МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Бобышкин Иван Михайлович**

Класс: **10 класс**

Технический балл: **50**

Дата проведения: **12 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	10	0	15	15	10	0	0

$(-1-t)(-1-t+1)^2 = (-1-t)(1-t)^2 \cancel{\le} \geq -1$

$(t+1)(1-t)^2 \leq 1$

$(t+1)(1-t)(1-t) = (1-t^2)(1-t)$

zepmo lenk 7

③ Три последние цифры числа - его остаток по модулю 1000:

$10^{2022} - 9^{2022} \equiv x \pmod{1000}$. Найдем x.

9^{2022}

$9^2 \equiv 1 \pmod{10}$

$9^2 = (8 \cdot p + 1)$

$\varphi(1000) = \varphi(2^3)\varphi(5^3) = (2^3 - 2^2)(5^3 - 5^2) = 100 \cdot 4 = 400$

$9^{400} \equiv 1 \pmod{1000}$

$9^{2022} \equiv 9^{22} \pmod{1000}$ $16 \cdot 125$

$10^{2022} - 9^{2022} \equiv -9^{2022} \pmod{10} \equiv -1 \equiv 9$

$(9+1)^{2022} - 9^{2022}$

$=$

$\frac{10^{2022} - 9^{2022} - 9}{10} \equiv x \pmod{10}$

$10^{2022} - 9^{2022} - 9 = 10x$

$9^{2022} \overset{1000}{\equiv} 9^{22} = (81)^{11} =$ $10^{2022} - (9^{2022} + 9) = 10^{2022} - 9(9^{2021} + 1) \overset{100}{\equiv}$

$= 81 \cdot (81)^{10} \equiv 81 \cdot (41)^5 = 81 \cdot 41 \cdot \cdot$ $9^{2021} \equiv$

9^1 9^2 9^3

9 81 ~~81~~ 81 729

9^4

$\times 729$
9
0561

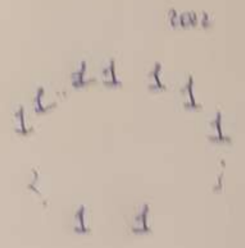
$\times 561$
9
4768

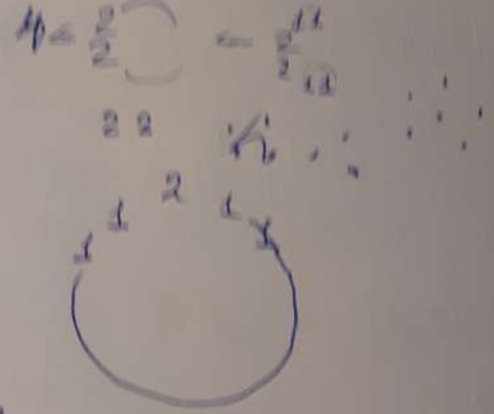
$\times 869$
9

$\times 81$
81
$\overline{81}$
648
$\overline{7841}$

черновик 6

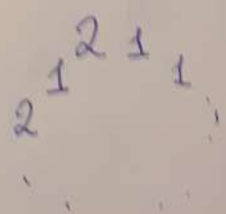
$(-1+1)(1-ti)^2 = (-1-t\sqrt{\ldots})^2$

