**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**
**имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

# ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Буничева Мария Вячеславовна**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **80**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

**Результаты проверки:**

| № | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Оценка | 15 | 10 | 15 | 15 | 5 | 5 | 15 |

# Чистовик

## Задача № 1

$$A = \frac{\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}}$$, преобразуем запись числа $A$:

$$\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}} = \sqrt[6]{(\sqrt{3}+1)^2} = \sqrt[3]{(\sqrt{3}+1)}$$

$$\Rightarrow A = \frac{\sqrt[3]{3-1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = 1$$

---

$$B = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \frac{7}{(3\cdot 4)^2} + \dots + \frac{119}{(59\cdot 60)^2} = \frac{1+2}{1^2\cdot 2^2} + \frac{2+3}{(2\cdot 3)^2} + \dots + \frac{59+60}{(59\cdot 60)^2}$$ *

* заметим, что $\frac{1+2}{(1\cdot 2)^2} = \frac{1+2}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{1\cdot 2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right)$

$$\Rightarrow B = \frac{1}{1\cdot 2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2\cdot 3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) + \dots + \frac{1}{59\cdot 60}\left(\frac{1}{59}+\frac{1}{60}\right)$$

теперь заметим, что $\frac{1}{1\cdot 2} = \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)$, а $\frac{1}{2\cdot 3} = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$

$\Rightarrow$ получаем, что $B = \left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{59}-\frac{1}{60}\right)\left(\frac{1}{59}+\frac{1}{60}\right) =$

$$= \left(\frac{1}{1}\right)^2 + \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{59}\right)^2}_{\text{сократятся}} - \left(\frac{1}{60}\right)^2 = \frac{1}{1} - \left(\frac{1}{60}\right)^2 = 1 - \frac{1}{3600}$$

$A = 1$

$B = 1 - \frac{1}{3600}$ очевидно, что $A > B$.

**Ответ: A больше**

## Чистовик

### Задача № 2

① $\underbrace{4abcde\ldots}_{2021}$, числа 23 и 19 – простые, ⇒ число, которое ⋮ 23 или ⋮ 19, представимо в виде $23\cdot n$ или $19\cdot m$.

рассмотрим всевозможные варианты двузначных чисел, которые ⋮ 23 или ⋮ 19

| | |
|---|---|
| $19\cdot 1 = 19$ | $23\cdot 1 = 23$ |
| $19\cdot 2 = 38$ | $23\cdot 2 = 46$ |
| $19\cdot 3 = 57$ | $23\cdot 3 = 69$ |
| $19\cdot 4 = 76$ | $23\cdot 4 = 92$ |
| $19\cdot 5 = 95$ | |

② т.к. первая цифра 2021-значного числа = 4, ⇒ вторая = либо 8, либо 6.

если она = 8 ⇒ потом мы не сможем подобрать такую следующую цифру, чтобы число ⋮ 23 или ⋮ 19.

⇒ вторая цифра 2021-значного числа = 6.

третья цифра тогда = 9, т.к. нет больше других вариантов чисел, которые делились бы на 23 или на 19.

⇒ число: $\underbrace{469\ldots}_{2021}$, четвёртая цифра = 5 или 2,

если она = 2 ⇒ пятая = 3, а дальше мы не сможем подобрать шестую цифру, удовлетворяющую условию. Значит четвёртая = 5.

$\underbrace{4695\ldots}_{2021}$, т.к. 4-ая цифра = 5, то 5-ая = 7, а 6-ая = 6.

⇒ число: $\underbrace{469576\ldots}_{2021}$, после 6 на 6-ой позиции последует опять комбинация "6957". ⇒ 2021-значное число состоит из первой четвёрки и (2020/4 = 505) – "комбинаций" ⇒ последние четыре цифры числа: 6957, ⇒ последняя = 7.

Ответ: 7

# Чистовик

## Задача № 3

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}\quad ; \quad \underbrace{f(f(f\cdots f(2022))\cdots)}_{1304.}$$

рассмотрим $f(f(x))=\dfrac{1}{\sqrt[7]{1-\left(\frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}\right)^7}}=\dfrac{1}{\sqrt[7]{1-\frac{1}{1-x^7}}}=\dfrac{1}{\sqrt[7]{\frac{1-x^7-1}{1-x^7}}}=$

$=-\dfrac{\sqrt[7]{1-x^7}}{x}$

рассмотрим $f(f(f(x)))=\dfrac{1}{\sqrt[7]{1-\left(-\frac{\sqrt[7]{1-x^7}}{x}\right)^7}}=\dfrac{1}{\sqrt[7]{1+\frac{(1-x^7)}{x^7}}}=$

