МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Болуць Роман Валерьевич**

Класс: **8 класс**

Технический балл: **70**

Дата проведения: **12 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6
Оценка	15	15	5	15	20	0

Черновик.

№1

А, Б, В — 1 вес кат. (1 из них — побед)

$А+Б=220$кг

$А+В=240$кг

$Б+В=250$кг

$2(А+Б+В)=710$кг $\Rightarrow$ $А+Б+В=355$кг $\Rightarrow$

$А=105$кг, $Б=115$кг

$В=135$кг.

№2.

~~337 | 3~~
~~26~~
~~27~~

x, y — целые. Сколько решений —

$$\frac{1}{2022}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$$

$$\frac{x+y}{xy}=\frac{1}{2022} \qquad xy-2022x-2022y=0$$

$$(x-2022)(y-2022)=2022^2$$

$2022=2\cdot1011=2\cdot3\cdot\underline{337} \Rightarrow 2022^2=2^2\cdot3^2\cdot337^2 \Rightarrow$

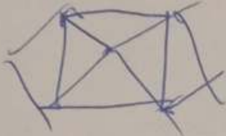
Кол-во натур. делителей $=\underline{27}$. Также есть отриц. числа — также ~~27~~

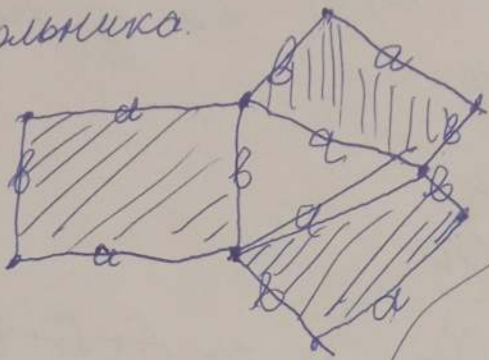
$x, y \neq 0 \Rightarrow (\ ) \neq -2022$. $\quad -1 = \underline{53}$

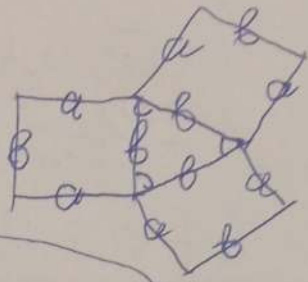
Д(2022) = 1; 2; 3; 6; 337; 674; 1011; 2022

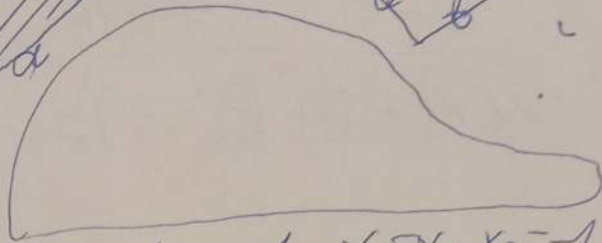
Черновик.
№3.

4 прямоугольника.









№4.

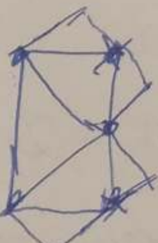
$x_1=1, x_2=1, x_3=-1 \Rightarrow x_4=x_3\cdot x_1=-1, x_5=x_4\cdot x_2=-1,$

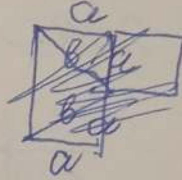
$(1, 1, -1, -1, -1, 1, -1), (1, 1, -1, -1, -1, 1, -1, 1)$

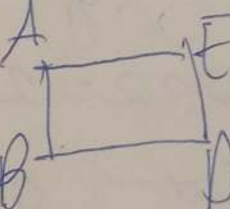
7 чисел 4 10 11 12

$2022 : 7 = 288$
14
62
56
62
56
6

6 и 2022. Ответ: 1.







