МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Бугай Артём Алексеевич**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **85**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	10	15	15	15	15	0

№1.

$$A=\frac{\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[6]{(1+\sqrt{3})^2}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt{3})\cdot(\sqrt{3}-1)}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}=\underline{1}$$

$$B=\frac{3}{(1\cdot 2)^2}+\frac{5}{(2\cdot 3)^2}+\ldots+\frac{119}{(59\cdot 60)^2}=\frac{2^2-1^2}{2^2\cdot 1^2}+\frac{3^2-2^2}{3^2\cdot 2^2}+\ldots+\frac{60^2-59^2}{60^2\cdot 59^2}=$$

$$=\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^2}\ldots\ldots+\frac{1}{59^2}-\frac{1}{60^2}=$$ т.к. все $\frac{1}{x^2}$ при $x\in[2;59]$ встр. 2 раза с + и с −, т.е. в сумме дадут 0

$$=\frac{1}{1^2}-\frac{1}{60^2}=1-\frac{1}{3600}<1=A$$

$$B\overset{\Downarrow}{<}A$$

Ответ: A.

№2.

Если оно начинается с 4, то вторая цифра a_2 д.б. такой, что $\overline{4a_2}\,\vdots\,19$ или на 23. В диапазоне $[40;49]$ ни одно число не $\vdots$ 19 и только $46\,\vdots\,23\Rightarrow$ $\Rightarrow a_2=6$. Ан-но, 3-я цифра a_3 такая, что $\left[\begin{array}{l}\overline{6a_3}\,\vdots\,23\\ \overline{6a_3}\,\vdots\,19\end{array}\right.\begin{array}{l}\to a_3=9\\ \to\varnothing\end{array}\Rightarrow$ $\Rightarrow a_3=9$. Ан-но, $\left[\begin{array}{l}\overline{9a_4}\,\vdots\,19\to a_4=5\\ \overline{9a_4}\,\vdots\,23\to a_4=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a_4=5\\ a_4=2\end{array}\right.$ Если $a_4=5$, то $\left[\begin{array}{l}\overline{5a_5}\,\vdots\,23\to\varnothing\\ \overline{5a_5}\,\vdots\,19\to a_5=7\end{array}\right.$. Если $a_4=2$, то $a_5=3$. Значит $\left[\begin{array}{l}a_5=7\to a_6=6\\ a_5=3\to a_6=8\end{array}\right.$

Заметим, что при $a_6=8$ $\left[\begin{array}{l}\overline{8a_7}\,\vdots\,19\to\varnothing\\ \overline{8a_7}\,\vdots\,23\to\varnothing\end{array}\right.$ не имеет решения, а значит $a_6=6=a_2$, т.е. образовался цикл. Действительно, если $a_4=2$, то однозначно $a_5=3\to a_6=8$ –?! Значит! Верн. вариант пос-ти это $a_1=4$; $a_2=6$; $a_3=9$; $a_4=5$; $a_5=7$; $a_6=6$; $a_7=9$; $\left[\begin{array}{l}a_8=5\\ a_8=2\end{array}\right.$ –?! т.к. выше, ан-но с $a_4=2$, пр-е на шее ?

чистовик, стр 2 из 7

№ 2 (прод-е)

a_{10} будет $= 8$!! $\Rightarrow a_8 = 5$, $a_9 = 7$, $a_{10} = 6$ и т.д. (по отвл. соображ-ям a_{12}, a_{16} и т.д. будут $= 5$, а не 2)

Получается, что у нас число имеет вид $\underbrace{4\,6957\,6957\ldots}_{2021}$. Заметим, что без первой 4 у нас 2020 цифр. $2020 \vdots 4 \Rightarrow$ целое число „6957" - циклов $\Rightarrow$ последняя цифра - 7.

Ответ: 7.