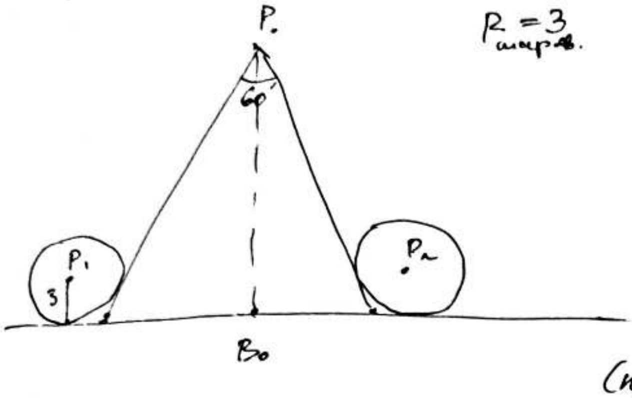
$=\dfrac{1}{\sqrt[7]{1+\frac{1}{x^7}-1}}=\dfrac{1}{\sqrt[7]{\frac{1}{x^7}}}=x$, получаем, что $f(f(f(x)))=x$.

$\Rightarrow \underbrace{f(f(f\cdots f(2022))\cdots)}_{1304=(\underbrace{1302}_{\vdots 3}+2)}=f(f(2022))=-\dfrac{\sqrt[7]{1-2022^7}}{2022}=\sqrt[7]{1-\dfrac{1}{2022^7}}$

**Ответ:** $\sqrt[7]{1-\dfrac{1}{2022^7}}$

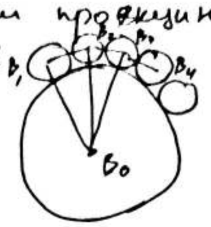
# Чистовик

## Задача № 4




$R_{шаров} = 3.$

нарисуем проекцию на плоскость основания:



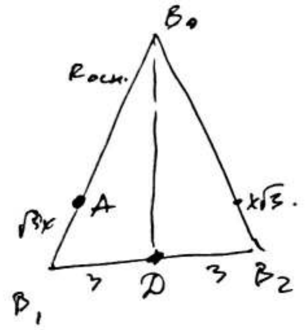

$P_1P_2 = 2R = 6.$

проведя линии центров получаем правильный 11-ти угольник

рассмотрим $\Delta$ с вершиной $B_0$ (проекция $P_0$ на плоскость основание).

$B_1; B_2$ – проекции центров шаров на основание $P_1$ и $P_2$

$R_{осн}$ – радиус основания




$$B_1A = P_1B_1 \cdot ctg\angle P_1AB_1 = 3ctg\frac{120}{2} = \frac{B_1B_0}{B_1D} = \frac{R_{осн.}+\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sin\frac{\angle B_0}{2}}.$$

$$R_{осн.} + \sqrt{3} = \frac{3}{\sin\frac{\angle 180}{11}}$$

$$\Rightarrow R_{осн.} = \frac{3}{\sin\left(\frac{\angle 180}{11}\right)} - \sqrt{3}.$$

**Ответ:** $\dfrac{3}{\sin\left(\frac{\angle 180}{11}\right)} - \sqrt{3}.$

## Чистовик

### Задача № 5

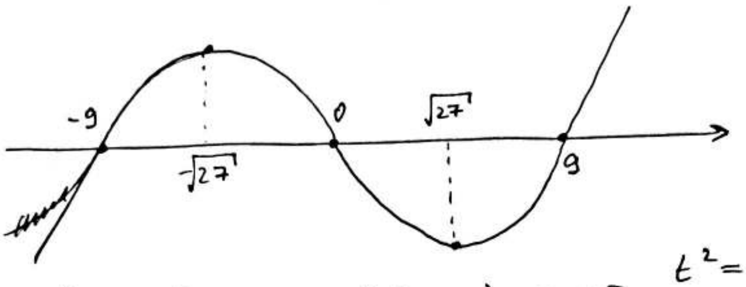
$a = t^3 - 81t$

$b = 11^t - 121$

$c = \sin t - \frac{1}{2}.$

рассмотрим функцию a:

$a = t(t^2-81) = t(t-9)(t+9)$




$a' = 3t^2 - 81 = 3(t^2-27) = 0 \Rightarrow t^2 = 27$, $t = \pm\sqrt{27} \approx \pm 5, \dots$

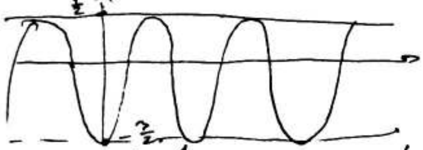
$a(-\sqrt{27}) = (-\sqrt{27})^3 + 81\sqrt{27} = 54\sqrt{27}$

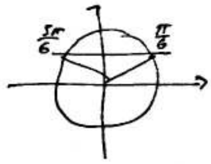
$a(\sqrt{27}) = (\sqrt{27})^3 - 81\sqrt{27} = 27\sqrt{27} - 81\sqrt{27} = -54\sqrt{27}$

---

$c = \sin t - \frac{1}{2}$

$c \in [-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}].$




функция отрицательна: $\sin t - \frac{1}{2} < 0$ при $t \in (-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n)$

функция положительна: $\sin t - \frac{1}{2} > 0$ при $t \in (\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k)$.