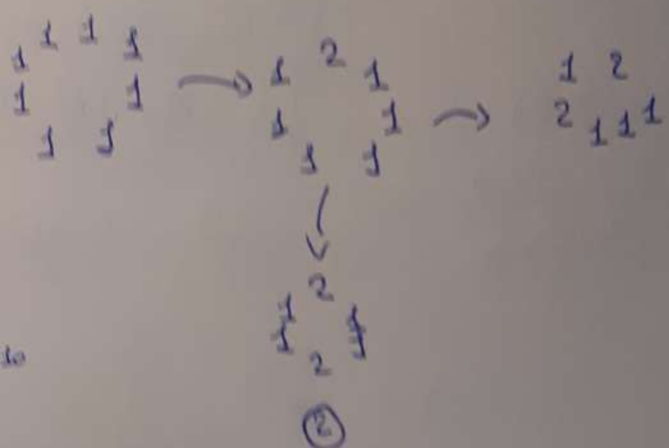


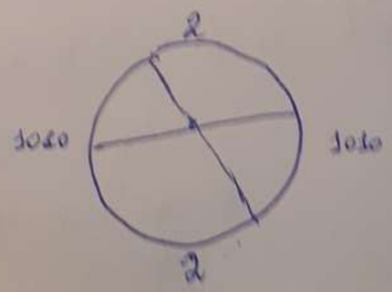


2 2
3 1

$\underbrace{2\,1\,1}$



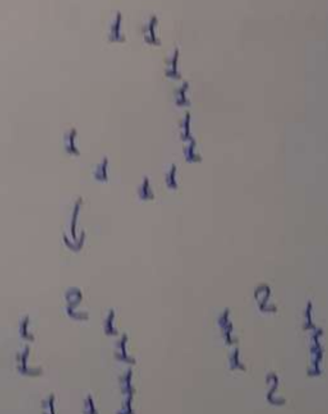




11 → 2

2212 → 232

2212 → 232



1 1 1 1

Zadatak 5

$(-1+t)(-1-t+1)^2 = (-1, \ldots$

$x < y < z$

$$t^3+4t^2+4t+a=0$$

$$x^3-4y^2-4z^2-4y-4z+32$$

$$x^3-4(y^2+z^2)-4(y+z)+32$$

т. Виета
$$\begin{cases} -xyz=a \\ xy+yz+xz=4 \Rightarrow yz=4-x(y+z)=4-x(-x-4)=4+x(x+4)=(x+2)^2 \\ x+y+z=-4 \Rightarrow y+z=-x-4 \end{cases}$$

$$-x(4+x(x+4))=a \qquad (y+z)^2-2yz=y^2+z^2=(x+4)^2-2(4+x(x+4))=$$

$$=x^2+8x+16-8-x^2-4x=4x+8$$

$\cancel{-4x}+x$

$$-x(4+x^2+4x)=a$$

$$-x^3-4x^2-4x=a$$

$$x^3-4(4x+8)-4(-x-4)+32=A \qquad (x+4)^2-2(x+2)^2=$$

$$=x^2+8x+16-2x^2-8-8x$$

$$x^3-16x-32+4x+16+32=A$$

$$(x+4)^2-(x+2)^2=2(2x+6)=$$

$$=4x+12$$

$$\boxed{x^3-12x+16=A}$$

$$=-x^2+8$$

$$t(t+2)^2+a=0$$

$$x(x+2)^2=-a$$

$$x^3+4x^2+4x$$

$$yz=\frac{-a}{x}=\frac{x(x+2)^2}{x}=(x+2)^2 \qquad x^3-4(-x^2+8)-4(-x-4)+32$$

$$x^3+4x^2-32+4x+16+32$$

$$x^3+4x^2+\cancel{4x}+16$$

$$\boxed{16-a}$$

$n=22p+2$

черновик 4

$$22k+2 \equiv x \pmod{20} \Leftrightarrow 2k+2 \overset{20}{\equiv} x$$

$$22k+2 \equiv x+1 \pmod{21} \Leftrightarrow k+2 \overset{21}{\equiv} x+1$$

$$k+2=21t+(x+1)$$

$$2k+2=2(21t+(x+1))-2$$

$$42t+2(x+1) \overset{20}{\equiv} x$$

$$2t+2x+\cancel{2} \equiv x$$

$$1+21t+x=20l+x$$

$$21t+1=20l \qquad 24 \overset{21}{\equiv} 3 \qquad 24 \overset{20}{\equiv} 4$$

$$1 \overset{21}{\equiv} -l$$

$$n=22p+2=20l+x=21t+x+1$$

$$21t+x+1 \equiv x \pmod{20}$$

$$21l+1 \equiv 0 \pmod{20}$$

$$l+1 \equiv 0 \pmod{20}$$

$$l+1 \vdots 20 \Rightarrow l \geq 19$$

$x=19$

$20\cdot 19$ $\quad$ $380 : 20$ $\quad$ $380 : 21$ $\quad$ $21\cdot 19 = 20\cdot 19+19$