№5

$\overline{abcde}$ $(a,b,c,d \neq 0)$: $(ab+bc)\cdot(bc+cd)+(cd+de) = 157605$

$157605 | 5$
$31521 | 3$
$10507 | 7$
$1501 | 19$
$79 | 79$ — 1 из слагаемых.
1

$1501 : 19 = 79$
133
171
171
0

рассмотрим вар: 79, $3\cdot 7=21$, $5\cdot 19=95$
10 11

$\overline{abcde} = \_\ \_\ 110$

~~чистовик~~ Черновик

(продолжение задачи 3)

Задача 3

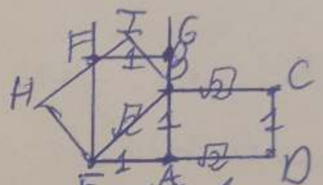


рис 1

Ответ: да;

Приведем пример:

Вначале построим прямоугольник $ABCD$, где $AB=CD=1$, $AD=BC=\sqrt{2}$.

Затем построим прямоугольник $AEFG$, полученный поворотом против часовой стрелки $\square ABCD$ вокруг точки A. (как на рис 1)

Построим $\triangle BEHI$ в верхнюю сторону (т.к. $1^2+1^2=(\sqrt{2})^2$, то такой тр прямоугольник возможен)

Черновик.

Тогда одн. скобки (49) $3 \cdot 19 = 57$ $5 \cdot 7 = 35$

$\overline{ab}+\overline{bc}$? 35 (21, 14)

$\overline{bc}+\overline{cd}$ 54

$\overline{cd}+\overline{de}$ 49

сумма $a \cdot 10 + b \cdot 21 + c \cdot 22 + d \cdot 21 + e \cdot 1 = 4 \cdot 141$

21436

35214

32140

Рассмотрим 6 вар.

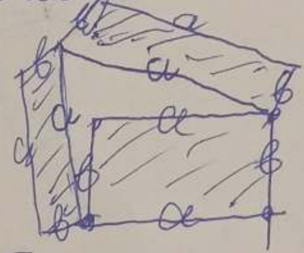
1) $\overline{ab}+\overline{bc}=35$ $\overline{cd}-\overline{ab}=22$

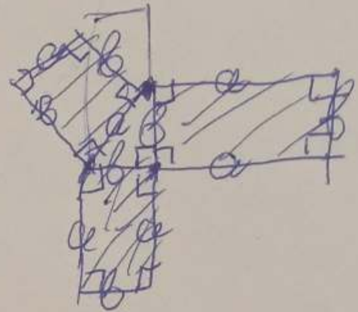
$\overline{bc}+\overline{cd}=57$ $\overline{de}-\overline{bc}=22$

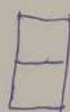
$\overline{cd}+\overline{de}=49$ Подходит 12345

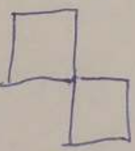
№3

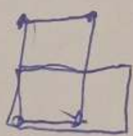
4 один. прямоугольника.

