МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Богданов Ярослав Олегович**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **95**

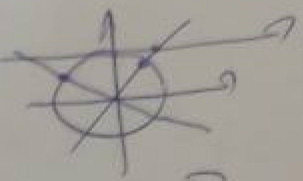
Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	10	15	10	15	15	15

$x = \operatorname{arcctg} \frac{-3+\sqrt{21}}{2}$

$x = \operatorname{arcctg} \frac{-3-\sqrt{21}}{2}$



$\operatorname{arcctg} \frac{-3+\sqrt{21}}{2} - \operatorname{arcctg} \frac{-3-\sqrt{21}}{2} = S$

$ctg\, S = \frac{1}{tg\, S}$

$ctg(x+y) = \frac{1}{tg(x+y)}$

$tg(x+y) = \frac{tgx - tgy}{1 - tgx\, tgy} =$

$= \frac{ctgy + ctgx}{ctgx\, ctgy - 1}$

$ctg\, S = \frac{\frac{-3-\sqrt{21}}{2} - \frac{-3+\sqrt{21}}{2}}{\frac{-(3+\sqrt{21})(\sqrt{21}-3)}{4} - 1} =$

$=$

Черновик

2

$x = \operatorname{arcctg} \frac{3+\sqrt{21}}{7}$

$at^3 + (a^2 - a - 3)t^2 + (3 - 3a - a^2)t + 3a = 0$

$:\boxed{3}\cancel{4}$

$t^3 - 121t$

$\cancel{t^2}\ 2^t - 32$

$\sin t - \frac{\sqrt{3}}{2}$

Черновик

№6

$ctg^3x + \left(a - \frac{3}{a} - 1\right)t^2 - \left(a - \frac{3}{a} + 3\right)t + 3 = 0$

$a \neq 0$: $b = a - \frac{3}{a} - 1$

$t^3 + bt^2 - (b+4)t + 3 = 0$

$3t^2 + 2bt - (b+4) = 0$

$D = b^2 + 3b + 4 > 0$

$\Rightarrow f(t) \uparrow \Rightarrow$ не более 1 корня.

$1 + b - b - 4 + 3 = 0$

$t = 1$

$ctg\, x = 1$

$x = \frac{\pi}{4} + \pi n$ – один корень, не подходит.

$a = 0$:

$-t^2 - 3t + 3 = 0$

$t^2 + 3t - 3 = 0$

$D = 9 + 12 = 21$

$t_1 = \frac{-3 + \sqrt{21}}{2}$

$t_2 = \frac{-3 - \sqrt{21}}{2}$

Черновик 3

$f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}$

19 23
38 46
57 69
76 92
95

19 → 95 → 57 → 76 → 69

~~92 → 23 → 38 →~~

95 → 57 → 76 → 69 → 95

$$\begin{array}{r} 95 \\ +57 \\ \hline 152 \\ +76 \\ \hline 228 \\ +69 \\ \hline 297 \\ \times 505 \\ \hline 1485 \\ 1485 \\ \hline 149985 \\ +152 \\ \hline 150137 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 2022 & 4 \\ \hline 20 & 505 \end{array}$$

505 · (95 + 57 + 76 + 69) ~~+ 95 + 57 =~~

~~Ответ:~~

~~Ответ 7~~

Ответ: ~~4~~ 5

9576

Чернокен 4

№3 $f(f(x)) = \dfrac{1}{\sqrt[5]{1 - \cancel{x}\,\dfrac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}}} =$

$$= \frac{1}{\sqrt[5]{\dfrac{1-x^5-1}{\sqrt[5]{1-x^5}}}} = \frac{\sqrt[5]{1-x^5}}{-x}$$

$$f(f(f(x))) = \frac{\sqrt[5]{1-\frac{1}{1-x^5}}}{-\dfrac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}} =$$

$$= -\frac{x}{-1} = x$$

Тогда $\underbrace{f(f\ldots f(x)\ldots)}_{1302} = x$.