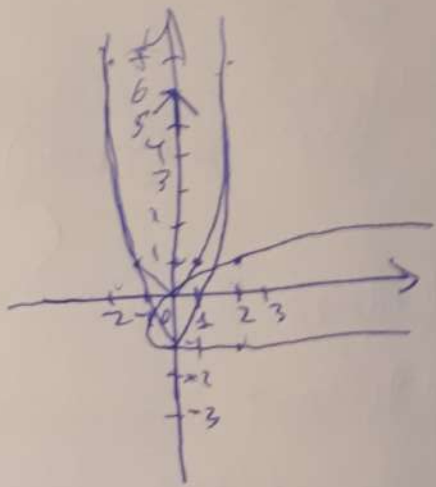
$21\cdot 19$ $\quad$ $389 : 22$ $\quad$ $21\cdot 38$

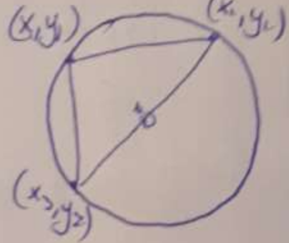
$t=38$

$2.\ 4x^2-4y-4z+32$

$y=2x^2-1$

$x=4y^2-2$





$y=2x^2-1$

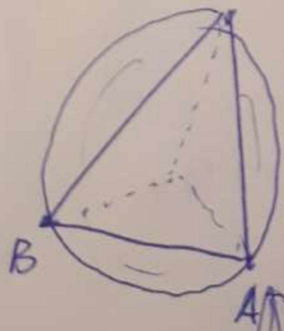
$\cancel{y=}$

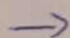
$x=4y^2-2$

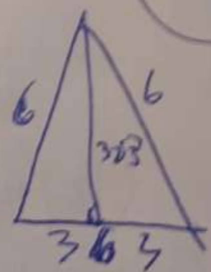
$x=4(2x^2-1)^2-2$

$x=\cancel{8x}\ 16x^4$

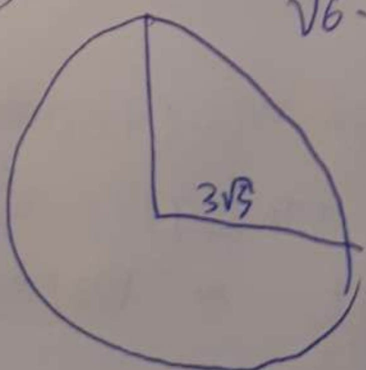
черновик 3







$\sqrt{6^2-3^2}=\sqrt{36-9}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$



$2\pi r$

$2\pi 3\cdot\sqrt{3}$

$6\sqrt{3}\pi$

$t(t+2)^2+a=0$

$820+x \overset{22}{\equiv}$

$n \equiv x \pmod{20}$

$n \equiv x+1 \pmod{21}$

$n \equiv 2 \pmod{22} \Rightarrow n = 22k+2$

$x=$

$22k+2 \equiv 2k+2 \pmod{20}$ x

$22k+2 \equiv k+2 \pmod{21}$ $x+1$

k	x	x+1
1	48	43
2		4

$k+1 = x$

2

$2k-18 = k+2$

$k = 20$

$k+2 \overset{21}{\equiv} x+1$

$k \overset{21}{\equiv} x-1$

$k=21$ $x=20$

$2k+2 \overset{20}{\equiv} x$

$2k+1 \overset{20}{\equiv} x-1$

43 19

$S_1 = 1$ 2

$S_2 = 1$ 4

$S_3 = 2$

$2(k+2)(k+1) \equiv x(x+1) \pmod{420}$

$2(k+2)(k+1)$ $(k+2)(k+3)$

S_{k+1} ( )

