МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Большаков Михаил Александрович**

Класс: **8 класс**

Технический балл: **70**

Дата проведения: **12 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6
Оценка	15	0	0	15	20	20

Черновик, Лист 1

А Б В

$А+Б+В=S$

$2022=\frac{xy}{x+y}$

$А+Б=220$ кг $\Rightarrow$ $\boxed{В=\boxed{135}}$

$А+В=240$ кг $\Rightarrow$ $Б=115$

$Б+В=250$ кг $\Rightarrow$ $А=105$

1234567

$\frac{1}{2022}=\frac{y+x}{xy}$

$S=\frac{220+240+250}{2}=\frac{710}{2}=355$

Ответ: $В=135$

$8 \quad \frac{1}{2022}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$

$x;y+2022$

$x=(2022-x)\cdot k$

$2022 \mid 7$, 288

$x\neq0$

$y\neq0$

$xy=2022(y+x)$

1 1 -1 -1 -1 1

$y(x-2022)=2022x$

$y=\frac{2022x}{2022-x}$

1 1 -1 -1 -1

+ + - - - - + - + + - - -

$x\neq2022$

	10b	d	11c
10a	100ab	10ad	110ae
e	10be	ed	11ec
11b	110b	11bd	121bc

$x=2022$

2020

$\underbrace{1-1-1\ 1-1\ 1\ 1}_{6}-1-1-1$

$\overline{abcde}=a_{11}$

10a+b+10b+e

10b+e+10c+d

10c+d+10d+e

$(\overline{ac}+11b)(\overline{bd}+11c)(\overline{ce}+11d)=$

5,1,6,4,2,3,2

3,6 2,1,6 3,7,1,2

3,7,5,2 4,7,2,3,6,1,5

1,2,3,4 4,5,7

3,1,6,2,5,7,4

3 3 3 3

24

567 → 421 → 367 → 215 → 406 → 315 →

345 ← 762

Черновик, лист 2

№1	№2	№3	№4
1	4	3	2
6	7	3	5
4	2	1	
	3	6	7
2	1	5	
4	7	6	

№1	№2	№3	№4
1	4	3	2
6	7	3	5
4	2	1	5
4	3	6	7
5	3	2	1
7	6	2	9
3	1	5	4
3	1	3	4
2	1	7	6

1	2	3	4	5	6
135		9a	1		

$x_1 = ab$

$x_2 = bc$

$x_3 = cd$

$x_4 = de$

$x_1 \cdot 1000 + x_3 \cdot 10 + e = \boxed{29\,21\,95}$

$= a \cdot 10000 + x_2 \cdot 100 + x_4$

$5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 79$

29 35 57

$(x_1 + x_2)(x_2 + x_3)(x_3 + x_4) = 157605$

$x_3 x_2 + x_3^2 + x_4 x_3$

$x_2 \cdot x_4$

$e = 0$

$c = 1$

$d = 1$

b, c, d

11+24

22+13

22+7

11+18

10+d

88

$10b + 12$

$10a + 11b$

$a = 8$, $c = 8$

$b = 8$

$c = 1$

$e = 8$

$d = 1$

15 7605

31521

10507

1501

79

2 3 5 7

Черновик, Лист 3

79, 35, 57

$11+24$ $22+13$

$b=2$
$d=4$
$c=1$

$10a+1+22$
$10+e+44$
--- 3
X

$b=1$
$a=2$
$c=4$

$10+d+44$
$40+e+11d$

$d=3$
$e=6$

~~210~~
21436

$c=1$
$e=4$
$d=1$

$10a+1+11b$
$10b+1+44$
--- 5
X

$e=1$
$e=3$
$d=2$

$(10a+1+11b)$
$(10b+2+33)$
--- 5
X

$b=1$
$d=3$
$c=2$

$(10a+2+11)$
$(20+e+33)$
X --- 3

$a=1$
$c=3$
$b=2$

$(20+d+33)(30+e+44)$
$d=4$ $e=5$

12345

$(21+14)(14+43)(43+36)$
35 57 79

$(12+23)(23+34)(34+45)$
35 57 79

$35 \times 57 = 1995$

$1995 \times 79 = 157605$

$2022 : 288$

Чистовик, Лист 4

№1

Пусть веса которые подняли А, Б, В - будут ~~$M_a, M_б, M_в$~~ $M_a, M_б, M_в$ соответственно, тогда:

$$\begin{cases} M_a + M_б = 220 (кг) \\ M_б + M_в = 250 (кг) \\ M_в + M_a = 240 (кг) \end{cases}$$

~~Тогда пусть~~ Обозначим за S - сумму всех весов поднятых А, Б и В: $S = M_A + M_б + M_в$, Тогда:

$$2S = M_a + M_a + M_б + M_б + M_в + M_в = 220 + 250 + 240 = 710$$

$$S = 355 \text{ (кг)}$$

Также:

$$M_A = S - (M_б + M_в) = 355 - 250 = 105 \text{ (кг)}$$

$$M_б = S - (M_A + M_в) = 355 - 240 = 115 \text{ (кг)}$$

$$M_в = S - (M_A + M_б) = 355 - 220 = 135 \text{ (кг)}$$

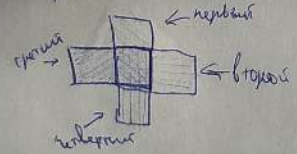
Тогда победителем был В, а он поднял 135 кг.

