МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Булычев Михаил Андреевич**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **100**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	15	15	15	15

Чистовик

№1

$$A=\frac{\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[6]{(\sqrt{3}+1)^2}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{\frac{(\sqrt{3})^2-1^2}{2}}=1$$

$$B=\frac{3}{(1\cdot2)^2}+\frac{5}{(2\cdot3)^2}+\ldots+\frac{79}{(39\cdot40)^2}=\sum_{n=1}^{39}\frac{2n+1}{(n\cdot(n+1))^2}=\sum_{n=1}^{39}\frac{(n+1)^2-n^2}{n^2\cdot(n+1)^2}=$$

$$=\sum_{n=1}^{39}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{39^2}-\frac{1}{40^2}=1-\frac{1}{40^2}=$$

$$=1-\frac{1}{1600}<1 \Rightarrow A>B$$

Ответ: $A>B$

$№2$ Чистовик

~~a~~ Число цифра числа $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2021}$

$a_1 = 4$

$\overline{4a_2} \vdots 23$ или $\overline{4a_2} \vdots 19 \Rightarrow a_2 = 6$

$\overline{a_2a_3} = \overline{6a_3} \vdots 23$ или $19 \Rightarrow a_3 = 9$

$\overline{a_3a_4} \vdots 23$ или $19 \Rightarrow$ ~~т.к. $a_3 = 9$~~

Возможны 2 случая:

1) $a_4 = 5 \Rightarrow \overline{a_4a_5} = \overline{5a_5} \vdots 23$ или $19 \Rightarrow a_5 = 7$

$\Rightarrow \overline{a_5a_6} = \overline{7a_6} \vdots 23$ или $19 \Rightarrow a_6 = 6$

$\overline{a_6a_7} = \overline{6a_7} \vdots 23$ или $19 \Rightarrow a_7 = 9$

Периодический ковтор:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
4	6	9	5	7	6	9	5	7	6

$a_2 = a_6 = a_{10} = a_{14} = \ldots = 6$

$a_5 = a_9 = a_{13} = \ldots = a_{2017} = 7$

$(2017 = 5 + 4 \cdot 503)$

2) $a_4 = 2$

$\overline{a_4a_5} \vdots 23$ или $19 \Rightarrow a_5 = 3$

$\overline{a_5a_6} = \overline{3a_6} \vdots 23$ или $19 \Rightarrow a_6 = 8$

$\overline{a_6a_7} = \overline{8a_7} \vdots 23$ или 19 - такого числа не существует. ж.

~~Ответ: 7~~ ~~Значит~~ 8 ~~или~~ ~~будет~~

Значит, будут циклится до a_{2018}.

$a_{2018} = 6$

$a_{2019} = 9$

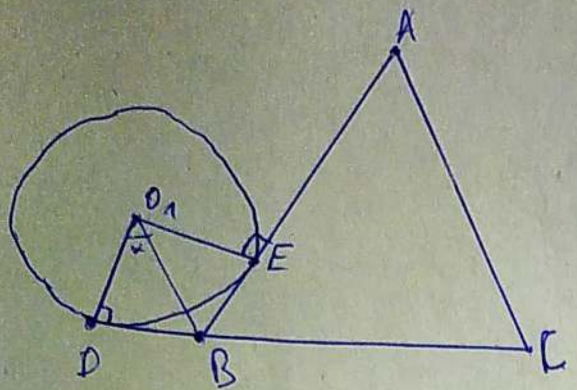
$\left[\begin{array}{l} a_{2020} = 5 \Rightarrow a_{2021} = 7 \\ a_{2020} = 2 \Rightarrow a_{2021} = 3 \end{array}\right.$

Ответ: такое число заканчивается либо цифрой 7, либо цифрой 3.