$S_k + (S_{k-1}+S_1) + (S_{k-2}+S_2)$

$39 \cdot 21 = 819$, $t = 38$

$20l = 21t + x + 1$, $x = 20$

$20l = 21t + 1$

$\boxed{t+1 \vdots 20}$

$t = 19$

$21 \cdot 19 + 1$

$400 : 22 = 18$, $820 : 22 = 37$

8 −8 13

4 12

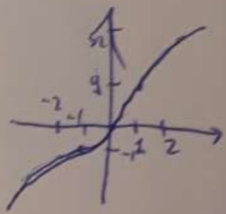
Черновик 2

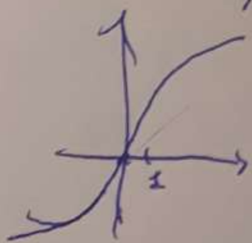
$$\begin{cases} y = 2x^2 - 1 \\ x = 4y^2 - 2 \end{cases} \Rightarrow x = 4(2x^2-1)^2 - 2 \Leftrightarrow 16x^4 - 16x^2 - x + 2 = 0$$

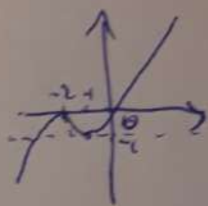
$\cancel{x^3 - 4y^2}$

$t^3 + 4t^2 + 4t + a = 0$

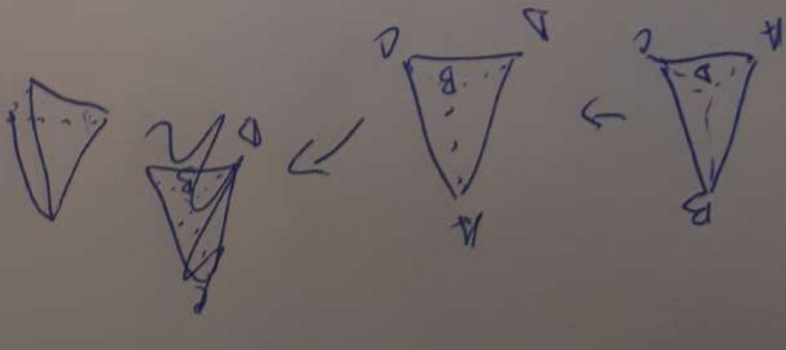
$t(t+2)^2 = \cancel{a} - a$





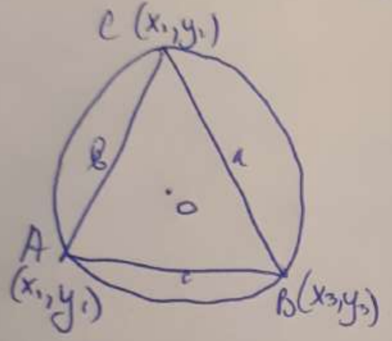


Черновик 1



$(-1+t)(-1-t+1)^2 = (-1-t)(1-t)^2 \Leftrightarrow \ldots$

⑥ Две параболы пересекаются по 4 точкам, лежащим на одной окружности ⇒ такая точка одна - центр окружности, на которых лежат четыре точки т.к. должна быть на сферах ко всем 4 точкам. Покажем как искать координаты центра окружности по трём точкам на окружности:



мы можем найти радиус:

$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ по формуле Герона,

с другой стороны $S_{ABC} = \frac{abc}{4R}$ ⇒

$$4R = \frac{abc}{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}, \text{ где}$$

$a = \sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2}$

$b = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ по формуле расстояния

$c = \sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2}$

Также мы можем построить окружности в $A\,B\,C$ с радиусом R и взять их общую точку:

$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2 = (x-x_2)^2+(y-y_2)^2 = (x-x_3)^2+(y-y_3)^2 = R^2$

$x^2-2xx_1+x_1^2+y^2-2yy_1+y_1^2 = x^2-2xx_2+x_2^2+y^2-2yy_2+y_2^2$

$-2xx_1+x_1^2-2yy_1+y_1^2 = -2xx_2+x_2^2+y_2^2-2yy_2$

$(x_1^2-x_2^2)+(y_1^2-y_2^2) = 2x(x_1-x_2)+2y(y_1-y_1)$

$(x_1-x_2)(x_1+x_2+2x) = (y_1-y_2)(y_1-y_2+2y)$

и так для всех пар: выражаем x через y из первого равенства, подставляем во второе и получаем решение.