Если 1303: $f(f(\ldots f(2021)\ldots)) =$

$$= \frac{1}{\sqrt[5]{1-\cancel{x}\,2021^5}}$$

Черновик 6

8

№1

$$4-2\sqrt{3}=(\sqrt{3}-1)^2=3+1-2\sqrt{3}$$

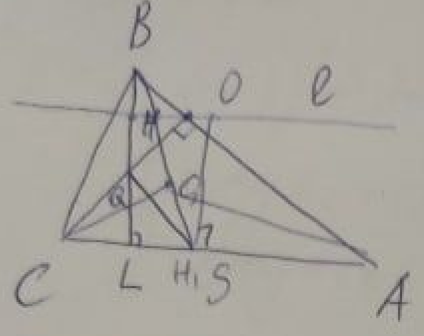
$$b=\sqrt[3]{\frac{(\sqrt{3}-1)\cdot(\sqrt{3}+1)}{\sqrt[3]{2}}}=\frac{\sqrt[3]{3-1}}{\sqrt[3]{2}}=1$$

$$\frac{3}{1\cdot4}+\frac{5}{4\cdot9}+\frac{7}{9\cdot16}\cdots+\frac{99}{49^2+50^2}$$

$$\frac{2n+1}{(n^2+n)^2}=\frac{2n+1}{n^4+2n^3+n^2}$$

$$\frac{5}{4}+\frac{5}{36}+\frac{7}{9\cdot}$$

Черновик 5



Пусть O - центр окружности, описанной вокруг $\triangle CQS$. $O \in l$. l - серединный перпенд. к CQ. $OS = OQ = OC = R$;

$CQ = 2R \cdot \sin a \Rightarrow$ если $a \to \max$, то $R \to \min \Rightarrow OS \perp AB$; $HOSL$ - квадр.

O_1 - центр опис. окр. $\triangle ABC$

$O_1H_1 = \frac{1}{2} CQ \Rightarrow O_1H_1 = CH$. $BH_1 = AH_1 = 3{,}5$

$\angle CO_1H_1 = \angle C = \beta$; $\operatorname{tg}\beta = \frac{BH_1}{O_1H_1}$

$O_1H_1 = 3{,}5 \cdot \operatorname{ctg}\beta = g$; $g = 2R_1 \cdot \sin\beta$

$H_1H = CO_1$, т.к. CO_1H_1H параллелогр.

$(CH = O_1H_1,\ CH \parallel O_1H_1) \Rightarrow H_1H = R_1 = \frac{3{,}5}{\sin\beta}$

$HL^2 + LH_1^2 = R_1^2$; $LH_1 = |3{,}5 - 5| = 1{,}5$

$HL^2 = \frac{3{,}5^2}{\sin^2\beta} - (1{,}5)^2$

$OQ^2 = 15^2 + CH^2 = OS^2 = HL^2$

$LN^2 = HL^2 - CH^2 = HL^2 - O_1H_1^2$

чистовик

9

$O_1H_1 = 3{,}5 \cdot ctg\,\beta$

$$S^2 = \frac{3{,}5^2}{\sin^2\beta} - (1{,}5)^2 - \frac{(3{,}5^2)}{\cancel{ctg}} ctg^2\beta =$$

$$= (3{,}5)^2 - (1{,}5)^2 = 10$$

$S = \sqrt{10}$

Ответ: $\sqrt{10}$

Чистовик

Пусть $a \neq 0$.

$D = (a^2-3)^2 + 22a^2 > 0$

$$\begin{cases} ctg\,x_2 \cdot ctg\,x_3 = -3 \\ ctg\,x_2 + ctg\,x_3 = \frac{3}{a} - a \end{cases}$$

$f(a) = \frac{3}{a} - a$

$E(f) = (-\infty; +\infty)$

$x_1 = \frac{\pi}{4}$; $ctg\,x_2 \cdot ctg\,x_3 < 0$

$\Rightarrow$ x_2 или $x_3 > \frac{\pi}{2} \Rightarrow max(|x_i - x_k|) > \frac{\pi}{4}$

В случае же, когда $a = 0$,

$x_1 = \frac{\pi}{4}$; $x_2 = \frac{\pi}{2}$; $|x_1 - x_2| = \frac{\pi}{4}$

Ответ:

$a = 0$; $x_1 = \frac{\pi}{4}$; $x_2 = \frac{\pi}{2}$

$|x_1 - x_2| = \frac{\pi}{4}$

Чистовик.