---

$b = 11^t - 121 = 11^t - 11^2 = 11^2(11^{t-2} - 1)$

положительно: $11^{t-2} - 1 > 0$ при $t > 2$.

отрицательно: $11^{t-2} - 1 < 0$ при $t < 2$

$t = 0: 121(\frac{1}{121} - 1) = -120$

---

$a > 0$ при $t \in (-9; 0) \cup (9; +\infty)$

$b > 0$ при $t \in (2; +\infty)$

$c > 0$ при $(-\frac{7\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k)$

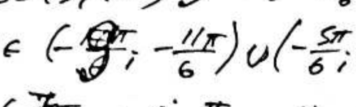
1) $a, b > 0 \Rightarrow t \in (9; +\infty)$




2) $a, c > 0 \Rightarrow t \in (-9; -\frac{11\pi}{6}) \cup (-\frac{5\pi}{6}; 0) \cup$

$\cup (-\frac{7\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k)$ $n \geq 2$.

3) $b, c > 0$




Ответ: $(-9; -\frac{11\pi}{6}) \cup (\frac{5\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}) \cup (9; +\infty) \cup (-\frac{7\pi}{6}; 0)$.

5

## Чистовик

## Задача № 6

$a\,ctg^3x + (2a^2-a-2)ctg^2x + (2-4a-2a^2)ctg\,x + 4a = 0.$

$x \in (0;\pi)$

1) рассмотрим уравнение при $a=0$!

$\Rightarrow\ -2ctg^2x + 2ctg\,x = 0$ ; $2ctg\,x(-ctg\,x+1) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} ctg\,x = 0 \Rightarrow \boxed{x=\frac{\pi}{2}} \\ ctg\,x = 1. \Rightarrow \boxed{x=\frac{\pi}{4}.} \end{array}\right.$

2) рассмотрим ур-ие при $a \neq 0$., введём переменную $\boxed{t = ctg\,x.}$

$\Rightarrow at^3 + 2a^2t^2 - at^2 - 2t^2 + 2t - 4at - 2a^2t + 4a = 0.$

$t(at^2+(2a^2-2)t-4a) - (at^2+(2a^2-2)t-4a) = 0$

$\Rightarrow (t-1)(at^2+2(a^2-1)t-4a) = 0.$ $\left[\begin{array}{l} t=1 \\ at^2+2(a^2-1)t-4a=0. \end{array}\right.$ ; $t_1 = -2a$, $t_2 = \frac{2}{a}$

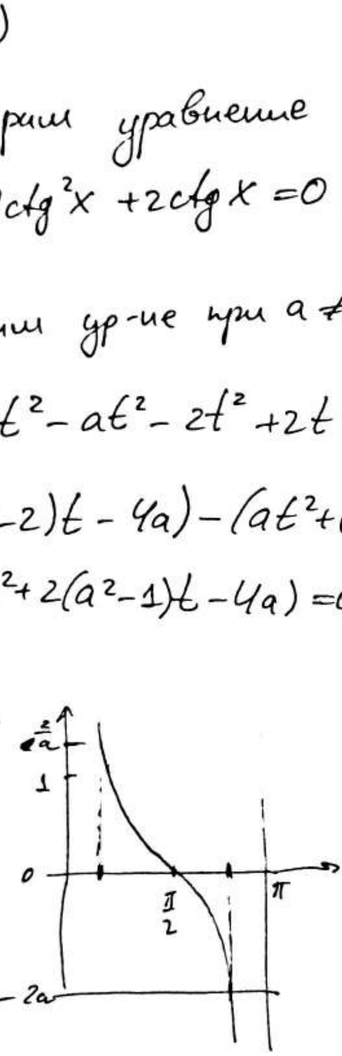
$\frac{D}{4} = (a^2-1)^2 + 4a^2 = a^4+2a^2+1 = (a^2+1)^2$

