МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Бордачева Екатерина Андреевна**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **100**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	10	15	15	15

Чистовик.

№1.

1) $B = \frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{(\sqrt{3}-1)^2} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{3}-1} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}{2}} = 1$

($\sqrt{3}>1$, т.к. $\sqrt{3}^2>1$)

2) Докажем по индукции, что $\frac{3}{(1\cdot2)^2}+\frac{5}{(2\cdot3)^2}+\ldots+\frac{2n-1}{((n-1)\cdot n)^2}=\frac{n^2-1}{n^2}$.

База для $n=2$: $\frac{3}{(1\cdot2)^2}=\frac{2^2-1}{2^2}$ – верно.

Шаг. Утверждение верно для всех чисел $\leq n$. Докажем для $n+1$.

$\underbrace{\frac{3}{(1\cdot2)^2}+\frac{5}{(2\cdot3)^2}+\ldots+\frac{2n-1}{((n-1)n)^2}}_{=\frac{n^2-1}{n^2} \text{ по предположению индукции}}+\frac{2(n+1)-1}{(n(n+1))^2}=\frac{n^2-1}{n^2}+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\frac{(n^2-1)(n^2+2n+1)+2n+1}{n^2(n+1)^2}=$

$=\frac{n^4+2n^3+n^2-n^2-2n-1+2n+1}{n^2(n+1)^2}=\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}=\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}$, ч.т.д.

3) $A=\frac{3}{(1\cdot2)^2}+\frac{5}{(2\cdot3)^2}+\ldots+\frac{89}{(44\cdot45)^2}=\frac{45^2-1}{45^2}<1=B \Rightarrow A<B$.

Ответ: $A<B$.

№2.

1) Двузначные числа, $\vdots 19$: 19, 38, 57, 76, 95.

Двузначные числа, $\vdots 23$: 23, 46, 69, 92.

$\Rightarrow$ 2 соседние цифры загаданного числа могут образовывать: 19, 23, 38, 46, 57, 69, 76, 92, 95.

~~2) Если в загаданном~~

2) Первая цифра 1 $\Rightarrow$ вторая – 9, третья – 2 или 5. Если третья цифра 2, то далее 3, затем 8, а цифр ~~чисел~~, образующих в паре с 8 число, $\vdots 19$ или $\vdots 23$, нет $\Rightarrow$ если 9 не 4ая с конца цифра загаданного числа, то ~~рядом с ней~~ следующая – 5, далее 7, затем 6, потом 9 и т.д.

$1\,\underbrace{9576}_{4}\,95769\ldots5769???$

В числе 2021 цифра $\Rightarrow$ четвёртая с конца – 9.

Далее 2 варианта: 1) 238 $\Rightarrow$ последняя цифра 6 либо 8.
2) 576

Ответ: 6 или 8.

Чистовик.

№3.

$f(x) = \frac{1}{\sqrt[9]{1-x^9}}$,

$f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt[9]{1-\left(\frac{1}{\sqrt[9]{1-x^9}}\right)^9}} = \frac{1}{\sqrt[9]{1-\frac{1}{1-x^9}}} = \frac{1}{\sqrt[9]{\frac{1-x^9-1}{1-x^9}}} = \frac{1}{\sqrt[9]{\frac{x^9}{x^9-1}}} = \frac{\sqrt[9]{x^9-1}}{x}$

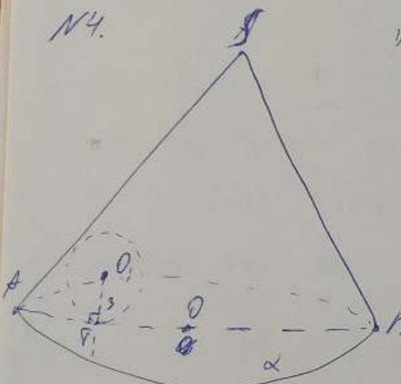
$f(f(f(x))) = \frac{1}{\sqrt[9]{1-\left(\frac{\sqrt[9]{x^9-1}}{x}\right)^9}} = \frac{1}{\sqrt[9]{1-\frac{x^9-1}{x^9}}} = \frac{1}{\sqrt[9]{\frac{x^9-x^9+1}{x^9}}} = x \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{f(f(\ldots\ldots f(2022))\ldots)}_{1305\text{ раз}} = 2022$

$(1305 ; 3)$

Ответ: 2022

№4.