Черновик 6

(5) $t^3+4t^2+4t+a=0$ имеет корни $x<y<z\in\mathbb{R}$, тогда по т. Виета

$$\begin{cases} xyz=-a & (1) \\ xy+yz+xz=4 & (2) \\ x+y+z=-4 & (3) \end{cases}$$

подставим x:

$x^3+4x^2+4x+a=0$

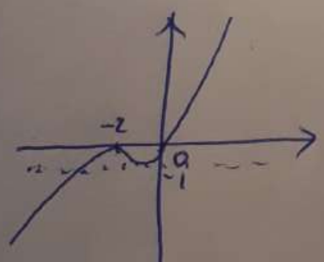
$\Rightarrow x(x+2)^2=-a$

Тогда из (1) $yz=\frac{-a}{x}=\frac{x(x+2)^2}{x}=(x+2)^2$ ($x\neq 0$ т.к. иначе $a=0$ и $t(t+2)^2=0$ имеет только 2 корня). Из (3) $y+z=-4-x$.

Тогда $(y+z)^2-2yz=y^2+z^2=(-4-x)^2-2((x+2)^2)=(x+4)^2-2(x+2)^2=$
$=x^2+8x+16-2x^2-8x-8=-x^2+8$. Тогда

$A=x^3-4y^2-4z^2-4y-4z+32=x^3-4(y^2+z^2)-4(y+z)+32=$
$=x^3-4(-x^2+8)-4(-4-x)+32=x^3+4x^2-32+16+4x+32=$
$=x^3+4x^2+4x+16=16-a.$

Теперь посмотрим чему может быть равно a, рассмотрим график t^3+4t^2+4t $t(t+2)^2$ его нули в точках $0,-2$, и при отр. t отриц. значение, при пол. положительное (т.к. $(t+2)^2\geq 0$), оно кубическое $\Rightarrow$ имеет вид:



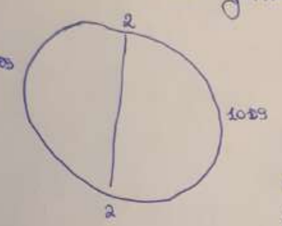
(схематично). Тогда добавление a - параллельный перенос кривой вверх или вниз. Можно заметить, что минимум на отрезке $[-2,0]$ в точке -1

Тогда $a\in[0,-1]$ $\Rightarrow$ только тогда получается три разл. корня т.к. при движении графика вниз пол. один корень. Вверх более чем на -1 тоже один, ровно на -1 - два. Тогда $16-a\in[16,17)$.

Чистовик 5

④ Может: второй игрок. (листовик 4)

Для этого он должен сделать так:



пронумеруем места единиц начиная с любой по кругу и сопоставим каждой единице симметричную ей относительно центра (расставим их на одинаковом расстоянии друг от друга), после хода первого получилась 2, сложим симметричные тем единицам единицы и тоже получим 2, получилась ситуация как на рисунке - две двойки разделяют единицы пополам. Созданим новую симметрию (получившиеся числа разделяем по парам симметрично отн. центра), и на следующий ход первого ответим по такой симметрии. Тогда каждую пару ходов общее количество чисел уменьшается на 2 ⇒ общее кол-во не меняет чётность ⇒ всегда существует новая симметрия (разбивание на пары). Тогда если на какой-то ходу первый получил число 4, то это произошло после нашего хода, тогда рассмотрим ситуацию до этого хода: каждому числу соответствует симметричное равное, кроме нового, полученного первым, тогда рассмотрим новое число и его соседей: хотя бы одна из двух сумм должна быть равна 4, иначе получив симметричное число первый своим ходом не получит из него 4 (у полученного числа такие же соседи - всего чисел 2022 в начале ⇒ их сумма 2022 ⇒ рассматриваемая ситуация произошла не в конце, а также 4 мы не можем получить другим способом, если можем - получим и выиграем). Тогда по такой стратегии второй не проиграет. Докажем, что 4 можно получить на какой-то из ходов (т.е. выиграть, а т.к. выигрывает не первый, то второй). Рассмотрим ситуацию, когда впервые получилась 3 (после первых ходов только 2 и 1, предполагаем противное, то 4 не появилось т.е. 2 и 2 не склад., 1 конечное число ⇒ есть момент появления 3=2+1):