№ 3

$f(x) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}$ $\quad f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt[7]{1 - \frac{1}{1-x^7}}} = \frac{1}{\sqrt[7]{\frac{1-x^7-1}{1-x^7}}} =$

$= \frac{\sqrt[7]{1-x^7}}{-x} = \frac{1}{-x \cdot f(x)}$; $f(f(f(x))) = \frac{1}{\sqrt[7]{1 - \frac{1-x^7}{-x^7}}} =$

$= \frac{1}{\sqrt[7]{\frac{-x^7+x^7-1}{-x^7}}} = x$. Значит, $f(f(f(f(x)))) =$

$= f(x)$. Тогда $\underbrace{f(f(f\ldots f(x))\ldots)}_{1304\ f^n}$ $=$ (заменим $f(f(f(f(x))))$ на $f(x)$)

$= \underbrace{f(f(f\ldots f(x))\ldots))}_{1301\ f^n}$ $\underset{и\ т.\ ч.}{=}$ $\underbrace{f(f(f\ldots f(x)\ldots))}_{1298\ f^n}$ $=$ или же будем „убирать" по 3 f,

$1298 \equiv_3 98 \equiv_3 8 \equiv_3 2$

$= f(f(x)) = \frac{\sqrt[7]{1-x^7}}{-x}$.

Значит $\underbrace{f(f(f\ldots f(2022)\ldots))}_{1304\ f}$ $= \frac{\sqrt[7]{1-2022^7}}{-2022}$

Ответ: $\frac{\sqrt[7]{1-2022^7}}{-2022}$

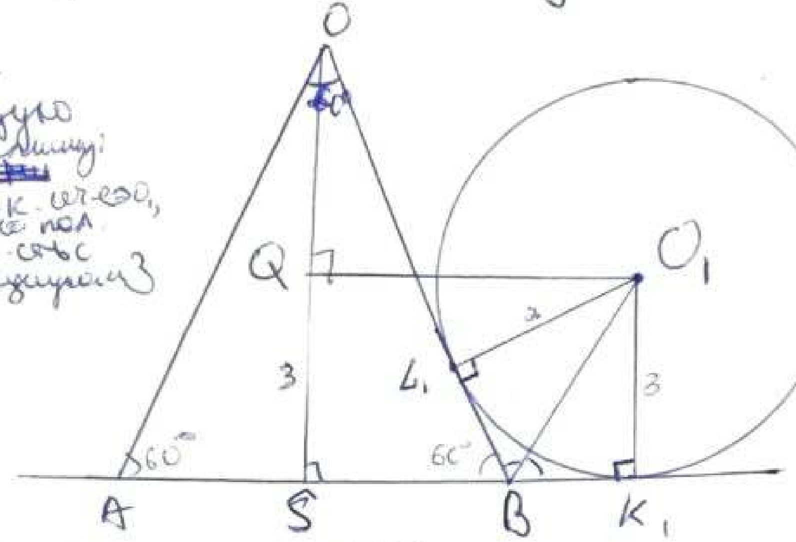
Дано:
$\alpha = 60^\circ$;
$R = 3$

r - ?

№4.

1. Рассмотрим осевое сечение конуса такое, что секущая плоскость проходит через центр какого-то из 11 шаров

Получаем следующую картинку:



Т.к. сечение осевое, то $\angle AOB = \alpha = 60^\circ$;

Н.к. сечение, то пол. о-сть с радиусом 3

$AO = OB = l$, т.к. конус по умолчанию круговой прям-ый.

Получается, что $\angle OAB = \angle OBA = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 60^\circ \Rightarrow \triangle AOB$ правильный, т.е. $l = AB = 2r$; $OS = r\sqrt{3}$

2. $\angle O_1L_1B = \angle O_1K_1B \underset{\text{кас}}{=} 90^\circ$; $O_1L_1 = O_1K = 3$; O_1B - общ $\Rightarrow$
$\Rightarrow \triangle O_1L_1B = \triangle O_1K_1B \Rightarrow \angle O_1BL_1 = \angle O_1BK_1 = \frac{180^\circ - \angle ABO}{2} =$
$= 60^\circ \Rightarrow \triangle O_1L_1B$ и $\triangle O_1K_1B$ - п-ые с $\angle 60^\circ$ и прилежащей к нему стороной 3 $\rightarrow BL_1 = BK_1 = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$; $O_1B = \sqrt{3} \cdot 2 = 2\sqrt{3}$