лист №2

Чистовик

№4



Из условия, $\angle A = 60^\circ$

$\Rightarrow \angle ABC = \angle ACB = 60^\circ$

$\Downarrow$

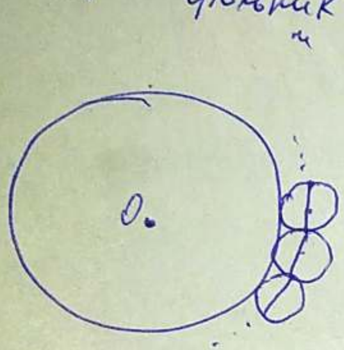
$\angle DBA = 120^\circ$ (внешний угол к $\triangle ABC$)

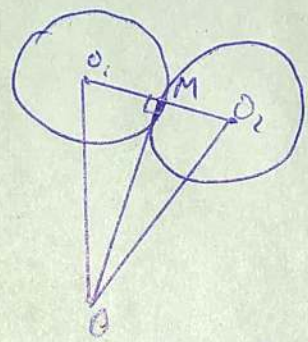
$\Rightarrow \angle DO_1E = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

$\Rightarrow \angle DO_1B = \angle EO_1B = 30^\circ$

По условию, $O_1D = 2 \Rightarrow tg\,\alpha = \frac{DB}{O_1D}$ $(\alpha = 30^\circ)$. $\frac{DB}{O_1D} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow DB = \frac{2}{\sqrt{3}}$

Заметим, что вокруг основания конуса образовался правильный 17-и угольник со стороной, равной 4 (значения окружностей) и центром в точке O.





$\angle O_1OO_2 = \frac{2\pi}{17}$

$\Downarrow$

$\angle O_1OM = \frac{\pi}{17}$

Значит, $\sin \angle O_1OM = \frac{2}{OO_1} \Rightarrow OO_1 = \frac{2}{\sin\frac{\pi}{17}}$. С другой стороны, $OO_1 = DB + r$

$\Rightarrow r = \frac{2}{\sin\frac{\pi}{17}} - \frac{2}{\sqrt{3}}$

Ответ: $\frac{2}{\sin\frac{\pi}{17}} - \frac{2}{\sqrt{3}}$

Черновик

№5

x_2 - среднее $\{a; b; c\}$. $x_1 \le x_2 \le x_3$; $x_1, x_2, x_3 \in \{a, b, c\}$

$a = t^3 - 81t$

$b = 11^t - 121$

$c = \sin t - \frac{1}{2}$

среднее $\{a, b, c\} > 0$

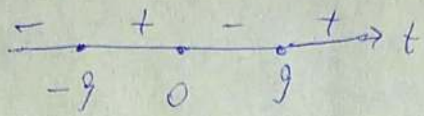
1) $a \ge 0$

$t^3 - 81t \ge 0$

$t(t+9)(t-9) \ge 0$

$\Downarrow$

$t \in [-9; 0] \cup [9; +\infty)$



2) $b \ge 0$

$11^t - 121 \ge 0$

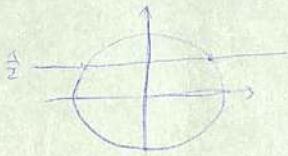
$11^t \ge 11^2$

$t \ge 2$

3) $c \ge 0$

$\sin t - \frac{1}{2} \ge 0$

$\sin t \ge \frac{1}{2}$

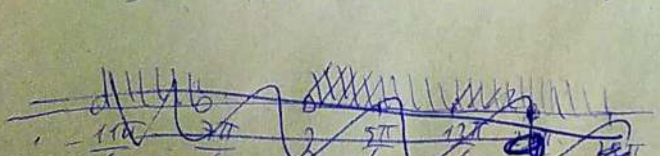


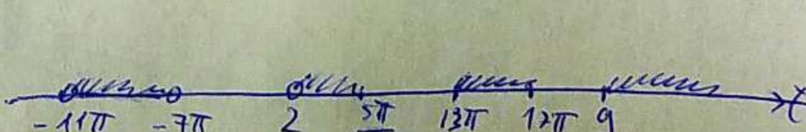
$\frac{\pi}{6} + 2\pi n \le t \le \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$; $n \in \mathbb{Z}$

Чтобы $x_2 > 0$, нужно, чтобы $\begin{cases} x_2 > 0 \\ x_3 > 0 \end{cases}$, т.е.:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases} \Rightarrow t \in (9; +\infty) \\ \begin{cases} a > 0 \\ c > 0 \end{cases} \Rightarrow \cancel{t \in} 2; \; t \in \left(-\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right) + 2\pi n; \; n \in N, \; n \ge 2 \\ \begin{cases} b > 0 \\ c > 0 \end{cases} \Rightarrow t \in \left(2; \frac{5\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right) + 2\pi n, \; n \in N) \end{array}\right.$$