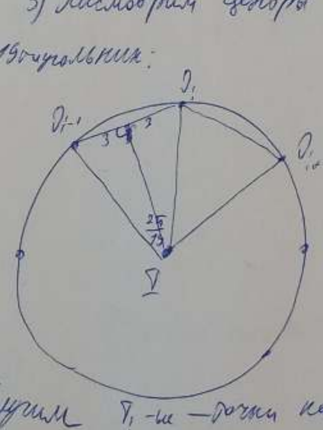
1) Шары касаются плоскости основания конуса $\Rightarrow$ все $\rho(O_i ; \alpha) = 3 \Rightarrow O_i$ лежат в 1ой плоскости.
(α — плоскость основания конуса)

O_i — центры шаров $(O_{20} \equiv O_1)$.

2) $O_iO_{i+1} = 3+3 = 6$ ($K_i \in O_iO_{i+1}$, K_i — точка касания iого и $i+1$ого шара)

3) Рассмотрим центры шаров O_i. Они образуют правильный 19-угольник:

$TO_i = 3 \cdot \sin\frac{\pi}{19}$ — радиус опис. окр-ти 19-угол.-ка.



4) Спроецируем O_i-ые на α. Получим T_i-ые — точки касания шаров с α.
Т.к. O_i-ые лежат в плоскости $\parallel \alpha$ и $O_iT_i \parallel O_{i+1}T_{i+1} \parallel \ldots$, то $O_1O_2\ldots O_{19}T_1T_2\ldots T_{19}$ — правильная призма $\Rightarrow$
и $O_iT_i \perp \alpha$.

$\Rightarrow OT_i = TO_i = 3\sin\frac{\pi}{19}$
O — центр основания конуса

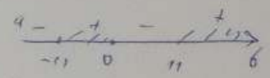
5) Рассмотрим сечение пл-ти SOO_i конуса: $(SOO_i) \cap \alpha = AB$,
$SA = SB \Rightarrow \triangle ASB$ — р/б, $\angle ASB = 60° \Rightarrow \triangle ASB$ — р/ст $\Rightarrow \angle SAB = 60° \Rightarrow \angle O_iAT_i = 30° \Rightarrow AT_i = O_iT_i \cdot \mathrm{ctg}\,30° = 3\sqrt{3} \Rightarrow$
$\Rightarrow AO = 3\sqrt{3} + 3 \cdot \sin\frac{\pi}{19}$ — радиус основания конуса.

Ответ: $3\sqrt{3} + 3\sin\frac{\pi}{19}$

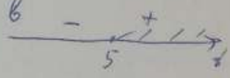
Чистовик.

№5. Среднее число >0 тогда и только тогда, когда хотя бы 2 числа из тройки >0.

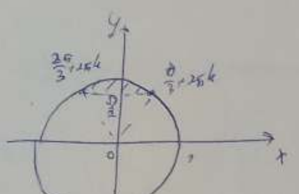
1) $a = t^3 - 121t = t(t-11)(t+11)$ $\qquad$ $a>0$ при $t \in (-11;0) \cup (11;+\infty)$



2) $b = 2^t - 32$ $\qquad$ $b>0$ при $t>5$.



3) $c = \sin t - \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $c>0$ при $t \in \left(\frac{\pi}{3}+2\pi k; \frac{2\pi}{3}+2\pi k\right)$, где $k \in \mathbb{Z}$.

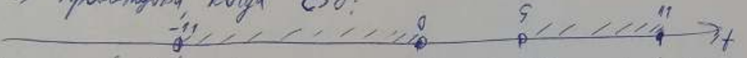


4) Заметим, что <u>при $t>11$</u> среди a, b, c точно есть $a>0$ и $b>0$ $\Rightarrow$ среднее >0.

при ~~$t\in$~~ $t \leq -11$ $\quad a \leq 0$ и $b \leq 0 \Rightarrow$ среднее ≤ 0.