3. Рассмотрим еще одно сечение - сечение, прох через все ~~плоскости~~ центры шаров (очевидно как и все центры, удаленные от пл-сти осн-я на 3) Тогда все точки касания шаров тоже лежат в этой плоскости (т.к. центры в ней), а также сечения шаров - это о-сти с радиусом 3 (т.к. центры - в пл-сти)

Тогда ∃ о-сти ω_1 и ω_2 кас. в (·)H.
А секущая пл-сть пересекает ось конуса в (·)Q.

В $\triangle O_1HQ$ $\angle O_1QH \underset{\text{из соображ сим}}{=} \frac{1}{2}\angle O_1QO_2 \underset{\text{из соообр сим}}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{360^\circ}{11} = \frac{180^\circ}{11}$

$\angle O_1HQ = 90^\circ$; $O_1H = 3 \Rightarrow QO_1 = \frac{3}{\sin\frac{\pi}{11}}$

4. Вернемся к 1 сечению. Нанесем точку Q, причем $QS = O_1K_1 = 3$; $OQ \perp OS$, т.к. $OQ \parallel SK_1$; $OS \perp SK_1$

(прод. на стр. 4.

(чистовик стр 4)

№4 (продолжение)

5. По Теореме Пифагора из $\triangle OL_1O_1$: $OO_1^2 = OL_1^2 + O_1L_2^2 \Leftrightarrow$

$\exists OL_1 = x$ $(\Rightarrow)$ $OO_1^2 = x^2+9$, из $\triangle OQO_1$: $OO_1^2 = OQ^2 + O_1Q^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow OO_1^2 = (OS-3)^2 + \frac{9}{\sin^2\frac{180^\circ}{11}}$. Заметим, что $OS =$

из (выс впис) $= OB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = (OL_1 + L_1B)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = (x+\sqrt{3})\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} =$

$= \frac{x\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}$. ~~[illegible]~~

6. $OO_1^2 = OO_1^2 \overset{п.5}{\Leftrightarrow} x^2+9 = \left(\frac{x\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} - 3\right)^2 + \frac{9}{\sin^2\left(\frac{180^\circ}{11}\right)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + 9 - \frac{9}{\sin^2\left(\frac{180^\circ}{11}\right)} = \frac{(x\sqrt{3}-3)^2}{4} \Leftrightarrow 4x^2 + 36 - \frac{36}{\sin^2\left(\frac{180^\circ}{11}\right)} = 3x^2 - 6x\sqrt{3} + 9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + 6\sqrt{3}x + 27 - \frac{36}{\sin^2\left(\frac{180^\circ}{11}\right)} = 0$.

$D = 36\cdot 3 + 4\cdot\left(\frac{36}{\sin^2\left(\frac{180^\circ}{11}\right)} - 27\right) = 4\cdot\left(27 + \frac{36}{\sin^2\left(\frac{180^\circ}{11}\right)} - 27\right) =$

$= \left(\frac{2\cdot 6}{\sin\frac{180^\circ}{11}}\right)^2 \Rightarrow x = \frac{-6\sqrt{3} \pm \frac{12}{\sin\frac{180^\circ}{11}}}{2}$, если $x = \frac{-6\sqrt{3} - \frac{12}{\sin\frac{180^\circ}{11}}}{2}$, то

$x < 0$ −?! $\to x = \frac{-6\sqrt{3} + \frac{12}{\sin\frac{180^\circ}{11}}}{2} = -3\sqrt{3} + \frac{6}{\sin\frac{180^\circ}{11}}$

7. $L = 2r$; $L = OB = OL_1 + L_1B = x + \sqrt{3} = \frac{6}{\sin\frac{180^\circ}{11}} - 2\sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow r = \frac{3}{\sin\frac{180^\circ}{11}} - \sqrt{3}$

