МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Большаков Максим Сергеевич**

Класс: **7 класс**

Технический балл: **65**

Дата проведения: **12 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6
Оценка	15	15	0	15	0	20

Задача 6

Ответ - 8: Оценка: заметим, что чтобы это произошло, каждая лампочка должна ещё 6 раз ($7-1$) в какие-то моменты засветиться (т.к. она вначале уже светит чем-то) цветом, которым она ещё не светила (назовём эти моменты хорошими). Тогда должно было произойти ещё ~~7~~ $6 \cdot 4 = 24$ хороших момента. Заметим, что за каждый ход ≤ 3 лампочки меняют свой цвет ~~т.к.~~ и следовательно за $\forall$ ход происходит ≤ 3 хороших момента. Тогда ходов должно пройти $\geq \frac{24}{3} = 8$. Пример: (пусть лампы A, B, C, D изнач. горят цв. 1, 2, 3, 4 соотв.).

В ~~...~~ строчке с номером X показаны цвета, которыми горят лампы после X-го хода. Каждая лампа за все 8 ходов и изн. ситуации успела погореть $\forall$ из 7 цветов. Значит ответ - 8.

	A	B	C	D
изн.	1	2	3	4
ход 1	1	5	6	7
х. 2	2	3	4	7
х. 3	5	6	4	1
х. 4	3	6	7	2
х. 5	3	4	1	5
х. 6	6	7	2	5
х. 7	4	1	2	3
х. 8	7	1	5	6

Задача 4 (будем говорить a_i, а не x_i)

Докажем, что посл. периодична без предпериода с периодом дл. 7: на 1-7 местах стоят 1, 1, −1, −1, −1, 1, −1. Докажем, что если при $x \in \mathbb{N}$ на позициях $7(x-1)+1$ − $7(x-1)+7$ стоят 1, 1, −1, −1, −1, 1, −1 соотв., то следующие 7 позиций также будут (1, 1, −1, −1, −1, 1, −1):

$a_{7x+1} = a_{7x-1} \cdot a_{7x-2} = 1$; $a_{7x+2} = a_{7x-1} \cdot a_{7x+1} = 1$; $a_{7x+3} = a_{7x} \cdot a_{7x+2} = -1$; $a_{7x+4} = a_{7x+3} \cdot a_{7x+1} = -1$; $a_{7x+5} = a_{7x+2} \cdot a_{7x+4} = -1$; $a_{7x+6} = a_{7x+5} \cdot a_{7x+3} = 1$; $a_{7x+7} = a_{7x+6} \cdot a_{7x+4} = -1$. Тогда ~~после на поз. 8-14~~ посл. периодична с пер. дл. 7 без периода, т.к. поз. 1-7 = (1, 1, −1, −1, −1, 1, −1) соотв. Раз $2022 \equiv_7 6$, то $a_{2022} = a_6 = \cancel{-1}\ 1$.

Ответ: 1.

чистовик

Задача 1

Пусть x, y, z - веса, поднятые А, Б, В соотв. Тогда

$x+y=220$кг; $x+z=240$кг; $y+z=250$кг. Тогда $2(x+y+z)=(220+240+250)$кг $=710$кг $\Rightarrow x+y+z=355$кг. Тогда

$z=355$кг $-(x+y)=135$кг; $y=355$кг $-(x+z)=115$кг;

$x=355$кг $-(y+z)=105$кг. $\max(x,y,z)=135$кг $\Rightarrow$ ответ -

- 135 кг.