Найдем объединение этих промежутков





~~Ответ: $t \in \left(-\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}\right) \cup (2; +\infty)$~~

м.б. №5

№3

Чистовик

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[11]{1-x^{11}}}$$

$$f \circ f = f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt[11]{1 - \frac{1}{1-x^{11}}}} = \frac{1}{\sqrt[11]{\frac{1-x^{11}-1}{x^{11}}}} = \frac{1}{\sqrt[11]{\frac{x^{11}-1}{x^{11}}}} = \sqrt[11]{1-\frac{1}{x^{11}}}$$

Найдем $f \circ f \circ f = f(f(f(x))) = \frac{1}{\sqrt[11]{1-\left(1-\frac{1}{x^{11}}\right)}} = \sqrt[11]{\frac{1}{\frac{1}{x^{11}}}} = \sqrt[11]{x^{11}} = x$

$$\Rightarrow f^{(k)}(x) = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{k \text{ раз}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[11]{1-x^{11}}}; & k = 1, 4, 7, \ldots, 3n-2 \\ \sqrt[11]{1-\frac{1}{x^{11}}}; & k = 2; 5; 8, \ldots, 3n-1 \\ x; & k = 3, 6, 9, \ldots, 3n \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

Поймем, какой последовательности принадлежит 1306.

$3n-2 = 1306 \Rightarrow 3n = 1308 \Rightarrow n = 436$

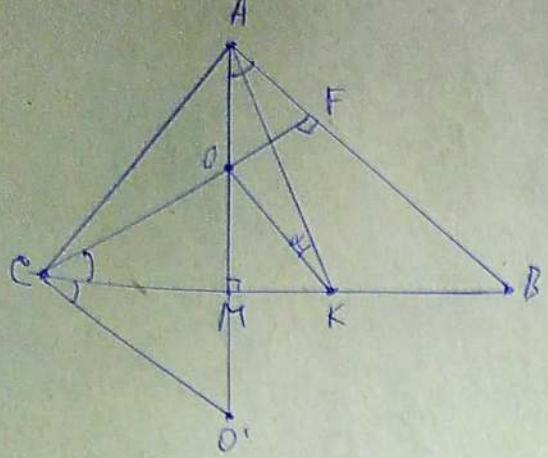
$3n-1 = 1306 \Rightarrow n \notin \mathbb{N} \Rightarrow$ не является элементом последовательности $\{3n-1\}_{n=1}^{\infty}$

$3n = 1306 \Rightarrow n \notin \mathbb{N} \Rightarrow$ не является элементом последовательности $\{3n\}_{n=1}^{\infty}$

$\Rightarrow f^{(1306)}(x) = \frac{1}{\sqrt[11]{1-x^{11}}}$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt[11]{1-2022^{11}}}$

№7 Чистовик



Дано: $BM=5$; $MC=3$; MK - ?

Решение:

Возьмем O' - точку, симметричную O относительно точки M.

$\angle O'CM = \angle MCO = \angle MAB$

(Если $\angle MOC = \gamma = \angle AOF \Rightarrow \angle MCO = \angle MAB = 90 - \gamma$)

Значит, точки O', C, A, B лежат на одной окружности $\Rightarrow |O'M|\cdot|MA| = |CM|\cdot|MB| = 3\cdot 5 = 15$ (перпендикулярные хорды)

Пусть $|OM| = b$; $|AM| = a \Rightarrow ab = 15 \Rightarrow b = \frac{15}{a}$

$S_{\triangle AKO} = \frac{|AK|\cdot|KO|\cdot\sin\alpha}{2} = \frac{|KM|\cdot|AO|}{2}$ (основание и высота) ($\angle AKO = \alpha$)

$0 < \alpha < 90°$ ($\alpha < \angle AKM < 90°$) $\Rightarrow$ если α - максимум $\Rightarrow \sin\alpha$ - тоже максимум

$\Rightarrow \frac{|KM|\cdot|AO|}{|AK|\cdot|KO|}$ - максимум

$|AO|$ - константой (считая неизвестное положение K) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{|KM|}{|AK|\cdot|KO|}$ - максимален.