8

$\cos\left(\frac{11\pi}{26}\right) = \frac{r}{R - r\sqrt{3}}$, $R - r\sqrt{3} = \frac{r}{\cos\frac{11\pi}{26}}$

$R = r\sqrt{3} + \frac{r}{\cos\frac{11\pi}{26}}$,

Ответ: $R = 2\sqrt{3} + \frac{2}{\cos\frac{11\pi}{26}}$

№6

$a\,ctg^3x + (a^2 - a - 3)ctg^2x + (3 - 3a - a^2)ctg\,x + 3a = 0$

Пусть $ctg\,x = 1$.

$a + \cancel{a^2} - \cancel{a} - \cancel{3} + \cancel{3} - 3a - \cancel{a^2} + 3a = 0$

подходит $x \in (0; \pi)$ + $x_1 = \frac{\pi}{4}$

~~Группируем~~

Сгруппируем при $(ctg\,x - 1)$:

$a \cdot ctg^2x \cdot (ctg\,x - 1) + a^2 ctg\,x(ctg\,x - 1)$
$- 3ctg\,x(ctg\,x - 1) - 3a(ctg\,x - 1) = 0$

$a\,ctg^2x + (a^2 - 3)ctg\,x - 3a = 0$

~~$a\,ctg^2x + (a^2 - 3)ctg\,x - 3a = 0$~~

Случай $a = 0$:

$ctg\,x = 0$

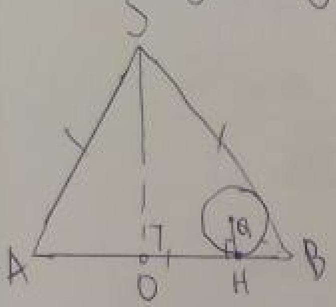
$x = \frac{\pi}{2}$

Чистовик

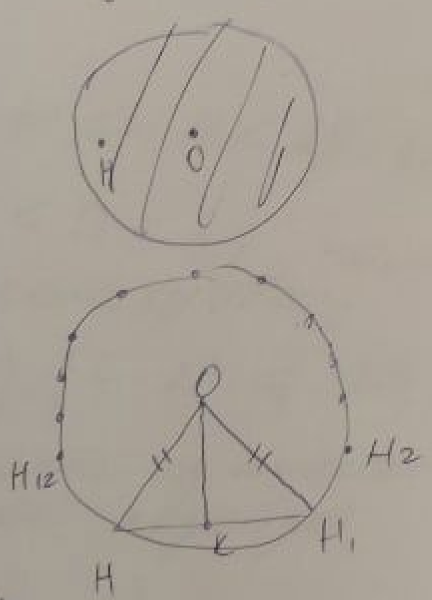
7

№4

вид сбоку



вид сверху:

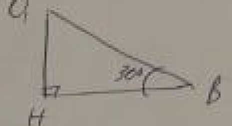


1) $OB = R$ - радиус основания конуса

2) $aH = r = 2$ - радиус шаров

ΔaBH: $BH = r\sqrt{3}$.

Тогда $OH = R - r \cdot \sqrt{3}$



2) $HH_1; H_2 \dots H_{12}$ - правильный 13-угольник, образованный точками касания шаров с плоскостью основания.

$HH_1 = 2r$, $\angle HH_1H_2 = \frac{\pi(13-2)}{13} = \frac{11\pi}{13}$

$\angle OH_1H = \frac{1}{2} \angle HH_1H_2 = \frac{11\pi}{26}$

3) ΔOHH_1: $KH_1 = \frac{1}{2} HH_1 = r$,

$\cos \angle OH_1H = \frac{KH_1}{OH_1}$

$\boxed{6}$

Чистовик

$t \in \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right)$ и

$t \in (-11; 0)$.