$t = \frac{-a^2+1 \pm (a^2+1)}{a}$ ; $t_1 = -2a$ ; $t_2 = \frac{2}{a}.$

(I) если $a > 0$

$\frac{2}{a} > 1$

$0 < a < 2$




$\frac{2}{a} + 2a = 2(a+\frac{1}{a})$

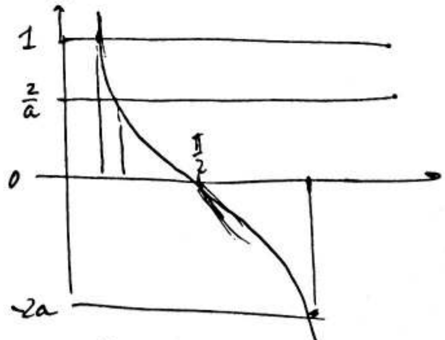
т.к. $a + \frac{1}{a} \geq 2$, то

$\frac{2}{a} + 2a \geq 4$

$\Rightarrow$ расстояние $\geq 4$., значит наименьшее расстояние $=4$ будет при $\boxed{a=1}$

(II) если $a>0$

$\frac{2}{a} < 1 \ \rightarrow a > 2$




$\Downarrow$

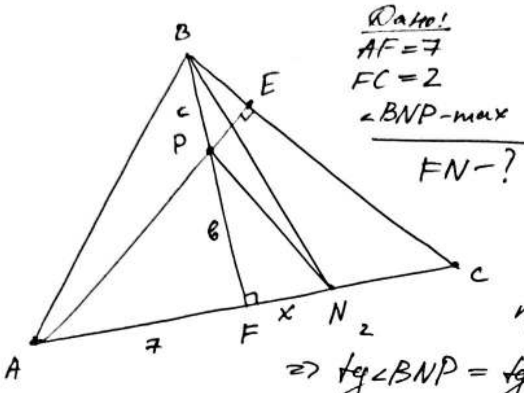
расстояние $= 1+2a > 5.$

$\boxed{\begin{array}{l} 2=a \\ \text{расст.} = 5 \end{array}}$

$\Rightarrow$ Ответ: 4

# Чистовик

## Задача №7




Дано:
$AF=7$
$FC=2$
$\angle BNP$ - max
$FN$ - ?

Решение:

обозначим $BP=c$; $FP=b$, $FN=x$.

$\angle BNP+\angle NBP=\angle FPN$ (внешний угол)

$\Rightarrow \angle BNP=(\angle FPN-\angle NBP)$ - max

угол максимален, когда его tg принимает max значение.

$\Rightarrow tg\angle BNP = tg(\angle FPN-\angle NBP)$

распишем: $tg\angle FPN=\frac{FN}{PF}=\frac{x}{b}$; $tg\angle NBP=\frac{FN}{FB}=\frac{x}{b+c}$.

$$\Rightarrow tg\angle BNP=\frac{tg\angle FPN-tg\angle NBP}{1+tg\angle FPN\cdot tg\angle NBP}=\frac{\frac{x}{b}-\frac{x}{b+c}}{1+\frac{x}{b}\cdot\frac{x}{b+c}}=\frac{\frac{x(b+c)-xb}{b(b+c)}\cdot b(b+c)}{b(b+c)+x^2}=$$

$=\frac{xc}{b^2+bc+x^2}$. т.к. $x=FN$ - переменная, а значения $b=PF$ и $c=BP$ - постоянные, то

найдём такие $x$, при которых достигается max значение.

$\Rightarrow tg\angle BNP$ тоже будет максимален.

$$\left(\frac{x\cdot c}{b^2+bc+x^2}\right)'=\frac{c(b^2+bc+x^2)-x\cdot c\cdot 2x}{(b^2+bc+x^2)^2}=\frac{c(b^2+bc-x^2)}{(b^2+bc+x^2)^2}=0.$$

$\Rightarrow x=\sqrt{b^2+bc}>0$, знак производной сменяется с + на −,

$\Rightarrow$ мы получили max значение. $x=\sqrt{b^2+bc}=\sqrt{b(b+c)}=$

$=\sqrt{\underbrace{(AF\cdot tg\angle PAC)}_{b=PF}\underbrace{(FC\cdot ctg\angle FBC)}_{b+c=BF}}$, т.к. $\angle PAC=\angle FBC$ (из-за вписанности $ABEF$).

$\Rightarrow x=\sqrt{AF\cdot FC}=\sqrt{2\cdot 7}=\sqrt{14}$

Ответ: $\sqrt{14}$

7

Задача № 1

$$A=\frac{\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[6]{(\sqrt{3}+1)^2}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}}$$

$$4+2\sqrt{3}=(\sqrt{3})^2+2\sqrt{3}+1=(\sqrt{3}+1)^2 \quad ; \quad \sqrt[3]{\sqrt{3}-1}=\sqrt[6]{(\sqrt{3}-1)^2}$$

$$=\frac{\sqrt[6]{(\sqrt{3}+1)^2}\,\sqrt[6]{(\sqrt{3}-1)^2}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[6]{((\sqrt{3})^2-1)^2}}{\sqrt[3]{2}}=$$