Пусть $|KM| = x \Rightarrow |AK| = \sqrt{a^2+x^2}$; $|OK| = \sqrt{b^2+x^2}$

$\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{(a^2+x^2)(\frac{225}{a^2}+x^2)}}$ максимален

$$\left(\frac{x}{\sqrt{(a^2+x^2)(\frac{225}{a^2}+x^2)}}\right)' = \sqrt{225+\left(\frac{225}{a^2}+a^2\right)x^2+x^4} - \frac{x\left(2x\cdot\left(\frac{225}{a^2}+a^2\right)+4x^3\right)}{2\sqrt{225+\left(\frac{225}{a^2}+a^2\right)x^2+x^4}} =$$

$$= \frac{2\left(225+\left(\frac{225}{a^2}+a^2\right)x^2+x^4\right) - 2x^2\left(\frac{225}{a^2}+a^2\right) - 4x^4}{2\left(225+\left(\frac{225}{a^2}+a^2\right)x^2+x^4\right)^{3/2}} = \frac{225-x^4}{\left(225+\left(\frac{225}{a^2}+a^2\right)x^2+x^4\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$|KM| = x \in [0;5] \Rightarrow$ в этом отрезке производная 0 только в точке $\sqrt{15}$.

$0 \quad + \quad \sqrt{15} \quad - \quad 5$ $\Rightarrow \alpha$ - максимальное если $|KM| = \sqrt{15}$.

Ответ: $\sqrt{15}$

лист №7

Чистовик

<u>№6</u>

$a\,tg^3x + (2-a-a^2)tg^2x + (a^2-2a-2)tg\,x + 2a = 0$

Пусть $tg\,x = t$

$\Rightarrow at^3 + (2-a-a^2)t^2 + (a^2-2a-2)t + 2a = 0$

$a^2(t-t^2) + a(t^3-t^2-2t+2) + 2t^2 - 2t = 0$

$a^2t\cdot(1-t) + a(t^2-2)(t-1) + 2t(t-1) = 0$

$(t-1)(-a^2t + at^2 - 2a + 2t) = 0$

$(t-1)\cdot(at(t-a) + 2(t-a)) = 0$

$(t-1)(t-a)(at+2) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=a \\ t=-\frac{2}{a},\ a\neq 0 \end{array}\right.$

Возможно 2 случая: $a=0$, $a\neq 0$

1 случай:

$a=0 \Rightarrow 2t^2 - 2t = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=1 \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} tg\,x=0 \\ tg\,x=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=0 \\ x_2=\frac{\pi}{4} \end{array}\right. \Rightarrow |x_2-x_1| = \frac{\pi}{4}$

2 случай:

$a\neq 0$

$tg\,x=1$; $tg\,x=a$; $tg\,x=-\frac{2}{a}$

Числа a и $-\frac{2}{a}$ - разных знаков $\Rightarrow x_2<0$ или $x_3<0$

$\Rightarrow$ расстояние между корнями будет больше $\frac{\pi}{4} \Rightarrow a=0$

Ответ: $a=0$; $|x_2-x_1| = \frac{\pi}{4}$

черновик

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}} = \sqrt[4]{\frac{1}{1-x^4}} = \left(\frac{1}{1-x^4}\right)^{-11} = (1-x^4)^{11}$$

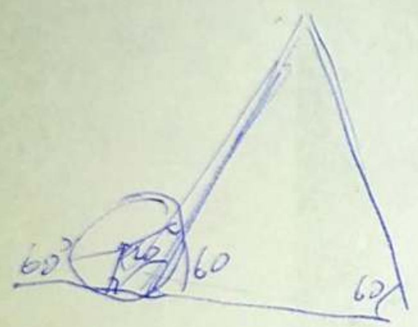
$$f(2022) = (1-2022)^{11} = -(2021)^{11}$$