Ответ: $\frac{3}{\sin\left(\frac{180^\circ}{11}\right)} - \sqrt{3}$

№5

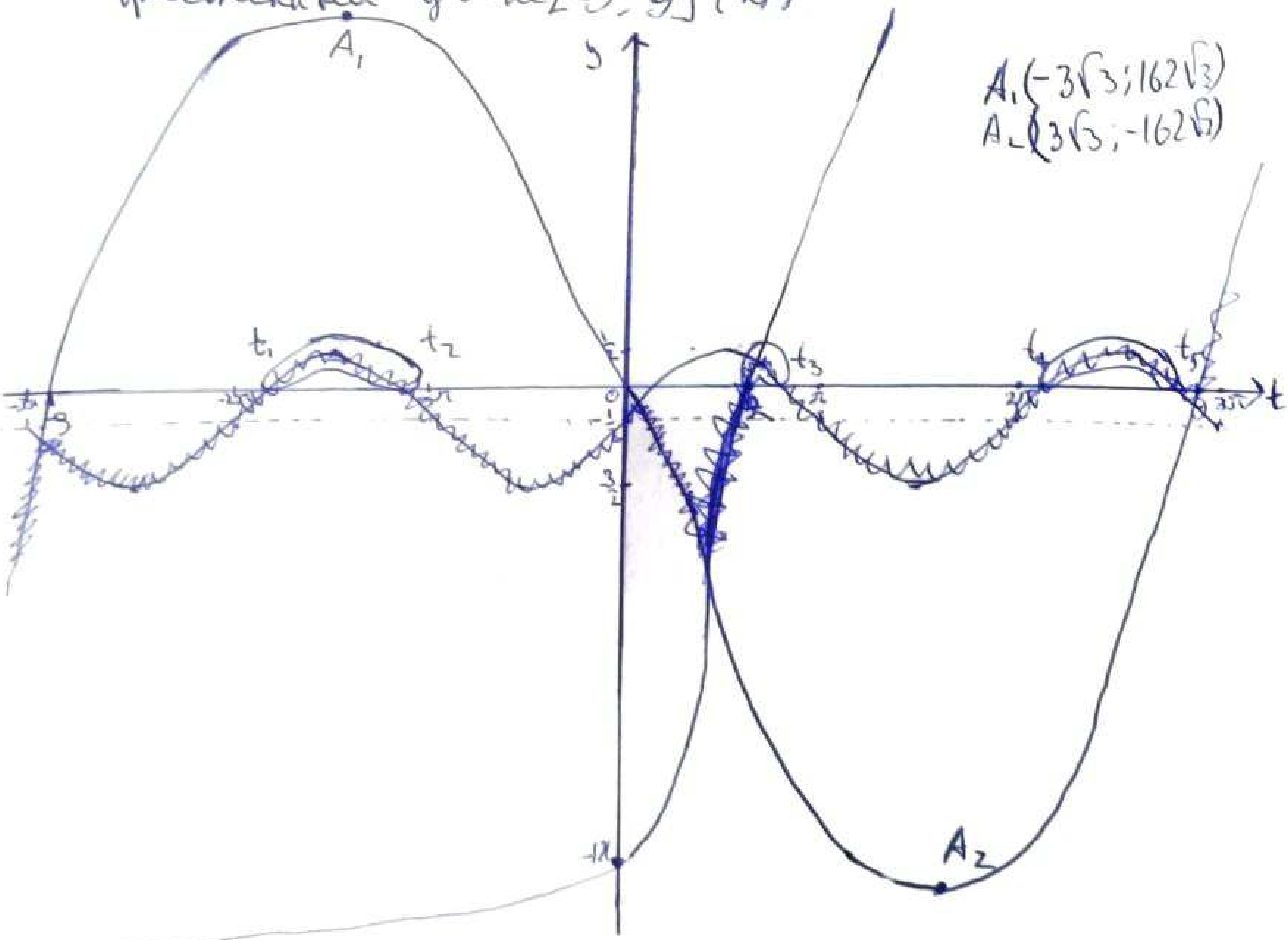
$a = t^3 - 81t$; $b = 11t - 121$; $c = \sin t - \frac{1}{2}$