Ответ: 135 кг.

№2

Ответ: Да, можно.

Пример:



Чистовик, Лист 5

№ 4

1) Заметим, что число x_n зависит только от 3х своих предшественников (эти предшественники зависят от своих, и так далее). Значит если будут 2 одинаковых последовательности из 3х чисел: ($abc\ldots$ и $a_1b_1c_1\ldots$, где $a=a_1$, $b=b_1$, $c=c_1$) то следующие за ними числа тоже будут одинаковые:

если были

$$\ldots abcd\ldots \text{ и } \ldots a_1b_1c_1d_1\ldots, \text{ где}$$

$$a_1=a$$
$$b_1=b$$
$$c_1=c, \text{ то: } d_1=d(=a\cdot c=a_1c_1)$$

2) Теперь рассмотрим первые десять чисел последовательности:

$$\underbrace{1,1,-1,}_{n_1}\overset{n_3}{\overbrace{1,-1,-1,}}-1,1,-1,\underbrace{1,\overset{n_4}{\overbrace{1,-1}}}_{n_2}\ldots$$

Заметим, что у нас последовательность n_1 такая же как и n_2 => после n_2 будет следовать тоже что и после n_1, тогда n_3 такая же как n_4 => после n_4 идет тоже самое что и после n_3 => и так далее => у нас вся последовательность повторяется, идет кусками:

$$(1,1,-1,-1,-1,1,-1)(1,1,-1,-1,-1,1,-1)\ldots$$

3) Таких кусков до 2022го числа будет 288 (целых) и еще кусок из 5 чисел ~~1,1,-1,-1,-1~~, значит 2022ое число будет все в данном куске (в 289ом), а раз все куски одинаковые, то 2022ое число будет 1

Ответ: 1.

Чистовик, Лист 6

№5

1) $\underbrace{(\overline{ab}+\overline{bc})}_{n_1}\underbrace{(\overline{bc}+\overline{cd})}_{n_2}\underbrace{(\overline{cd}+\overline{de})}_{n_3}=157605=3\cdot5\cdot7\cdot19\cdot79$

~~2)~~ $(10a+11b+c)(10b+11c+d)(10c+11d+e)=157605$

$(\overline{ac}+11b)(\overline{bd}+11c)(\overline{ce}+11d)=7\cdot3\cdot5\cdot19\cdot79$

2) заметим что раз у нас есть числа:

$\overline{ab};\ \overline{bc};\ \overline{cd};\ \overline{de}$, то: $a\neq0$, $b\neq0$, $c\neq0$, $d\neq0$

3) Заметим, что n_1, n_2 и n_3 – суммы 2х двузначных чисел =>

$200>n_1\geq20$;
$200>n_2\geq20$;
$200>n_3\geq20$;

4) n_1; n_2 и n_3 – это либо $(7\cdot3)$, $(5\cdot19)$, (79) – в каком-то порядке

либо $(7\cdot5)$, $(3\cdot19)$, (79) – в каком-то порядке

Иначе одно из чисел n_1, n_2, n_3 – однозначное (меньше 20) или не является делителем 157605

5) Рассмотрим случай I:

n_1, n_2, n_3 – это в каком-то порядке 21, 95, 79.

тогда какое-то из чисел равно $21=10+11=11+10$ (← т.к. оба числа двузначные)

значит:

$$\left[\begin{array}{l}\overline{ac}+11b=21=10+11\\ \overline{bd}+11c=21=10+11\\ \overline{ce}+11d=21=10+11\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}c=0\\ d=0\\ e=0\end{array}\right.$$

Чистовик, Лист 7

Но $c \neq 0$ и $d \neq 0 \Rightarrow e = 0 \Rightarrow \overline{ce} + 11d = 21 = 10 + 11 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} c = 1 \\ e = 0 \\ d = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow n_2 = 10 \cdot b + 1 + 11 \cdot 1 = \underline{10b + 12}$$

число оканчивающееся на 2, но

$$\left.\left[\begin{array}{l} n_2 = 95, \\ n_2 = 79, \end{array}\right.\right\} \Rightarrow$$ Такого случая не могло быть

6) Рассмотрим случай II:

n_1, n_2, n_3 – это в каком-то порядке 35, 57, 29.