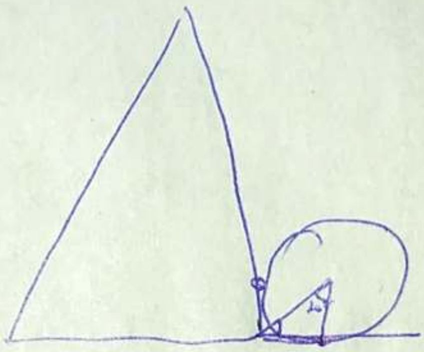
$$f(f(2021)) = \left(1-(-2021^{11})^4\right)^4 = (1-2021^{44})^{11} =$$

$$f(f(f)) = \cancel{1-(1-2021^{22})^{44}} = (1-2021^{22})^{11}(1+2022^{22})^{11}$$

$$= \cancel{(1-1-2021^{44})}\ \left(1-(1-2021^{44})^{11}\right)$$

$$a\,tg^3 x + (2-a-a^2)\,tg^2 x + (a^2-2a-2)\,tg\,x$$





$\frac{17\pi}{6}$ и 9

17π и 54

π и $\frac{54}{17}$

54 | 17
51 | 3,14
30
17
130

17
4
68

17
7
8

Черновик

№1

$$A = \frac{\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}}$$

$$B = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \ldots + \frac{77}{(38\cdot 39)^2} + \frac{79}{(39\cdot 40)^2}$$

$$B = \frac{2a+1}{a^2(a+1)^2} + \frac{2(a+1)+1}{(a+1)^2\cdot(a+2)^2} + \ldots + = \frac{2a+1}{a^2(a+1)^2} + \frac{2a+3}{(a+1)^2(a+2)^2} + \frac{2a+5}{}$$

$$4+2\sqrt{3} = (\sqrt{1})^2 + 2\cdot\sqrt{1}\cdot\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = (\sqrt{1}+\sqrt{3})^2$$

$$A = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{1}+\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{3-1}{2}} = 1$$

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{2}{2\cdot 3} + \ldots 3 \quad B = \frac{3}{1^2\cdot 2^2} = \frac{1+2}{1^2\cdot 2^2} = \frac{1}{1^2\cdot 2^2} + \frac{1}{1^2\cdot 2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2}$$

$$+\ \frac{5}{2^2\cdot 3^2} = \frac{2+3}{2^2\cdot 3^2} = \frac{1}{2\cdot 3^2} + \frac{1}{2^2\cdot 3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^2}$$

$$\frac{7}{3^2\cdot 4^2} = \frac{1}{3\cdot 4^2} + \frac{1}{3^2\cdot 4} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3^2}$$

$$\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4^2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5^2}$$

$$\frac{5}{36} + \frac{7}{144} + \frac{9}{400}$$

$$\frac{5}{2^2\cdot 3^2} + \frac{7}{3^2\cdot 4^2} + \frac{9}{4^2\cdot 5^2} + \ldots + > 5\left(\frac{1}{2^2\cdot 3^2} + \frac{1}{3^2\cdot 4^2} + \ldots + \frac{1}{39^2\cdot 40^2}\right) =$$

$$= 5\cdot\frac{4^2\cdot 5^2\cdot\ldots\cdot 39^2\cdot 40^2 + 2^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{2^2\cdot 3^2\cdot 4^2\cdot\ldots\cdot 39^2\cdot 40^2}$$

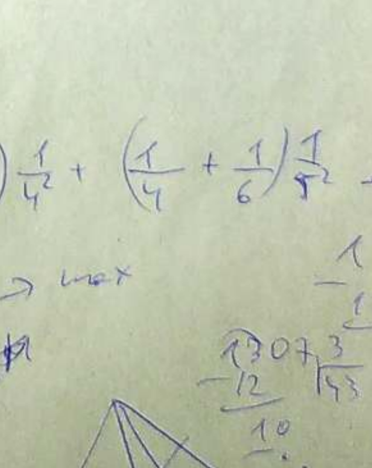
$$\frac{1}{2} + \left(1 + \frac{1}{3}\right)\frac{1}{2^2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)\frac{1}{3^2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right)\frac{1}{4^2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right)\frac{1}{5^2} -$$

$$\frac{1}{2} + \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2^2} + \frac{6}{8}\cdot\frac{1}{3^2}$$

1306

$\alpha \to max$

1305 | 3, 12, 43; 1307 | 3, 12, 43, 10, 10, 9, 5, 1; 436 · 3 = 1308; 1308 | 3, 12, 436, 10, 10



лист №8

лист