Нарисуем примерные графики этих функций, для начала исследовав каждую. $c(t) = \sin t - \frac{1}{2}$ — тут всё очевидно: синусоида с периодом 2π, "опущенная" на 0,5 вниз. $E(c) = [-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}]$. $a(t) = t^3 - 81t$; корни − ± 9 и 0; положительна на $(-9;0)\cup(9;\infty)$; отрицательна на $(-\infty;-9)\cup(0;9)$.

прод. на стр. 5.

№5 (продолжение)

$a'(t) = 0$ при $t = \pm 3\sqrt{3}$, тогда $a(t) = \mp 162\sqrt{3}$ соответственно. Наконец $b(t) = 11^t - 121$. корень $= 2$; $b(0) = -120$, $b(1) = -110$; ~~возрастает~~ можно чертить. Очевидно, что участок $b'(t)>0$ ~~очевидно~~ $(-\infty; -9)$ нас не интересует, т.к. на нем $a(t) < 0$; $b(t) < 0$, а когда 2 числа из трёх < 0, то либо 1 из них среднее < 0 ?! либо 3-е лежит между ним, т.е. является средним и, очев, тоже < 0 $\Rightarrow$?!. С другой стороны, нам заведомо (по own-ым рассуждениям) подходит участок $(9; \infty)$, т.к. на нем $a(t) > 0$; $b(t) > 0$ $\Rightarrow$ начертим графики на уч-ке $[-9; 9]$ (крупн. числа не в масштабе)



Выделим мы среднее на кажд. уч-ке - $S(t)$; выделим ⬭ те участки (на $[-9; 9]$), где $S(t) > 0$.

→ прод-е на стр. 6.

№5 (продолжение)

Тогда получаем, что инт. нас уч-ки на $[-9;9]$ это $(t_1, t_2) \cup (2; t_3) \cup (t_4, t_5)$. Заметим, что в точках $t_1, t_2 \dots t_5$ $c(t)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow t_1 - t_5$ - корни $\sin t - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \sin t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ t = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \end{array} \right. | k \in \mathbb{Z}$ Найдев соотв. интервалы, получаем, что $t_1 = -2\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{11\pi}{6}$; $t_2 = -2\pi + \frac{5\pi}{6} = -\frac{7\pi}{6}$; $t_3 = \frac{5\pi}{6}$; $t_4 = \frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6}$; $t_5 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi = \frac{17\pi}{6}$, подст. и не забудем про $(9;\infty)$ $\Rightarrow$ Ответ: $\left(-\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}\right) \cup \left(2; \frac{5\pi}{6}\right) \cup$

$\cup \left(\frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}\right) \cup (9; \infty)$.

№6.

$a \cdot ctg^3 x + (2a^2 - a - 2) ctg^2 x + (2 - 4a - 2a^2) ctg x + 4a = 0$

$\exists\, ctg x = t$, $t \in (-\infty, \infty)$, x; т.к. $\in (0, \pi)$ $= arcctg\, t$

$at^3 + (2a^2 - a - 2)t^2 + (2 - 4a - 2a^2)t + 4a = 0$

~~$t^3 + \frac{(2a^2-a-2)}{a}t^2 + \frac{(2-4a-2a^2)}{a}t + 4a$~~

~~По т. Виета $t_1 + t_2 + t_3 = \frac{a+2-2a^2}{a}$, $t_1t_2 + t_2t_3 + t_1t_3 = \frac{2-4a-2a^2}{a}$~~

Заметим, что при $t=1$ равенство выполняется вне зависимости от a; $a + 2a^2 - a - 2 + 2 - 4a - 2a^2 + 4a = 0$