при $t \in [0;5]$ $\quad a \leq 0$ и $b \leq 0 \Rightarrow$ среднее ≤ 0.

5) Промежутки, когда $c>0$:



//// — ~~[illegible]~~ одно из $a, b > 0$ (если при этом $c>0$, то среднее >0)

$\ldots \left(-\frac{17}{3}\pi; -\frac{16}{3}\pi\right); \left(-\frac{11\pi}{3}; -\frac{10\pi}{3}\right); \left(-\frac{5\pi}{3}; -\frac{4\pi}{3}\right); \left(\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right); \left(\frac{7\pi}{3}; \frac{8\pi}{3}\right); \left(\frac{13\pi}{3}; \frac{14\pi}{3}\right)$.

$-\frac{11\pi}{3} < -11$, т.к. $\pi > 3$

$-\frac{10\pi}{3} > -11$, т.к. $10\pi < 33$ $(\pi < 3{,}15)$.

$\frac{2\pi}{3} < 5$ $\quad (2\pi < 2 \cdot 4 = 8 < 15)$

$\frac{7\pi}{3} > 5$ $\quad (7\pi > 21 > 15)$ $\qquad$ $\frac{13\pi}{3} > 11$, т.к. $13\pi > 13 \cdot 3 = 39 > 33$

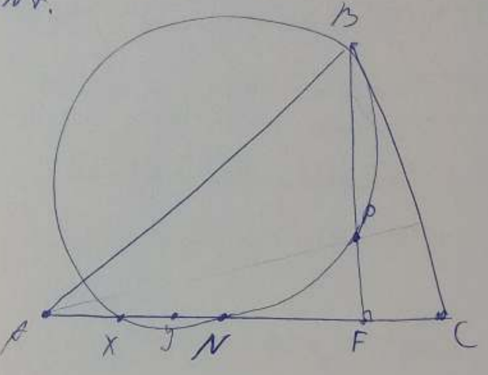
$\frac{8\pi}{3} < 11$ $\quad (8\pi < 8 \cdot 3{,}2 = 25{,}6 < 33)$

6) ~~[illegible]~~ Хотя бы 2 числа >0 при $t \in \left(-11; -\frac{10\pi}{3}\right) \cup \left(-\frac{5\pi}{3}; -\frac{4\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{3}; \frac{8\pi}{3}\right) \cup (11;+\infty)$.

Ответ: при $t \in \left(-11; -\frac{10\pi}{3}\right) \cup \left(-\frac{5\pi}{3}; -\frac{4\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{3}; \frac{8\pi}{3}\right) \cup (11;+\infty)$.

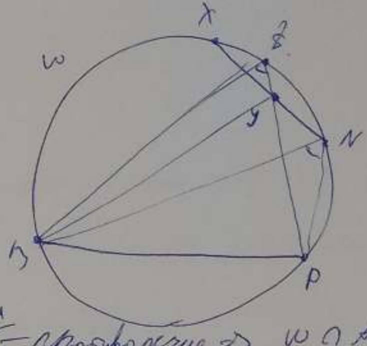
Чистовик.

№7.



1) ω — опис. окр-ть $\triangle BNP$.

Предположим, что $\omega \cap AC = \{N, X\}$, $X \neq N$. Тогда на отрезке AC найдётся т. Y: ~~Y∈отр. ХN~~. $Y \in$ отр. XN, $Y \in$ отр. AC



$PY \cap \omega = Z$.

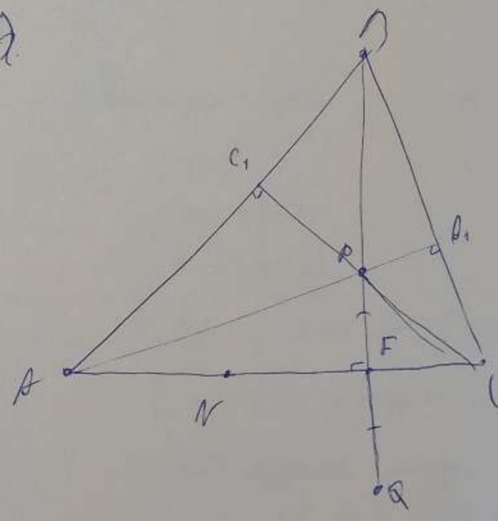
$\angle BZP = \angle BNP$,

$\angle BYP = \angle BZP + \angle ZPY$ (внешний $\angle \triangle BZY$)

$\Rightarrow \angle BYP > \angle BNP$, $\Rightarrow$ $Y \in AC$

$\Rightarrow \angle BNP$ не максимально возможный угол — противоречие $\Rightarrow$ $\omega \cap AC = !\{N\}$, т.е. ω касается пр. AC.