Задача 2

Если $\frac{1}{2022}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, то домножим на $2022xy$ и

т.к. $x,y\neq 0$, получим $xy=2022(x+y)$ и $(x-2022)(y-2022)=$

$=2022^2$. $2022^2=3^2\cdot 2^2\cdot 337^2$, 337, 2, 3 - простые числа,

поэтому у числа 2022^2 всего 27 делителей;

~~Заметим, что раз $x,y\in N$, то $x,y\geq 1 \Rightarrow y-2022\geq -2021$;~~

~~$x-2022\geq -2021$, и если $y-2022<0$, то $x-2022<0$, т.к.~~

~~$(x-2022)(y-2022)>0$; тогда $-(y-2022)\leq 2021$; $-(x-2022)\leq$~~

~~≤ 2021 и $(-(y-2022))\cdot(-(x-2022))=(x-2022)(y-2022)=$~~

~~$=2022^2$, но $\leq 2021\cdot 2021$ (?!). Также $x-2022\neq 0$; $y-2022\neq 0$,~~

~~тогда $x-2022$, $y-2022$ - натуральные числа, и следова-~~

~~тельно делители 2022^2. Тогда $x-2022$ может быть одним~~

~~из 27 дел. 2022^2 и тогда y определ. однозначно от x, т.к.~~

~~$x-2022\neq 0$. Тогда всего есть 27 вариантов для x~~

~~и 27 пар нат~~

раз $x, y \in \mathbb{Z}$, то $x-2022$ – целое $\Rightarrow$ $x-2022$ – какой-то дел. числа 2022^2 ^{1}, или какой-то дел. числа 2022 умноженный на -1. ^{2} Всего таких чисел есть 54, ~~но~~, также y однозначно определяется от x и при таком x, удовл. нашим параметрам (1, 2), y тоже будет целым ~~т.к.~~. ~~Но при x~~ Но заметим, что вариант $y=x=0$ не подходит, т.к. $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{y}$ иначе не определено, ~~Тогда для~~ но мы такой вариант посчитали (при $x, y = 0$ $(x-2022)(y-2022) = 2022^2 = -2022 \cdot -2022$).
Тогда всего $54-1$ пары целых x, y, удовл. уравнению.
Тогда ответ – 53.

Задача 5

Ответ:

Заметим, что $157605 = \cancel{3}3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 79$. (3, 5, 7, 19, 79 – простые числа), $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{cd}$, $\overline{de} \geq 10;\ \leq 99 \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall$ из 3 скобок в произведении принимает целое значение в диапазоне от 20 до 198. Поэтому есть всего 2 варианта:

1) $\overline{ab}+\overline{bc}$, $\overline{bc}+\overline{cd}$, $\overline{cd}+\overline{de}$ в каком-то порядке равны $5 \cdot 7$, $3 \cdot 19$, $79 \Rightarrow 35, 57, 79$;

2) $\overline{ab}+\overline{bc}$, $\overline{bc}+\overline{cd}$, $\overline{cd}+\overline{de}$ в каком-то порядке равны $7 \cdot 3$, $5 \cdot 19$, $79 \Rightarrow 21, 95, 79$.

2-й ~~случ~~ случай: посмотрим на скобку вида $\overline{xy}+\overline{yz}$, которая равна 21: $y > 0 \Rightarrow y \geq 1$; $x \geq 1 \Rightarrow \overline{xy} \geq 11 \Rightarrow \overline{yz} \leq 21 - 11 = 10$, но $\overline{yz} \geq 10 \Rightarrow \overline{yz} = 10$, $\overline{xy} = 11$. Раз $z = 0$, то $z = e$, иначе одно из чисел $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{cd}$, $\overline{de}$ начинается с 0 (то есть с z).

Тогда $\overline{cd}+\overline{de} = 21$, $c = 1$, $d = 1$, $e = 0$. Тогда $(\overline{ab}+\overline{bc}) \cdot (\overline{bc}+11) \cdot 21 = 157605$. Заметим, что $a, b \neq 0 \Rightarrow \overline{ab} \geq 11 \Rightarrow \overline{ab}+\overline{bc} \geq \overline{bc}+11 \Rightarrow$ $\overline{ab}+\overline{bc} = 95$, $\overline{bc}+11 = 79 \Rightarrow \overline{bc} = 68$. Тогда $\overline{ab} = 27 = 95 - 68$. $\Rightarrow b = 6$
Тогда $b = 7$. Но тогда $b = 6 = 7$ (?!) Тогда 2-й случай невозможен.