Так как $\frac{\pi}{3} - 4\pi < -11 < \frac{2\pi}{3} - 4\pi$

Так как $3{,}1 < \pi < 3{,}2$ нам подходят промежутки:

$\left(-11; \frac{2\pi}{3} - 4\pi\right) \cup \left(\frac{\pi}{3} - 2\pi; \frac{2\pi}{3} - 2\pi\right)$ для другого варианта из аналогичных оценок подойдет:

$\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi; \frac{2\pi}{3} + 2\pi\right)$, т. к. $\frac{2\pi}{3} < 5$,

а $11 < \frac{13\pi}{3}$. Объединение всех промежутков и даст ответ.

Ответ: $(11, +\infty)$; $\left(-11; \frac{2\pi}{3} - 4\pi\right)$;

$\left(\frac{\pi}{3} - 2\pi; \frac{2\pi}{3} - 2\pi\right)$; $\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi; \frac{2\pi}{3} + 2\pi\right)$.

Чистовик

№ ~~4~~ 5

Среднее из чисел будет положитель-ным в тех и только тех случаях, когда хотя бы два из трёх чисел положительны.

Решим каждое из неравенств:

1) $t^3 - 121t > 0$

$t(t^2-121)>0$

$t(t-11)(t+11)>0$

$t\in(-11;0)\cup(11;+\infty)$

2) $2^t > 32$

$t>5$

3) $\sin t > \frac{\sqrt{3}}{2}$

$t\in\left(\frac{\pi}{3}+2\pi k;\ \frac{2\pi}{3}+2\pi k\right)$

Вариант $t>11$ подходит, т.к. I и II число больше 0, в других случаях нам подходят или когда II и III больше 0 или когда I и III больше 0. То есть надо пересечь условия:

$t\in\left(\frac{\pi}{3}+2\pi k;\ \frac{2\pi}{3}+2\pi k\right)$ и

~~$11<t$~~ $5<t<11$ и

объединить ~~это~~ это с пересече-нием $\boxed{4}$

чистовик

№3

$$f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-\frac{1}{1-x^5}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[5]{\frac{1-x^5-1}{1-x^5}}} = \frac{\sqrt[5]{1-x^5}}{-x}$$

$$f(f(f(x))) = \frac{\sqrt[5]{1-\frac{1}{1-x^5}}}{-\sqrt[5]{\frac{1}{1-x^5}}} = \frac{-x}{-1} = x$$

Тогда $\underbrace{f(f\ldots f(x)\ldots))}_{1302} = x$

Значит, $\underbrace{f(\ldots f(2022)\ldots)}_{1303} =$

$$= f(2022) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-2022^5}}$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt[5]{1-2022^5}}$

чистовик

3

№2

Заметим, что на ~~...~~ 19 делятся ~~...~~ 19, 38, 57, 76, 95.

На 23 делятся 23, 46, 69, 92

Если число начинается на 9, то дальше может идти либо 2, либо 5. Но 2 идти не может (после 2 может быть только 3, затем 8, а с 8 никакое число не начинается)

~~...~~

После 5 идёт 7, далее 6, после 6 идёт 9. Мы пришли к изначальной цифре. Итого цикл

$9 \to 5 \to 7 \to 6$

Всего цифр в числе 2022 $\Rightarrow$ конечная цифра 5. ~~...~~ (2020 делится нацело на 4, а второе число в цикле 5)

Ответ: 5

2

Чистовик

№1

$$B = \frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}\,\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{3-2\sqrt{3}+1}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = 1$$

$$A = \frac{1\cdot 2+1}{(1\cdot 2)^2} + \frac{2\cdot 2+1}{(2\cdot 3)^2} + \ldots + \frac{49\cdot 2+1}{\cancel{48}(49\cdot 50)^2}$$

— общий вид:

$$\boxed{\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}}$$

$$\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2-n^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$A = \frac{1}{1^2} - \cancel{\frac{1}{2^2}} + \cancel{\frac{1}{2^2}} - \cancel{\frac{1}{3^2}} + \cancel{\frac{1}{3^2}} - \cancel{\frac{1}{4^2}} + \ldots + \cancel{\frac{1}{49^2}} - \frac{1}{50^2} =$$

$$= 1 - \frac{1}{50^2} \Rightarrow B > A.$$

Ответ: B

$\boxed{1}$

чистовик