..232..
..2212..(1)
..2122..(2)

получилась 3, 3+1=4, а мы предполагаем, что 4 нельзя получить (3 появляется после хода первого т.к. после наших ходов числа разбиваются по парам), значит соседи 3 - две двойки ⇒ до хода первого была ситуация (1) или (2) ⇒ была симметричная ситуация ⇒ есть хотя бы две пары (2,2) ⇒ перед нашим предыдущим ходом была ≥1 пара (2,2) ⇒ мы могли получить 4. Противоречие.

③ Три последние цифры числа - его остаток по модулю 1000:

$10^{2022} - 9^{2022} \equiv x \pmod{1000}$. Найдём x:

$10^{2022} - 9^{2022} \equiv -9^{2022} \pmod{1000}$ т.к. $10^{2022} \vdots 1000$

Заметим, что $9^{\varphi(1000)}$, где φ - функция Эйлера, сравнимо с 1 по модулю 1000, φ - мультипликативная функция $\Rightarrow \varphi(1000) = \varphi(2^3 \cdot 5^3) =$

$= \varphi(2^3) \cdot \varphi(5^3)$ т.к. $(2^3, 5^3) = 1$ $= \cancel{\varphi(8)} \cdot \cancel{\varphi(1)} (2^3 - 2^2)(5^3 - 5^2) = 400$

(пользуемся тем, что $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$ (p - простое): действительно $\varphi(p)$ кол-во чисел не превосх. ~~меньших~~ p^α и взаимно простых с ним ~~…~~. Не взаимно просты все числа $\vdots p$, а т.к. всего чисел p^α (от 1 до p^α), то $\vdots p$ в этом промежутке $\frac{p^\alpha}{p}$ - среди p подряд идущих чисел ровно одно $\vdots p$, тогда и получаем $p^\alpha - \frac{p^\alpha}{p} = p^\alpha - p^{\alpha-1}$)

Тогда $-9^{2022} = -(9^{400})^5 \cdot 9^{22} \equiv -1^5 \cdot 9^{22} = -9^{22} \pmod{1000}$

$9^{22} = (81)^{11} = 81 \cdot (81)^{10} \equiv 81 \cdot (561)^5 = 81 \cdot 561 \cdot (561)^4 \equiv 81 \cdot 561 \cdot (721)^2 \equiv$

$\equiv 81 \cdot 561 \cdot 841 \equiv 441 \cdot 841 \equiv 881 \pmod{1000}$

81×81: 81, 648, 6561 $\Rightarrow$ $81^2 \equiv 561$

561×561: 561, 3366, 2805, 314721 $\Rightarrow$ $561^2 \underset{1000}{\equiv} 721$

721×721: 721, 1442, 5047, 519841 $\Rightarrow$ $(721)^2 \underset{1000}{\equiv} 841$

561×81: 561, 4488, 45441 $\Rightarrow$ $561 \cdot 81 \underset{1000}{\equiv} 441$

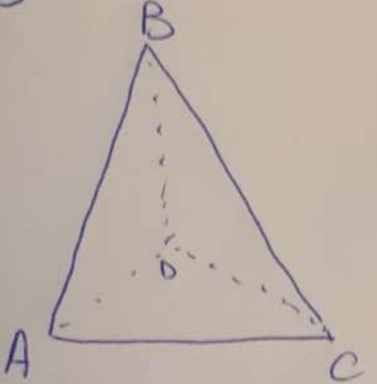
441×841: 441, 1764, 3528, 370881 $\Rightarrow$ $441 \cdot 841 \underset{1000}{\equiv} 881$

Тогда $-9^{22} \equiv -881 \equiv 1000 - 881 \equiv 119 \pmod{1000}$

Ответ: 119.