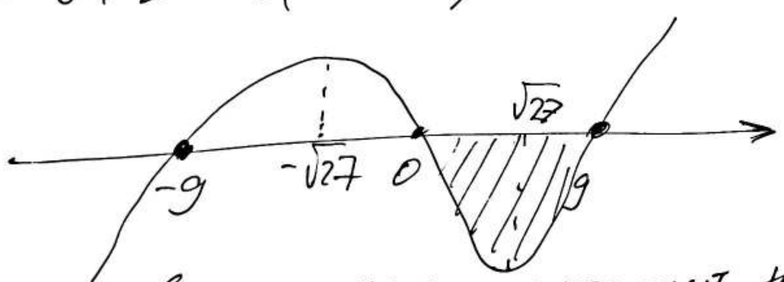
$$=\frac{\sqrt[3]{3-1}}{\sqrt[3]{2}}=1$$

$$B=\frac{3}{(1\cdot2)^2}+\frac{5}{(2\cdot3)^2}+\dots\frac{119}{(59\cdot60)^2}=\frac{1+2}{(1\cdot2)^2}+\frac{2+3}{(2\cdot3)^2}+\dots+\frac{59+60}{(59\cdot60)^2}$$

$$=\frac{1}{1\cdot2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2\cdot3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\dots\frac{1}{59\cdot60}\left(\frac{1}{59}+\frac{1}{60}\right)=*$$

Задача №: 5

$$a=t^3-81t=t(t^2-81)=t(t-9)(t+9)$$




$9\cdot9=9\cdot3\cdot3$

найдём интервалы функции с помощью значений:

$$a'=3t^2-81=3(t^2-27)=0 \Rightarrow t^2=27$$
$$t=\pm\sqrt{27}\approx\pm5,\dots$$

$$a(-\sqrt{27})=(-\sqrt{27})^3+81\sqrt{27}=54\sqrt{27}$$

$$a(\sqrt{27})=(\sqrt{27})^3-81\sqrt{27}=27\sqrt{27}-81\sqrt{27}=-54\sqrt{27}$$

$$*\ \frac{1}{1\cdot2}=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right);\ \frac{1}{2\cdot3}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\dots$$

ЧЕРНОВИК

$$*=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\dots$$

№ 3

$\boxed{\text{ЧЕРНОВИК}}$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}$$

Задачи!
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

$$\underbrace{f(f(f\dots f(2022)))}_{1304\ \text{раза}}$$

$$f(f(x))=\frac{1}{\sqrt[7]{1-\left(\frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}\right)^7}}=\frac{1}{\sqrt[7]{1-\frac{1}{1-x^7}}}=\frac{1}{\sqrt[7]{\frac{1-x^7-1}{1-x^7}}}=$$

$$=-\frac{\sqrt[7]{1-x^7}}{x}$$

$$f(f(f(x)))=\cancel{\frac{1}{\sqrt[7]{1+\left(\frac{\sqrt[7]{1-x^7}}{x}\right)^7}}}\ \frac{1}{\sqrt[7]{1-\left(-\frac{\sqrt[7]{1-x^7}}{x}\right)^7}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt[7]{1+\frac{(1-x^7)}{x^7}}}=\frac{1}{\sqrt[7]{1+\frac{1}{x^7}-1}}=\frac{1}{\sqrt[7]{\frac{1}{x^7}}}=x$$

Итак $\underbrace{f(f\dots f(2022))}_{1304=1302+2}=f(f(2022))=$

$$=-\frac{\sqrt[7]{1-2022^7}}{2022}=\sqrt[7]{1-\frac{1}{2022^7}}$$

$$\begin{array}{r|l} 1304 & 3 \\ -12 & 434 \\ 10 & \\ -9 & \\ 14 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 434 \\ \times\ 3 \\ \hline 1302 \end{array}$$

$$B=\frac{3}{(1\cdot2)^2}+\frac{5}{(2\cdot3)^2}+\dots+\frac{117}{(58\cdot59)^2}+\frac{119}{(59\cdot60)^2}$$

$$\begin{array}{r} 59\\ \times\ 60\\ \hline 3540\end{array}\qquad \begin{array}{r} 58\\ \times\ 59\\ \hline 522\\ +\ 290\ \\ \hline 3422\end{array}$$

вверху-нет.