2)



2) Обозначим Q — точка, симметричная т. P отн. AC.

Тогда $\triangle APC = \triangle AQC$, $\angle AQC = \angle APC = 180^\circ - \angle PAC - \angle PCA =$

$= 180^\circ - (90^\circ - \angle ACB) - (90^\circ - \angle CAB) = \angle ACB + \angle CAB = 180^\circ - \angle ABC \Rightarrow$

(из прям. $\triangle AA_1C$) (из прям. $\triangle CAC_1$) (из $\triangle ABC$).

AA_1, CC_1 — высоты $\triangle ABC$.

$\Rightarrow ABCQ$ — впис. ч/у. $\Rightarrow FA \cdot FC = FB \cdot FQ$ (степень т. F отн. опис. окр-ти $\triangle ABC$)

$FQ = FP$ (точки P и Q симм. отн. AC)

$\Rightarrow FA \cdot FC = FB \cdot FP$

3) AC касается опис. окр-ти $\triangle BNP$ (по п. 1) $\Rightarrow FN^2 = FP \cdot FB$ (степень т. F отн. ω)

$\Rightarrow FN^2 = FA \cdot FC = 14 \Rightarrow$

$\Rightarrow FN = \sqrt{14}$.

Ответ: $\sqrt{14}$.

Чистовик.

№6.

$a\,tg^3x+(1-a-2a^2)\,tg^2x+(2a^2-2a-1)\,tgx+2a=0,$

$a\,tg^3x+tg^2x-a\,tg^2x-2a^2tg^2x+2a^2tgx-2a\,tgx-tgx+2a=0$

$(tgx-1)(a\,tg^2x+tgx-2a^2tgx-2a)=0,$

$(tgx-1)(a\,tg^2x-(2a^2-1)tgx-2a)=0.$

1) $a=0$:

$(tgx-1)\cdot tgx=0, \iff \left[\begin{array}{l} tgx=1 \\ tgx=0 \end{array}\right.$ на ~~отр~~ интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ корни 0 и $\frac{\pi}{4}$. ~~Вз~~

Наибольшая разность между корнями равна $\frac{\pi}{4}$

2) $a\neq 0$:

$(tgx-1)(tgx-2a)(a\cdot tgx+1)=0 \iff \left[\begin{array}{l} tgx=1, \Rightarrow x=\frac{\pi}{4} \\ tgx=2a \\ tgx=-\frac{1}{a} \end{array}\right.$

Рассмотрим корни ур-ия на интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$:

$\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4} \\ x=arctg(2a) \\ x=arctg(-\frac{1}{a}) \end{array}\right.$

Одно из чисел $2a$, $-\frac{1}{a}$ — отрицательное $(a\neq 0)$ $\Rightarrow$ между корнем $x=\frac{\pi}{4}$ и одним из $x=arctg(2a)$ и $x=arctg(-\frac{1}{a})$ будет разность больше, чем $\frac{\pi}{4}$ (т.к. $arctg\,t<0$ для $t<0$) $\Rightarrow$ наиб. разность между корнями будет больше $\frac{\pi}{4}$ $\Rightarrow$ наименьшее значение наиб. разности между корнями на $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ достигается при $a=0$ и равно $\frac{\pi}{4}$.

Ответ: при $a=0$ — $\frac{\pi}{4}$.