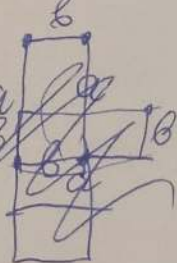


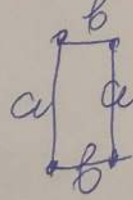


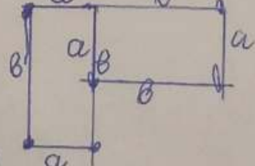


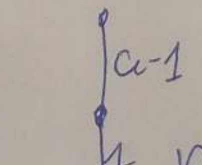




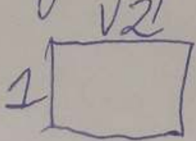


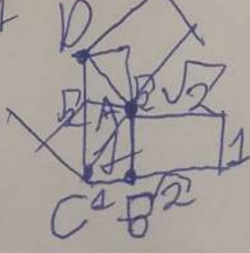


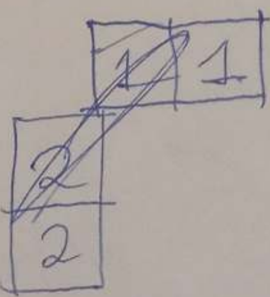




~~у каждо~~

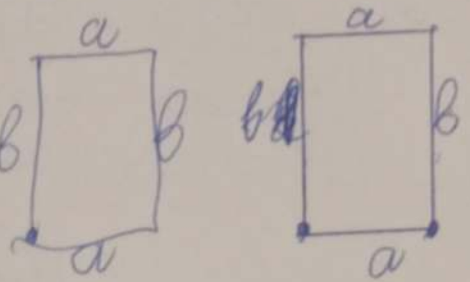


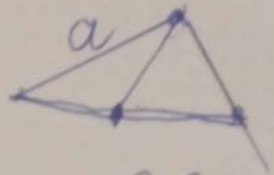




стр. 3

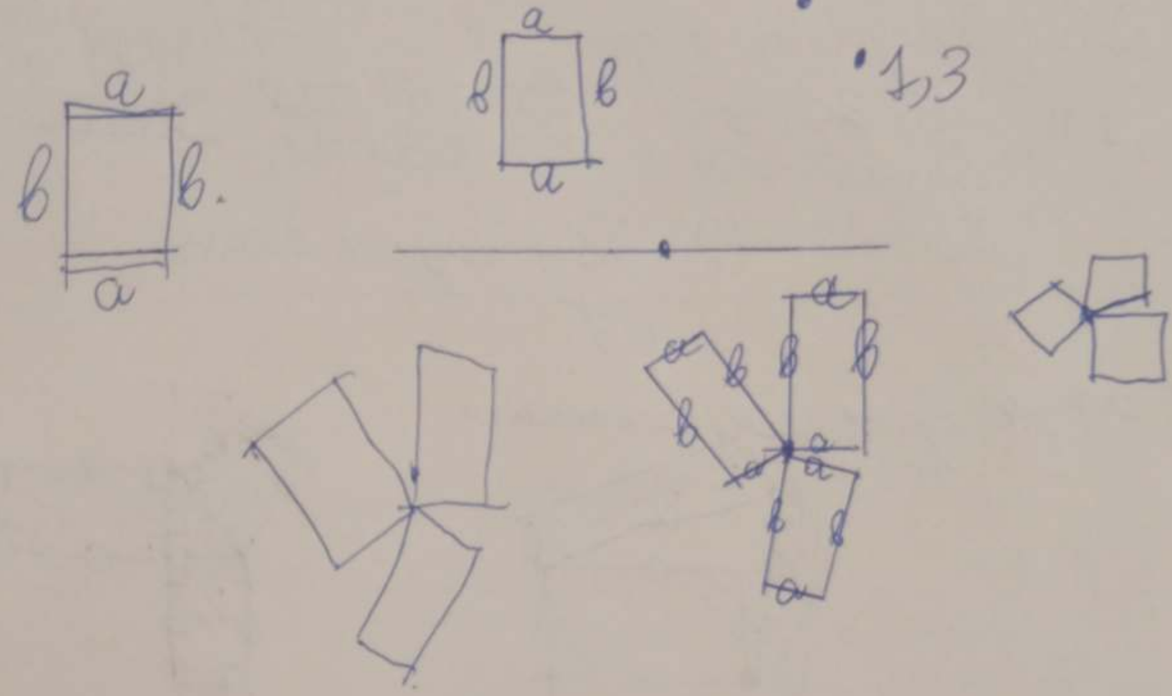
черновик





1,2 2,3

1,3



Чистовик

Задача 1.