наше ур-е раскладом

$(t-1)\,(at^2 + (2a^2-2)t - 4a) = 0$

прод-е на стр 7

№ 6 (прод-е) | черновик стр. 7 из 7

$$(t-1)\left(\underbrace{at^2+(2a^2-2)t-4a}\right)=0$$

решим это ур-е: $at^2+(2a^2-2)t-4a=0$

$$D = 4(a^2-1)^2+4a^2 = 4\cdot(a^2+1)^2 = (2a^2+2)^2$$

⇓ корни

$$t = \frac{2-2a^2 \pm (2a^2+2)}{2a} \Leftrightarrow$$

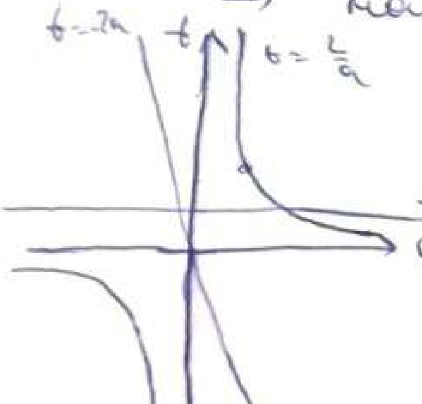
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{2-2a^2+2a^2+2}{2a} \\ t = \frac{2-2a^2-2a^2-2}{2a} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{2}{a} \\ t = \frac{-4a^2}{2a} \end{array}\right.$$

/ Если $a=0$, то корни исх ур-я - $t=1$ и $t=0$, $x=\frac{\pi}{2}$ и $x=\frac{\pi}{4}$, расст-е $= \frac{\pi}{4}$; $\exists a \neq 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{2}{a} \\ t = -2a \end{array}\right.$$

$\frac{2}{a} = -2a$ - $\varnothing$ ⇒ всегда это 2 различных

Заметим, что $x(t) = \operatorname{arcctg} t$ монотонно убывает на $(0;\pi)$ ⇒ max р-е между корнями по x будет между $\min x$ и $\max x$, $\min x$ соотв-ет $\max t$ и наоборот ⇒ нас будут интересовать $\min t$ и $\max t$.



Также заметим, что $\frac{2}{a}$ и $-2a$ имеют разный знак при всех a ⇒ для t есть + корень, − корень и 1 ⇒ для x всегда есть корень во II четверти, корень в I четверти и $\frac{\pi}{4}$ → очев, наиб. р-е будет между корнем во 2 четверти и наименьш из корней 1 четверти (т.к. $\exists x_2$ - корень во 2 четв, x_1 - корень в 1 четв-ти, значит $\left|\frac{\pi}{4}-x_1\right| < \frac{\pi}{4}$, $\left|x_2-\frac{\pi}{4}\right| \geq \frac{\pi}{4}$; $\left|x_2-\min(\frac{\pi}{4};x_1)\right| \geq \left|x_2-\frac{\pi}{4}\right|$)

Заметим также, что по транзитивности $\left|x_2-\min(\frac{\pi}{4};x_1)\right| \geq \left|x_2-\frac{\pi}{4}\right| \geq \left|\frac{\pi}{4}-x_1\right|$ (что и доказывает то, что иск. расст-е - $\left|x_2-\min(\frac{\pi}{4};x_1)\right|$), а также $\left|x_2-\min(\frac{\pi}{4};x_1)\right| \geq \frac{\pi}{4}$.

Значит, минимум max р-я - $\frac{\pi}{4}$, и он должен быть при $a=0$. Получим другие a. Тогда $x_2 = \frac{\pi}{2}$ ⇒ $t_2 = 0$, что невозможно, т.к. $\frac{2}{a}=0$ -?!; $-2a=0 \Rightarrow a=0$

При всех других a $x_2 > \frac{\pi}{2}$ → иск р-е $> \frac{\pi}{4}$ → a не существует, ?! поэтому $a=0$

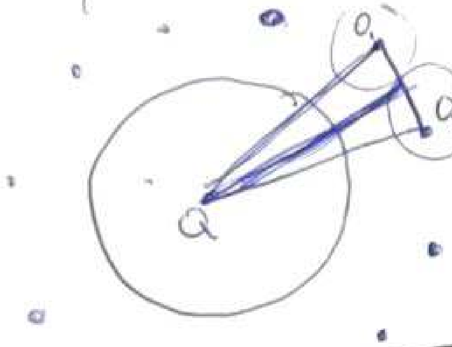
Ответ: $a=0$; $\frac{\pi}{4}$.