Тогда какойто из чисел равно $35 = \cancel{11+18 = 22+1} = 11+24 = 22+13$

(Т.к. одно из чисел делится на 11, а другое точно двузначное)

6.1) Рассмотрим случай II.1:

$$\left[\begin{array}{l} n_1 = 35 = 11 + 24 \\ n_2 = 35 = 11 + 24 \\ n_3 = 35 = 11 + 24 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b = 1 \\ a = 2 \\ c = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} b = 2 \\ d = 4 \\ c = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} c = 1 \\ e = 4 \\ d = 1 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} n_2 = 10 + d + 44 \\ n_3 = 40 + e + 11d \end{cases} \\ \begin{cases} n_1 = 10a + 1 + 22 \\ n_3 = 10 + e + 44 \end{cases} \\ \begin{cases} n_1 = 10a + 1 + 11b \\ n_2 = 10b + 1 + 44 \end{cases} \end{array}\right.$$

имеется ввиду не сама сумма, а именно такие слагаемые

Значит
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} n_2 = 10 + d + 44 < 70 < 79 \text{ т.к. } d < 10 \\ n_3 = 40 + e + 11d \end{cases} \\ \begin{cases} n_1 = \text{что-то заканчивающееся на 3, т} \\ n_3 = 54 + e \end{cases} \\ \begin{cases} n_1 = 10a + 1 + 11b \\ n_2 = \text{что-то заканчивающееся на 5} \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} n_2 = 57 = 10 + d + 44 \\ n_3 = 29 = 40 + e + 11d \end{cases} \\ \{\text{невозможно т.к. } \left[\begin{array}{l} n_1 = 79 \\ n_1 = 57 \end{array}\right. \\ \{\text{невозможно т.к. } \left[\begin{array}{l} n_2 = 79 \\ n_2 = 57 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Значит:
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} d = 3 \\ e = 6 \end{cases} \\ \text{—} \\ \text{—} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \overline{abcde} = 21436 \\ \text{—} \end{array}\right.$$

Чистовик, лист 8

~~2) Рассм~~

6.2) Рассмотрим случай $\text{II}.2$:

$$\left[\begin{array}{l} n_1=35=22+13 \\ n_2=35=22+13 \\ n_3=35=22+13 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=1 \\ c=3 \\ b=2 \end{cases} \\ \begin{cases} b=1 \\ d=3 \\ c=2 \end{cases} \\ \begin{cases} c=1 \\ e=3 \\ d=2 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} n_2=20+d+33 \\ n_3=30+e+44 \end{cases} \\ \begin{cases} n_1=10a+2+11 \\ n_3=20+c+33 \end{cases} \\ \begin{cases} n_1=10a+1+11b \\ n_2=10b+2+33 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow$$

вместо не самы чисел а ~~в~~ их слагаемые

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} n_2=53+d<65<79 \text{ т.к. } d<10 \\ n_3=74+e \end{cases} \\ \begin{cases} n_1 = \text{чтото оканчивающееся на } 3 \\ n_3=53+e \end{cases} \\ \begin{cases} n_1=10a+1+11b \\ n_2 - \text{чтото оканчивающееся на } 5 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} n_2=57=53+d \\ n_3=79=74+e \end{cases} \\ \text{невозможно т.к. } \left[\begin{array}{l} n_1=79 \\ n_1=57 \end{array}\right. \\ \text{невозможно т.к. } \left[\begin{array}{l} n_2=79 \\ n_2=57 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Значит:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} d=4 \\ e=5 \end{cases} \\ \text{—} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \overline{abcde}=12345 \\ \text{—} \end{array}\right.$$

Ответ: $\overline{abcde}=12345$
или
$\overline{abcde}=21436$

№6

Ответ: 8.

Рассмотрим сумму кол-во горящих цветов которыми горели лампочки, т.е. до 1ого хода она была $1+1+1+1=4$, потом ~~[illegible]~~ $\leq 4+1+1+1=7$, после $\leq 7+1+1+1=10$. Она каждый ход увеличивается не более чем 3 (т.к. мы можем добавить новые цвет не более чем к 3им лампам)

Чистовик, лист 9

Причем эта сумма до 1ого хода = 4, а после всех ходов: 7+7+7+7=28 ⟹ мы должны прибавить 24, а так как за каждый ход мы прибавляем не более 3х, то всего ходов хотя бы 8.

<u>Пример:</u>

ход \ лампа	1	2	3	4
0	1	4	3	2
1	6	7	3	5
2	4	2	1	5
3	4	3	2	1
4	7	6	2	4
5	3	1	5	~~6~~4
6	2	1	7	6
7	2	5	4	3

← мы пронумеровали цвета так чтобы цвета которыми горели лампочки №1, №2, №3, №4 были под номерами 1, 4, 3, 2 соответственно (а остальные цвета пронумеровали 5, 6, 7 в произвольном порядке)

ход \ лампа	№1	№2	№3	№4
0	1	4	3	2
1	6	7	3	5
2	4	2	1	5
3	4	3	6	7
4	5	3	2	1
5	7	6	2	4
6	3	1	5	4
7	2	1	7	6
8	2	5	4	3

▨ – лампа которую мы первую заменяем в этом ходу