Пусть штангист А поднял xкг, Б – yкг, В – zкг
Тогда получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y=220 \\ x+z=240 \\ y+z=250 \end{cases}$$

Просуммируем эти выражения.
Получим $2(x+y+z)=710 \Rightarrow x+y+z=355$
Тогда $z=(x+y+z)-(x+y)=355-220=135$ (кг)
$y=(x+y+z)-(x+z)=355-240=115$ (кг)
$x=(x+y+z)-(y+z)=355-250=105$ (кг)
Т.к 135кг >115кг >105кг, то больше всего поднял штангист В, ровно 135кг – победитель
Ответ: победитель поднял 135кг

Задача 2.

$$\frac{1}{2022}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}$$

Тогда $\frac{x+y}{xy}=\frac{1}{2022} \Rightarrow xy=(x+y)\cdot 2022 \Rightarrow$
$xy-2022x-2022y=0$
$(x-2022)(y-2022)=2022^2$
Разложим число 2022 на множители:
$2022=2\cdot 3\cdot 337$
Тогда $2022^2=2^2\cdot 3^2\cdot 337^2$
У числа 2022^2 есть ровно $(2+1)\cdot(2+1)\cdot(2+1)=27$ положительных делителей.
Также у него есть 27 отрицательных делителей. Всего делителей у числа 2022^2 будет 54.

Чистовик

(продолжение задачи 2)

Т.к. $(x-2022)(y-2022)=2022^2$, то и x, y целые числа, то числа $x-2022$ и $y-2022$ тоже целые.

Значит, число $x-2022$ должно быть целым и делимо числом 2022^2 нацело ($2022^2 : (x-2022)$).

Всего есть 54 вариандта значения x и y можно однозначно выразить через x.

Но т.к уравнение было $\frac{1}{2022}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, то $x, y \neq 0$.

Значит, $x-2022$ не может быть равным -2022, откуда и $y-2022$ не может быть равным $\frac{2022^2}{-2022}=-2022$. ($(x-2022)=0 \Leftrightarrow (y-2022)=0$)

Получается, 1 из этих 54 значений x невозможен. Значит, у данного уравнения ровно $54-1=53$ решения.

Ответ: 53 решения.

Задача 3

~~Ответ: да.~~

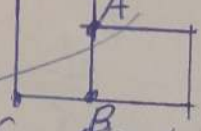


рис. 1

~~Приведем пример:~~

~~Вначале строим прямоугольник со сторонами 1 и $\sqrt{2}$. Отметим слева точки A и B (как на рис 1) Потом строим 2-ой прямоугольник, пересекающий 1-ый прямоугольник в т. B (как на рис. 1) Отметим у 2-го прям~~

Чистовик

Задача 4.

Используя формулу $x_n = x_{n-1} \cdot x_{n-3}$, посчитаем значения x от x_4 до x_{14}:

$x_4 = x_1 \cdot x_3 = 1 \cdot -1 = -1$

$x_5 = x_2 \cdot x_4 = 1 \cdot -1 = -1$

$x_6 = x_3 \cdot x_5 = -1 \cdot -1 = 1$

$x_7 = x_4 \cdot x_6 = -1 \cdot 1 = -1$

$x_8 = x_5 \cdot x_7 = -1 \cdot -1 = 1$

$x_9 = x_6 \cdot x_8 = 1 \cdot 1 = 1$

$x_{10} = x_7 \cdot x_9 = -1 \cdot 1 = -1$

$x_{11} = x_8 \cdot x_{10} = 1 \cdot -1 = -1$

$x_{12} = x_9 \cdot x_{11} = 1 \cdot -1 = -1$

$x_{13} = x_{10} \cdot x_{12} = -1 \cdot -1 = 1$

$x_{14} = x_{11} \cdot x_{13} = -1 \cdot -1 = 1$.

Заметим, что значения от x_1 до x_7 совпадают с значениями от x_8 до x_{14} - совпадают $(1, 1, -1, -1, -1, 1, -1)$ - цикл, образующийся формулой $x_n = x_{n-1} \cdot x_{n-3}$. ~~(цикл будет продолжаться, т.к. x_n не зависимо~~

Т.к длина цикла равна 7, то поделим 2022 на 7: $2022 = 288 \cdot 7 + 6 \equiv_7 6$, то $x_{2022} = x_6 = 1$.