Черновик.

$$A = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \dots + \frac{87}{(43\cdot 44)^2} + \frac{89}{(44\cdot 45)^2}$$

$$\sqrt[2]{(\sqrt{3}-1)^2}$$

$$B = \frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}}{\sqrt[3]{2}} = 1$$

$$\frac{3}{4} - \frac{5}{36} + \frac{7}{144} + \frac{9}{}$$

$$\frac{3^{3}\cdot 5}{36} = \frac{32}{36} = \frac{8}{9}$$

$$\frac{7}{144}\ \frac{8}{9}$$

$$\frac{8}{9} + \frac{7}{144} = \frac{135}{144}$$

$$\frac{8}{9} + \frac{7}{144} = \frac{135}{144} = \frac{15}{16}$$

$$\frac{2x+1}{((x-1)(x+1))^2} \quad \frac{2x+1}{((x-1)\cdot x)^2} = \frac{2x-1}{x^2-x}$$

$$\frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \dots + \frac{2n+1}{((n-1)\cdot n)^2} \ ? \ \frac{n^2-1}{n^2} \qquad (n+1)^2-1 = n^2+2n$$

$$\frac{n^2-1}{n^2} + \frac{2n+1}{(n(n+1))^2} = \frac{(n^2-1)(n^2+2n+1)+2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{n^4+2n^3+n^2-n^2-2n-1+2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{n^2+2n}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}$$

19 238
5769 2 8 695765....
19 38 57 76 95
23 46 69 92

238
576

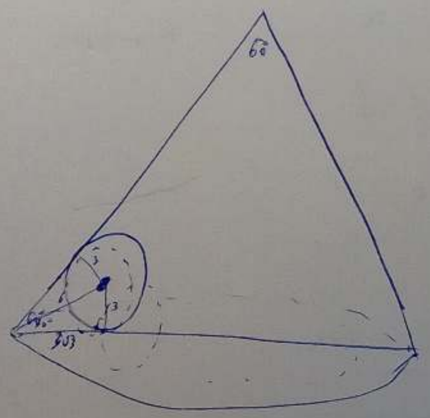
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}$$

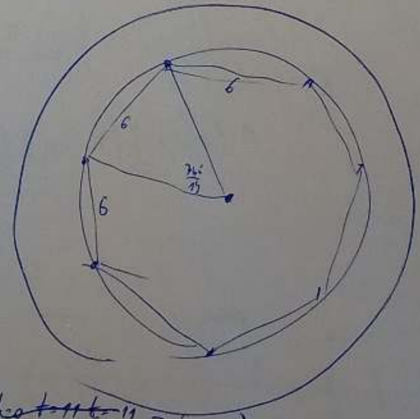
$$f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-\frac{1}{1-x^5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{\frac{-x^5}{1-x^5}}} = \frac{\sqrt[5]{x^5-1}}{x}$$

$$f(f(f(x))) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-\frac{x^5-1}{x^5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{\frac{1}{x^5}}} = x$$

$$\frac{360^\circ}{15} = 1$$

$$360 : 15 = 24$$



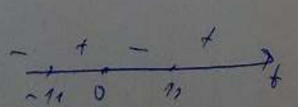


$t^3 - 121t$ $\quad$ ~~$t<0$~~, $t\in[-11;0]\cup[11;+\infty)$

$2^t - 32$ $\quad$ $t \geq 5$

$\sin t - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$t^2 - 121$



$11 > \frac{5\pi}{3}$

$\frac{11\pi}{3} \ 3{,}11$

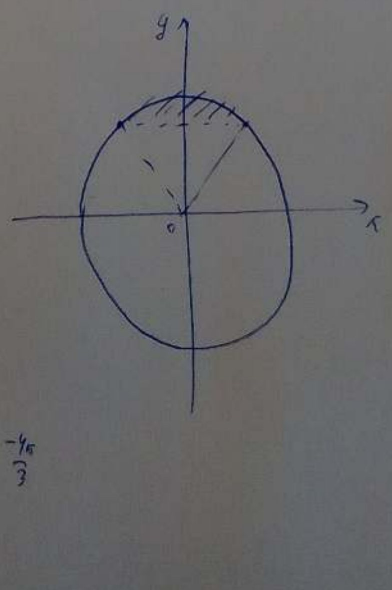
$\frac{10\pi}{3} < 11$

$10\pi < 33$

$31{,}4$

$t \geq 11$ – точно да.
$t \in (0;5)$ – точно нет.
$t < -11$ – точно нет.