$$A=1$$

$$\frac{3}{(1\cdot2)^2}+\frac{5}{(2\cdot3)^2}=\frac{3}{1^2\cdot2^2}+\frac{5}{2^2\cdot3^2}=\frac{1+2}{1^2\cdot2^2}+\frac{2+3}{2^2\cdot3^2}=\frac{1}{1^2\cdot2^2}+\frac{2}{1^2\cdot2^2}+$$

$$+\frac{2}{2^2\cdot3^2}+\frac{3}{2^2\cdot3^2}=\frac{1}{1^2\cdot2^2}+\frac{1}{1^2\cdot2}+\frac{1}{3^2\cdot2}+\frac{1}{2^2\cdot3}=$$

$$\frac{7}{(3\cdot4)^2}=\frac{3}{3^2\cdot4^2}+\frac{4}{3^2\cdot4^2}=\frac{1}{3\cdot4^2}+\frac{1}{3^2\cdot4}.$$

$$=\frac{1}{1^2\cdot2^2}+\underbrace{\frac{3^2}{1^2\cdot2\cdot3^2}+\frac{1}{3^2\cdot2\cdot1^2}}_{\frac{3^2+1}{3^2\cdot2\cdot1^2}}+\frac{1}{2^2\cdot3}=\frac{3^2+1}{3^2\cdot2\cdot1^2}+\frac{3+1}{3\cdot2^2\cdot1^2}\ \cancel{X}$$

---

$$\frac{3}{(1\cdot2)^2}=\frac{3}{4}<1$$

числитель возрастает по нег.

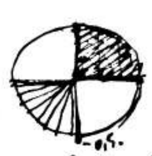
$$\frac{3}{4}+\frac{5}{36}+\frac{7}{144}+\dots+\frac{117}{(3422)^2}+\frac{119}{(3540)^2}=B.$$

предположительно $A>B$.

$B$ будет больше в том случае, если

$$\frac{1}{4}<\frac{5}{36}+\frac{7}{144}+\dots+\frac{119}{(3540)^2}$$

$$\frac{3}{(1\cdot2)^2}+\frac{5}{36}+\frac{7}{144}+\dots+\frac{117}{(3422)^2}$$




$\frac{360}{36}=10.$ если всё $=36$ градусов. $\Rightarrow 5 \Leftrightarrow 0{,}5$ градуса.

ЧЕРНОВИК.

Задача 2 ЧЕРНОВИК. 23; 19 - простые

$\underbrace{4\,a\,b\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.}_{2021}$

$\overline{ab}$ образуют число, которое представимо в виде: $23\cdot n$ или $19\cdot m$.

если первое число $\vdots\ 19 \Rightarrow \overline{4a}\ \vdots\ 19. \Rightarrow a=8$

если $\overline{4a}\ \vdots\ 23. \Rightarrow a=6$

$19\times 3 = 57$, $19 \times 2 = 48$

рассмотрим следующую пару чисел: $\overline{ab}$ ~~двузнач~~.

если $\overline{ab}\ \vdots\ 19$ $a=8$, $a=6$

$19\times 4 = 76$, $19\times 6 = 114$, $23 \times 4 = 92$

рассмотрим всевозможные варианты двузначных чисел, которые $\vdots\ 19$.

$\boxed{\begin{aligned}19\cdot 1 &= 19\\ 19\cdot 2 &= 48\\ 19\cdot 3 &= 57\\ 19\cdot 4 &= 76\\ 19\cdot 5 &= 95\end{aligned}}$

$19\cdot 6 = 114$ (−)

$\Rightarrow$ первая цифра: 1, 4, 5, 7, 9. $\Rightarrow \overline{ab}\ \not\vdots\ 19$ при $a=8$ и 6.

$\Rightarrow \overline{ab}\ \vdots\ 23$ только в случае когда $a=6$.

$\Rightarrow b=9$. , если $b=9$, $\Rightarrow$ следующая цифра

$5 \to 7 \to 6$; $2 \to 3$ тупик.

$\boxed{\begin{aligned}23\cdot 1 &= 23\\ 23\cdot 2 &= 46\\ 23\cdot 3 &= 69\\ 23\cdot 4 &= 92\end{aligned}}$

$\underbrace{469576\,.\,.\,.\,.\,.}_{2021}$

цикл замкнулся.
получим "блоки" по 4 цифры.

$\Rightarrow$ первая в числе идёт 4, а потом какое-то кол-во блоков по 4 цифры в каждом.

$\Rightarrow 2020 : 4 = 505 = N$ - кол-во блоков. $\Rightarrow$ последняя цифра $= 7$.

Ответ.