- - - - - - - - - - - - - - -

Тогда возможен только 1-й случай. ~~Зн Если~~

~~$\overline{ab}+\overline{bc} = 79$, то: $\overline{ab}+\overline{bc} = 11b + 10a + c$~~

чистовик

4

Заметим, что $(\overline{ab}+\overline{bc}) + (\overline{cd}+\overline{de}) = (\overline{bc}+\overline{cd}) + \overline{ab} + \overline{de} \geq$

$\geq \overline{bc}+\overline{cd}+20$; тогда если $\overline{bc}+\overline{cd} = 79$, то $\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{cd}+\overline{de} =$

$= 35+57 = 92 \geq 79+20$ (?!). Тогда

$\overline{ab}+\overline{bc} = 79$ или $\overline{cd}+\overline{de} = 79$.

~~Если $\overline{ab}+\overline{bc} = 79$, то если $\overline{bc}+\overline{cd} = 57$, то $\overline{cd}+\overline{de} =$~~

~~$= 35$. Заметим, что $\overline{ab}+\overline{bc} = 11b+10a+c \underset{11}{\equiv} 2 \Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow c-a \underset{11}{\equiv} 2$; также~~ Заметим, что все числа 35, 57, 79

$\underset{11}{\equiv} 2$, тогда $\overline{ab}+\overline{bc} \underset{11}{\equiv} 2$; $\overline{bc}+\overline{cd} \underset{11}{\equiv} 2$; $\overline{cd}+\overline{de} \underset{11}{\equiv} 2$;

$\overline{ab}+\overline{bc} = 11b+10a+c \underset{11}{\equiv} 2 \Rightarrow c-a \underset{11}{\equiv} 2$; также ~~что~~ $\overline{bc}+\overline{cd} =$

$= 11c+10b+d \underset{11}{\equiv} 2 \Rightarrow d-b \underset{11}{\equiv} 2$; $\overline{cd}+\overline{de} = 11d+10c+e \underset{11}{\equiv} 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow e-c \underset{11}{\equiv} 2$; заметим, что $a,b,c,d \neq 0 \Rightarrow a-c$ – число

от 8 до -8, т.к. от -9 до 9, если 9, то $c=0$; если -9, то $a=0$ (?!)$_{a=9}$ (?!);
$c=9$.

Тогда $a-c=2$; $b-d=2$. Тогда $c \neq 0$, $c \leq 9-2=7 \Rightarrow$

$\Rightarrow c-e=2$, т.к. $c-e \underset{11}{\equiv} 2$; от -9 до 9, 9 если $c=9$ (?!); -9 если
$e=0$,

$c=0$, $e=9$ (?!). Тогда $c-e=2$. Пусть $e=x$, $d=y$.

Тогда $c=x+2$; $b=y+2$; $a=x+4$. Тогда

$\overline{ab}+\overline{bc} = 10a+11b+c = 10x+40+22+11y+x+2=$

$= 11x+11y+40+22+2 = 64+11x+11y \geq 57, > 35$. Тогда

$\overline{ab}+\overline{bc} = 79$, тогда $11x+11y = 15 \geq 75 \Rightarrow y=0$. Тогда $e=0$,

$a=4$, $b=2$, тогда 4/число $40+(y+2)+20+y = 79$.