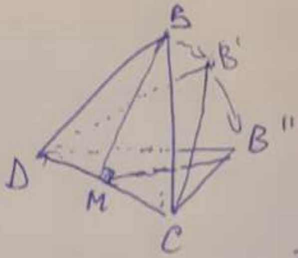
чистовик 3

②

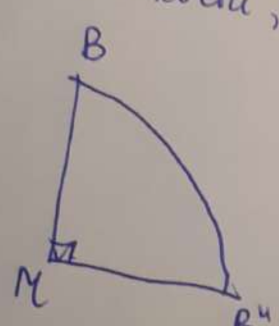


~~Пусть се неподвижная вершина~~ B - подвижная. ~~ABCD - правильная треугольная пирамида => существует сфера S описанная около ABCD.~~

Рассмотрим траекторию „падения" точки B на b - перпендикуляре к CD из M - середины CD.



Тогда т.к. длина BM не меняется, то B и B' - все точки траектории на окружности в плоскости, проходящей через M перпендикулярно CD с центром в M и радиусом BM.



Заметим, что угол между гранями пирамиды 90° т.к. она правильная и все рёбра по 6см. => траектория BB'' - четверть длины окружности с радиусом $BM = \sqrt{BD^2 - \left(\frac{1}{2}CD\right)^2}$ (по т. Пифагора в $\triangle BMD$) $= \sqrt{36-9} = 3\sqrt{3}$. $\Rightarrow \cup BB'' = \frac{2\pi \cdot 3\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\pi$. По условию через одно и тоже ребро пирамида не перекатывалась дважды, всего рёбер 6, перекатов 6 => перекатилась через каждое ребро по разу т.е. B в роли „неподвижной" точки поучаствовала три раза и три раза в роли „подвижной", а подъём и падение B происходит аналогично => длина общей траектории

$\cancel{2}\cdot \frac{3\sqrt{3}}{2}\pi \cdot 3 = \frac{9\sqrt{3}}{2}\pi$.

чистовик 2

$(-1+t)(-1-t+1)^2 = (-1 \ldots$

① Пусть искомое натуральное число n, а его остаток от деления на 20 равен x, тогда по условию:

1) $n \equiv x \pmod{20} \Rightarrow n = 20\ell + x$
2) $n \equiv x+1 \pmod{21} \Rightarrow n = 21t + x + 1$
3) $n \equiv 2 \pmod{22}$

Тогда $20\ell + x = 21t + x + 1 \Rightarrow 21t+1 \,\vdots\, 20 \Rightarrow 21t + 1 \overset{20}{\equiv} 0 \Rightarrow t+1 \overset{20}{\equiv} 0 \Rightarrow$ $t+1 \,\vdots\, 20$. Пусть $t = 19$ (наименьшее натур. число) $\Rightarrow n = 21 \cdot 19 + 1 + x =$ $400 + x = 242 \cdot 19 + 4 + x \overset{22}{\equiv} 4 + x$, но x - остаток $\Rightarrow x \geq 0 \Rightarrow 4 + x \geq 4 \Rightarrow$ ~~Ближайшее~~ $x \geq 0$ такое, что $x \leq 20$ и $4 + x \overset{22}{\equiv} 2 \Leftrightarrow x \overset{22}{\equiv} 20$, таких x нет.

Возьмём следующее число $t = 39 \Rightarrow n = 39 \cdot 21 + 1 + x = 820 + x \overset{22}{\equiv} 6 + x$, тогда ближайшее $x \geq 0$ такое, что $x \leq 20$ и $6 + x \overset{22}{\equiv} 2 \Leftrightarrow x \overset{22}{\equiv} 18$ это 18.

Тогда $n = 820 + 18 = 838$.

Ответ: 838

Чистовик 1