Задача № 1

$$B=\left(\frac{1}{1}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{59}\right)^2-\left(\frac{1}{60}\right)^2=1-\frac{1}{60^2}$$

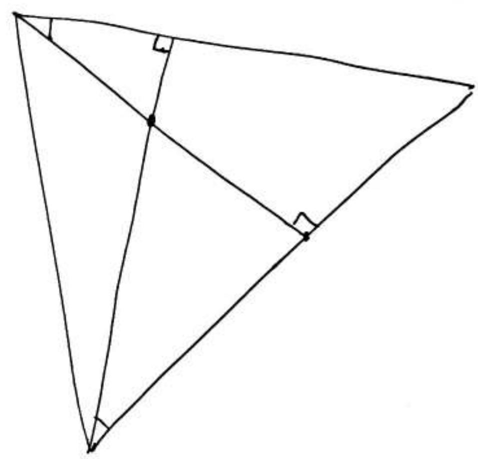
$A=1$, $B=1-\frac{1}{60^2}$

$A>B$

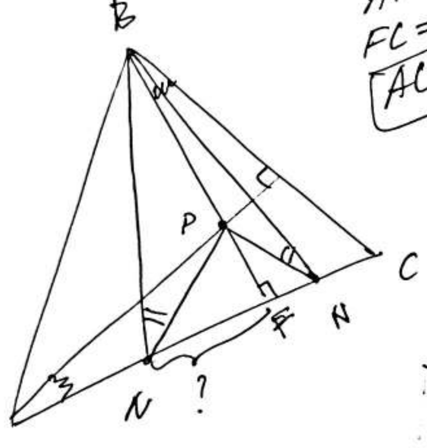
ЧЕРНОВИК

Задача 4

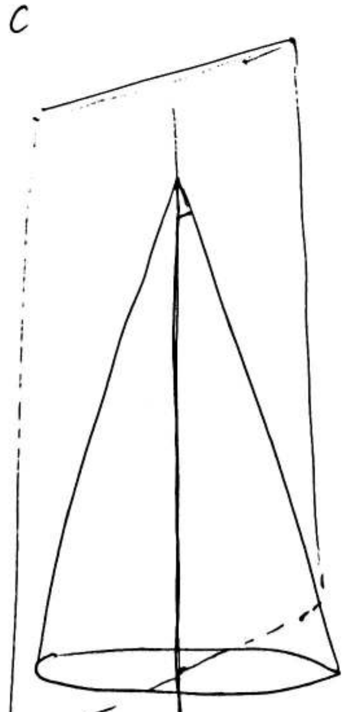
№7

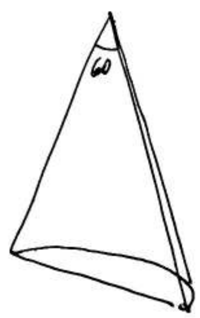


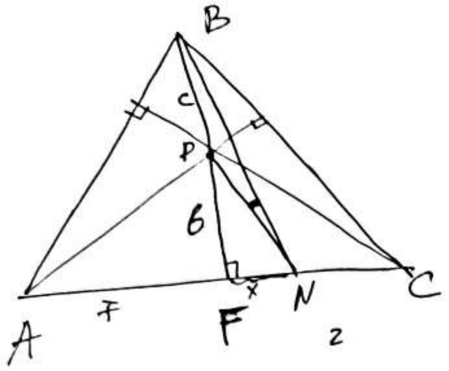
$AF=7$
$FC=2$
$\boxed{AC=9}$




$\angle PAC=\angle PBC$








# ЧЕРНОВИК

$AF = 7$

$FC = 2$

$\angle BNP \xrightarrow[max]{}$

$FN - ?$

Обозначим $BP = c$, $FP = b$

$\angle BNP + \angle NBP = \angle FPN \Rightarrow$

$\angle BNP = \angle FPN - \angle NBP \xrightarrow[max]{}$ ⇒ угол max, когда максимален его tg.

$\Rightarrow tg \angle BNP = tg(\angle FPN - \angle NBP) = *$

$tg \angle FPN = \dfrac{FN}{PF} = \dfrac{x}{b}$, $tg \angle NBP = \dfrac{FN}{FB} = \dfrac{x}{b+c}$

$$\Rightarrow * = \frac{tg \angle FPN - tg \angle NBP}{1 + tg \angle FPN \cdot tg \angle NBP} = \frac{\frac{x}{b} - \frac{x}{b+c}}{1 + \frac{x}{b} \cdot \frac{x}{b+c}}$$

$$= \frac{\frac{x(b+c) - xb}{\cancel{b(b+c)}} \cdot \cancel{b(b+c)}}{b(b+c) + x^2} = \frac{xc}{b^2 + bc + x^2}$$

т.к $X = FN$ - переменная, а $b = PF$, $c = BP$ постоянные, то

Найдем $X$ при которых достигается max

$\Rightarrow tg \angle BNP$ тоже будет максимален

$$\left(\frac{X \cdot c}{b^2 + bc + x^2}\right)' = \frac{c(b^2 + bc + x^2) - x \cdot c \cdot 2X}{(b^2 + bc + X^2)^2} = \frac{c(b^2 + bc - X^2)}{(b^2 + bc + X^2)^2}$$