чистовик 5

1	2	3	4
1	5	6	7
2	3	4	7
5	6	4	1
3	6	7	2
3	6	1	5
			5

+2, 6, 12, 13, 2 15 (+5, 13, 16, +8) (+6, 4, 7) +3, 12

273

560

2022 : 7 622

2k

1400 62

145

134

1, 1, −1, −1, −1, −1, 1, −1,

1	2	3	4
1	5	6	7
2	3	4	7
5	6	4	4
3	6	7	2
3	4	1	5
6	7	2	5
4	1	2	3
7	1	5	6

1345

1, 1, −1, −1, −1, 1, −1, 1, −1,

237

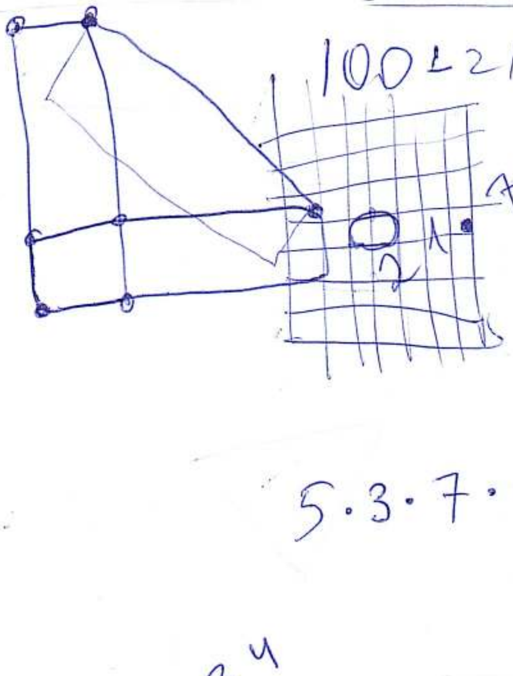
1 1 −1

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

1	1	−1	−1	−1	1	−1	1	1	−1	−1	−1	1	−1	1	1	−1	−1	−1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

−1

100121



79 · 95

3 · 19

31521

5 · 3 · 10507

5 · 7

79

5 · 3 · 7 · 1501

5 · 3 · 7 · 19 · 79

79 · 19

35

57

79

1234

1567

234

234

~~700 + 81 + 90 +~~

~~+630~~

1234 1567

1423 1756

1342 1675

1 1

1 1

1 1

5.