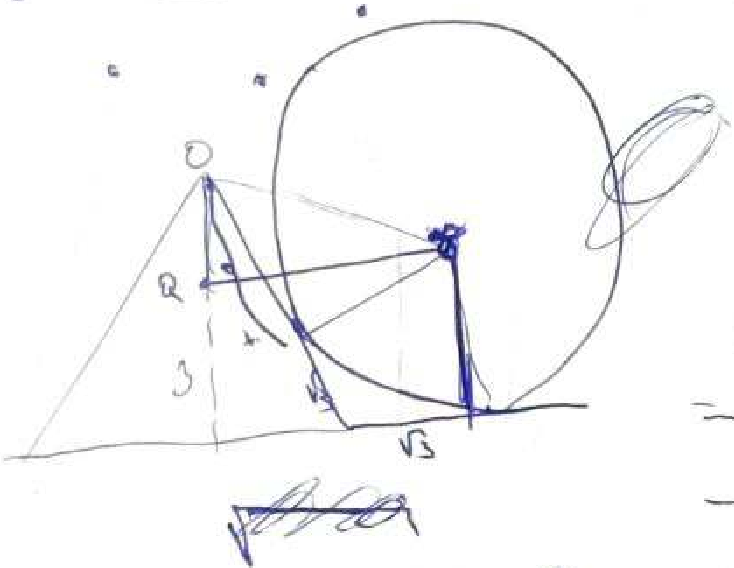
черновик

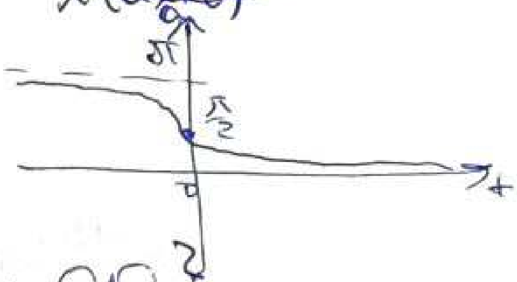
$O_1O_2 = 6$;

$\angle Q = \frac{360^\circ}{11}$

$QO_1 = \frac{3}{\sin\left(\frac{360^\circ}{22}\right)}$







$x^2(ax+6)$

$a + 2a^2 - a - 2 + 2 - 4a - 2a^2 + 4a = 0$

$$x^2 + 9 = \frac{9}{\sin^2\left(\frac{180}{11}\right)} + OQ^2$$

$$OQ = (x+\sqrt{3})\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 3 = \frac{x\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}$$

$$x^2 + 9 = \frac{9}{\sin^2\left(\frac{\pi}{11}\right)} + \frac{3x^2 - 6x\sqrt{3} + 9}{4}$$

$$4x^2 + 36 - \frac{36}{\sin^2\frac{\pi}{11}} = 3x^2 - 6x\sqrt{3} + 9$$

$$x^2 + 6\sqrt{3}\,x + 27 - \frac{36}{\sin^2\frac{\pi}{11}} = 0$$

$$D = 36\cdot 3 - 4\cdot\left(27 - \frac{36}{\sin^2\frac{\pi}{11}}\right) = 4\cdot\left(27 - 27 + \frac{36}{\sin^2\frac{\pi}{11}}\right)$$

$t^2 = t \rightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=1 \end{array}\right.$

~~черновик~~ черновик

$3t^2-81=0 \Rightarrow t^2=27$

$t=\pm 3\sqrt{3}$ - [illegible]

$27\sqrt{27}-81\sqrt{27}=-54\sqrt{27}=$