Ответ: $x_{2022} = 1$.

Задача 5.

Разложим число 154605 на множители:

$154605 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 49$.

Оценим, чему может быть равна скобка:

Т.к скобка - сумма 2 двухзначных чисел - то его сумма будет меньше $100 \cdot 2 = 200$.

Также сумма будет не меньше $10 \cdot 2 = 20$.

Чистовик
(продолжение задачи 5)

Используя разложение на множители, проанализируем, чему равны скобки.
Число 79 - простое, оно входит в одну из скобок. Даже если ему дать в качестве дополнительного множителя число 3, то $79 \cdot 3 = 237 > 200$. Противоречие.
Значит, одна из скобок равна 79.
Число 3 - простое, оно входит в одну из скобок. Есть 2 варианта.

1) Число 19 не входит вместе с 3.
Т.к. $3 < 20$ и $19 < 20$, то ~~ему~~ им необходимы дополнительные множители. Если к 3 добавить множитель 5, то получится $3 \cdot 5 = 15 < 20$. Противоречие. Если к 3 добавить множитель 7, то получится 21. Но тогда другая ~~число~~ скобка получится $3 \cdot 19 = 57$.
Т.к. $21 = 11 + 10$ (это единственное разложение на 2 2-значн. слагаемых), то последние 3 цифры числа ~~abcde~~ будут равны 1, 1, 0. Но тогда $bc + cd = b1 + c1 \equiv_{10} 2$. Но нет скобки, дающей остаток 2 при делении на 10. Противоречие.

2) Число 19 входит вместе с 3.
Если к этой скобке добавить ещё 1 множитель, то скобка будет $\geq 19 \cdot 5 \cdot 3 = 285 > 200$. Противоречие.
Тогда скобки равны: 79; $19 \cdot 3 = 57$; $5 \cdot 7 = 35$.

Чистовик
(продолжение задачи 5)

Рассмотрим скобку, равную 35
Сумма десятков у ~~чи~~ чисел внутри скобки будет ≤ 3. Если оба десятка равны 1, то одно из чисел будет 11 (десяток одного числа совпадает с единицами другого числа) $\Rightarrow$ другое будет $35-11=24$. - цифра десятков - 2
Противоречие. Значит, один из десятков будет равен 1, а другой - 2.
Есть 2 варианта:

1) Число с десятком равным 2 стоит раньше числа с десятком 1

Тогда 1-ое число равно 21, 2-ое число равно $35-21=14$. Значит, одна из частей будет 214. Если двойка будет стоять не на первом месте, то одна из скобок будет равна $\overline{k2}+\overline{21}$ (где k - любое от 0 до 9. $\equiv_{10} 3$. Но такой скобки нет. Если двойка будет в начале, то $a=2$, $b=1$, $c=4$.
Тогда $\overline{cd}=54-14=43$ (вариант $\overline{cd}=79-14=65$ не подходит, т.к $c\neq 6$) $\Rightarrow d=3$, ~~анало~~
$\overline{de}=79-43=36 \Rightarrow \overline{abcde}=21436$

2) Число с десятком 2 стоит раньше числа с десятком 1.

Тогда 1-ое число равно 12, 2-ое - $35-12=23$
Аналогично с первым вариантом единица не может стоять ~~не~~ не на первом месте ($\overline{k1}+\overline{12}\equiv_{10} 3$). Тогда $a=1$, $b=2$, $c=3$ $\overline{cd}=54-\overline{bc}=54-23=34$ (вариант $\overline{cd}=79-\overline{bc}=79-23=56$ - не подходит ($c\neq 5$)
$\Rightarrow d=4$. $\overline{de}=79-\overline{cd}=49-34=45 \Rightarrow e=5$
$\overline{abcde}=12345$

Ответ: $\overline{abcde}=12345$ ~~или~~ или 21436