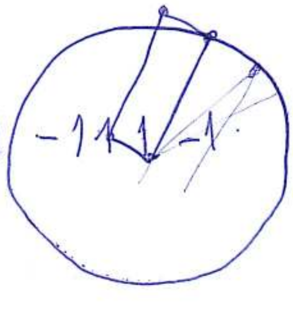
~~1, 4,~~ 6

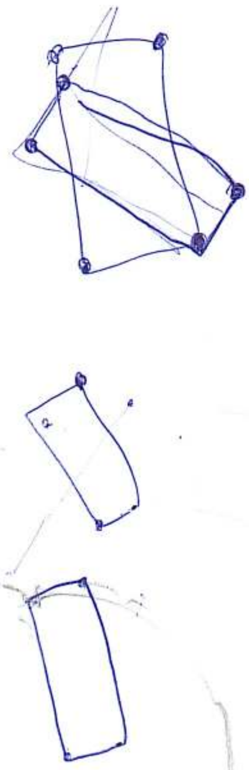
черновик 1

13:49

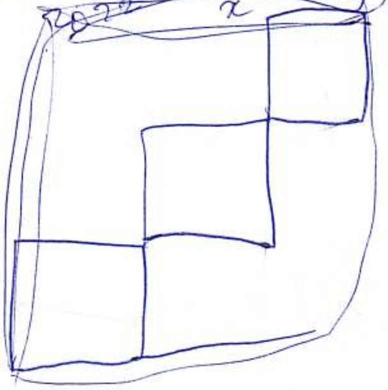
2) 54

1 1 − 1 − 1 − 1 − 1 1 − 1





$$\frac{1}{2022} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

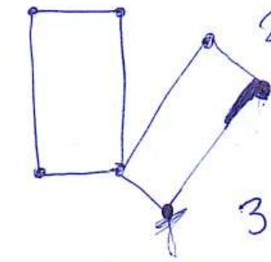


$$\frac{x+y}{xy} = \frac{1}{2022}$$

1,1,-1,-1,-1,-1,1,-1

$2022(x+y) = xy$

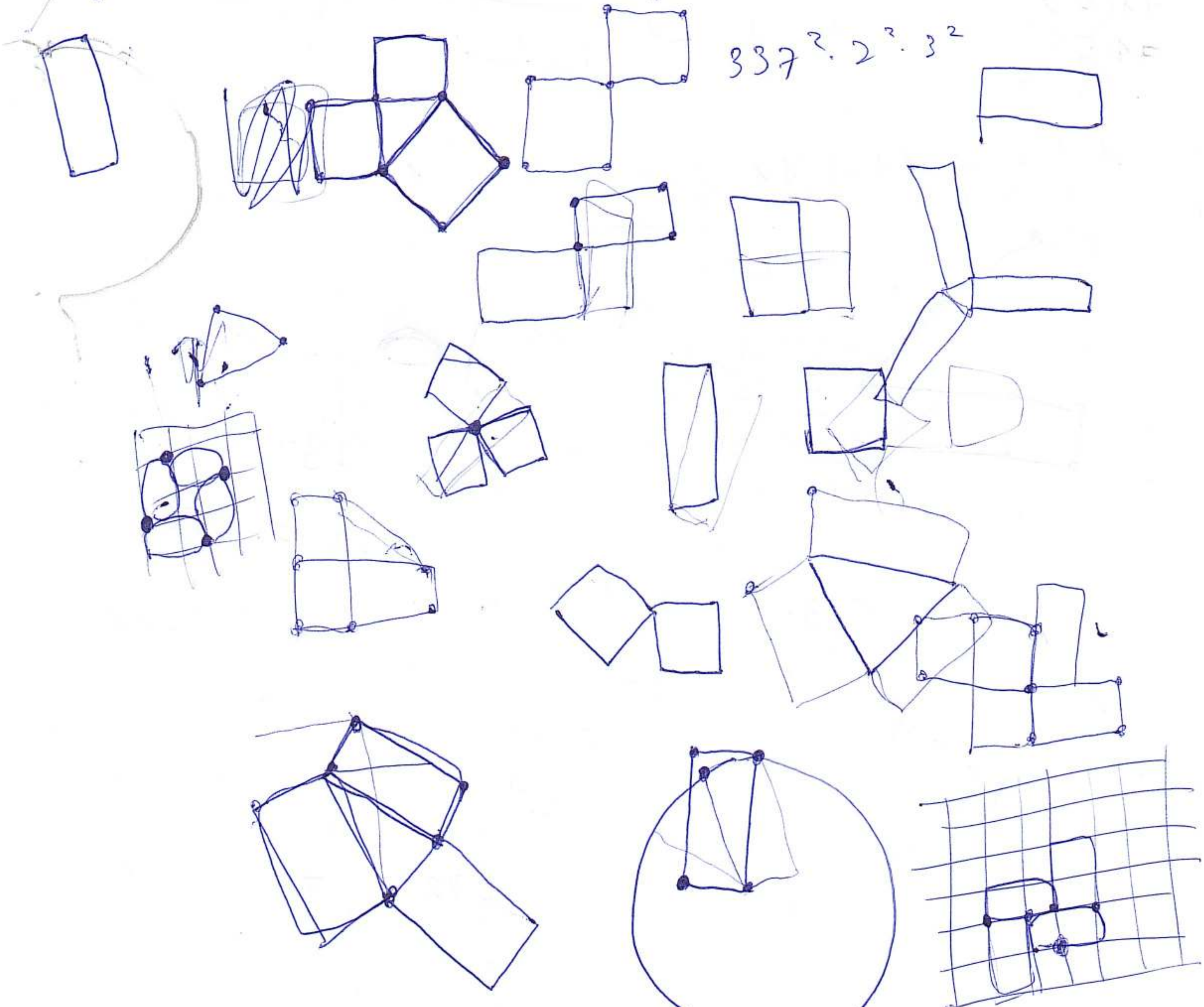
$(x-2022)(y-2022) = 2022^2$



$337 \cdot 6$

54.

$337^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2$



черновик 2