$t\in[-11;0]\cup[5;11)$



$-\frac{5\pi}{3};\ -\frac{4\pi}{3}$

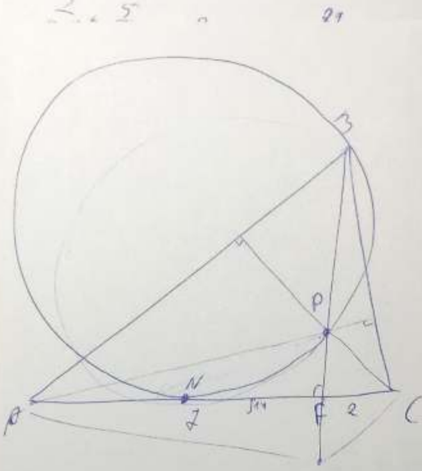
$-\frac{11\pi}{3}$

$\frac{\pi}{3}$ до $\frac{2\pi}{3} < 5$

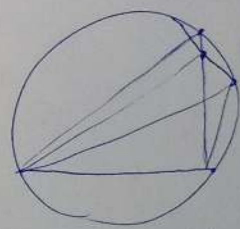
$\frac{7\pi}{3}$ до $\frac{8\pi}{3} > 5$

$\frac{7\pi}{3} > 5 \quad \frac{8\pi}{3} < 11$

Черновик.



$\angle BNP - \max.$



$tg^2x - tgx = 0.$

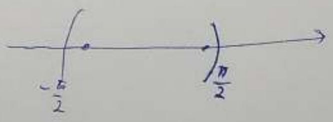
$\left[\begin{array}{l} tgx = 0 \\ tgx = 1. \end{array}\right.$

$a\,tg^3x + (1-a-2a^2)\,tg^2x + (2a^2-2a-1)\,tgx + 2a = 0.$

$tgx\,(tgx - 1)$

$at^3 + (1-a-2a^2)t^2 + (2a^2-2a-1)t + 2a = 0.$

$\cancel{(1-a-2a^2)(t^2-t)}$



$at^3 - 2a^2t^2 - at^2 + t^2 + 2a^2t - 2at - t + 2a = 0$

$(t-1)(at^2 - 2a^2t + t - 2a) = 0$

$(t-1)(at^2 - (2a^2-1)t - 2a) = 0$

$D = 4a^4 - 4a^2 + 1 + 8a^2 = (2a^2+1)^2$

$\left[\begin{array}{l} t = \frac{2a^2-1+2a^2+1}{2a} = 2a \\ t = \frac{2a^2-1-2a^2-1}{2a} = -\frac{1}{a} \end{array}\right.$

$a = 0;$

$tg^2x - tgx = 0.$

$t^3 - 121t$

$\frac{\pi}{3};\ \frac{2\pi}{3}.$

$\frac{2\pi}{3} > 5$

$2^t - 32$

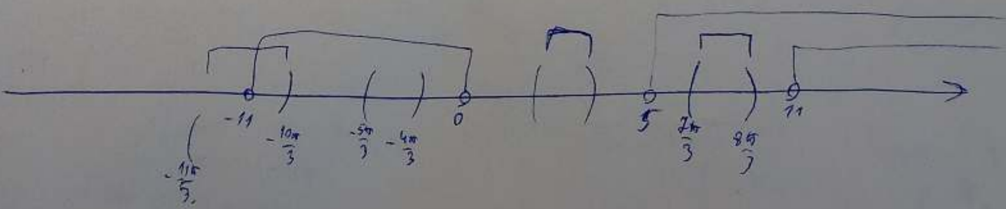
$\frac{7\pi}{3};\ \frac{8\pi}{3} < 11$

$a(t-1)(t-2a)(t+\frac{1}{a}) = 0$

$\sin t - \frac{\sqrt{3}}{2}.$

$11\pi > 33$

$10\pi < 33$



Черновик.

$$\frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \frac{7}{(3\cdot 4)^2} + \ldots + \frac{87}{(43\cdot 44)^2} + \frac{89}{(44\cdot 45)^2}$$

$$\frac{2n-1}{(n-1)\cdot n}$$

19 38 57 76 95

23 46 69 92

19 238
5769

238
576