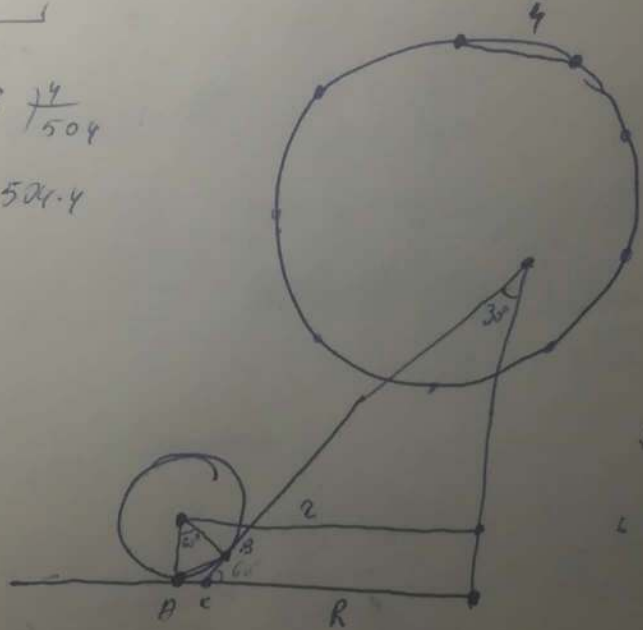
4669 $\quad\overline{2}38$ не м.б.

5269, 4



$$\begin{array}{r|l} 2016 & 4 \\ \underline{20} & \overline{504} \\ 0 & \end{array}$$

504·4



17-уг.

$\frac{360}{17}$

1) $r=?$

2) $DC=?$

3) $R=r-DC$.

$AB=2$;

$\frac{8}{2}=4$

$\frac{18}{2}=9$, 10

Черновик 3

$a \cdot ctg^3 x + (2a^2 - a - 2) ctg^2 x + (2 - 4a - 2a^2) \cdot ctg x + 4a = 0$

$x_i \in (0; \pi)$

$\frac{\pi}{4}$

$t = ctg x$; $at^3 + (2a^2 - a - 2) t^2 + (2 - 4a - 2a^2) t + 4a = 0$

$a(t-1)(at^2 - \quad -4) = 0$

$a = 0$

~~$t - 1 - 2t = 0$~~

$\frac{\pi}{2} \quad \frac{\pi}{4}$

$-2t^2 + 2t = 0$

$t(t-1) = 0$

$\left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 0 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{4} \end{array}\right.$

$a \neq 0$

$t = 1$ $a(t-1)(t^2 + (2a - \frac{2}{a})t - 4) = 0$

$1 \neq a + \frac{1}{a} \neq 2$

$at^3 + (2a^2 - a - 2) t^2 + (2 - 4a - 2a^2) t + 4a \;|\; at - 1$

$-\; at^3 - at^2 \qquad\qquad at^2 + (2a^2 - 2) t - 4a$

$(2a^2 - 2) t^2$

$-\; (2a^2 - 2) t^2 - (2a^2 - 2) t$

$-4at + 4a$

$\leq \frac{\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{4}$

$0 \quad \frac{\pi}{4} \quad \frac{\pi}{2}$

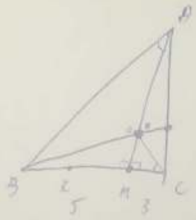
$ctg_1, ctg_2 > 0$

$ctg_1 = \frac{-2}{a}, \; ctg_2 = 2a$

$ctg_1 \cdot ctg_2 = -4 \Rightarrow ctg_1$ или $ctg_2 < 0$

Сканировано с CamScanner

Черновик к 4



$\angle AKO = max$

$\Delta MBA \sim MA$

отк $\frac{MD}{MB} = \frac{MC}{MO}$

$MO \cdot MA = MC \cdot MB = 15 = 5 \cdot 3$

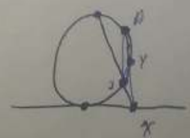
K_1 и $K_2 \in BC$ $MK_1 = MK_2 = \sqrt{15}$

$X \in (MK_1)$, (MK_2)

OAK_i касается BC

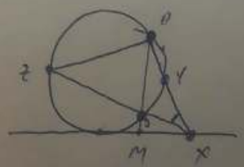
$\angle AK_iO = \frac{\cup OA}{2} > \angle AXO = (\cup OA - \cup\ ) \cdot \frac{1}{2} \le \cup \frac{OA}{2}$

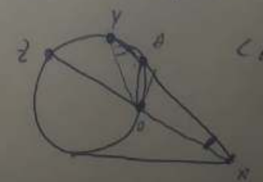
a.



$\angle OXA = \angle AYO - \angle YOX$

$\angle AYO = 180^\circ - \frac{1}{2} \cup OA$





$\angle UXO = \angle ZOY - \frac{1}{2} \cup OA$

$\angle {}^{U}AO - \angle$

$\angle AYO -$

$\frac{1}{2} (\cup AZ - \cup OY) =$

$= (\cup ZY - \cup AO) \frac{1}{2}$

$AZ \le 2R$

$AX > AZ$

$AK^2 = x^2 + h^2$

$\le 180 - \frac{1}{2} \cup OA$

$\angle OXA =$