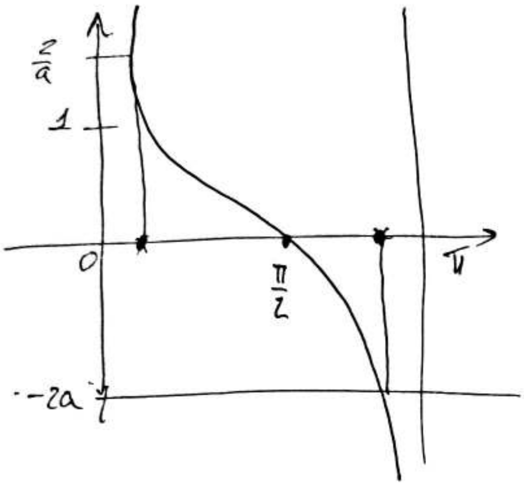
$= 0 \Rightarrow X = \sqrt{b^2 + bc} > 0$

№6 ~~Неправильное~~ (ЧЕРНОВИК)

$(t-1)(at^2+2(a^2-1)t-4a)=0$

$t=1 \quad t=-2a \quad t=\frac{2}{a}$

I $a>0$




$\frac{2}{a}>1$

$0<a<2$

$\frac{2}{a}+2a=2(a+\frac{1}{a})$

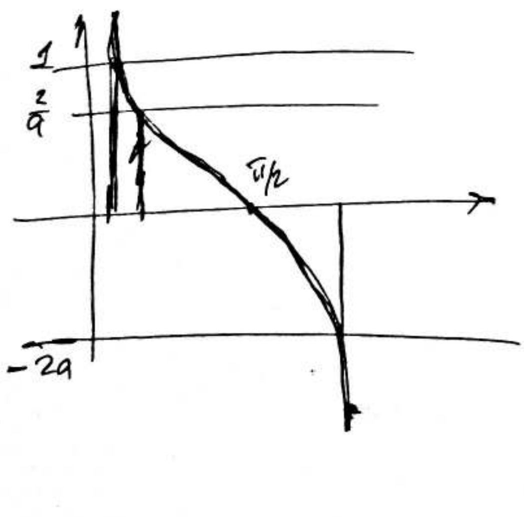
т.к $a+\frac{1}{a}\geq 2$, то

$\frac{2}{a}+2a=\cancel{2} \geq 4$

$\Rightarrow$ ~~$\rho\geq 4$~~ расстояние $\geq 4$

наименьшее $\rho=4$ при $a=1$

$a>0$ $\quad \frac{2}{a}<1 \Rightarrow a>2$




расстояние $=1+2a>5$

$a=2$ $\quad \rho=5$

Зад № 6 Начало (ЧЕРНОВИК)

$$a\,\mathrm{ctg}^3 x + (2a^2 - a - 2)\,\mathrm{ctg}^2 x + (2 - 4a - 2a^2)\,\mathrm{ctg}\,x +$$
$$\to +4a = 0$$

$x \in (0, \pi)$

Рассмотрим уравнение при $a = 0$:

1) $\underline{a = 0}$ $\quad -2\,\mathrm{ctg}^2 x + 2\,\mathrm{ctg}\,x = 0$

$$2\,\mathrm{ctg}\,x(-\mathrm{ctg}\,x + 1) = 0$$

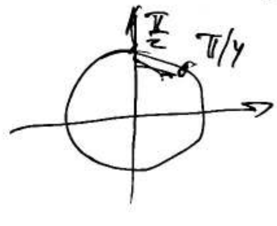
$\mathrm{ctg}\,x = 0$ $\qquad$ $\mathrm{ctg}\,x = 1$ $\qquad$ $\mathrm{ctg}\,x = \frac{\cos x}{\sin x}$

$\cos x = 0$

$x = \frac{\pi}{2}$.

$\frac{\pi}{4}$

$\cos x = \sin x$




$x = \frac{\pi}{4}$.

2) $\underline{a \neq 0}$ $\quad$ введём переменную: $\mathrm{ctg}\,x = t$

$$at^3 + 2a^2t^2 - at^2 - 2t^2 + 2t - 4at - 2a^2t + 4a = 0$$

$$t(at^2 + (2a^2 - 2)t - 4a) - (at^2 + (2a^2 - 2)t - 4a) = 0$$

$$\Rightarrow (t - 1)(at^2 + 2(a^2 - 1)t - 4a) = 0$$

$t = 1$ $\qquad$ $a \cdot t^2 + 2(a^2 - 1)t - 4a = 0$

$$\frac{D}{4} = (a^2 - 1)^2 + 4a^2 = a^4 + 2a^2 + 1 = (a^2 + 1)^2$$

$$t = \frac{-a^2 + 1 \pm (a^2 + 1)}{a} = \left\langle \begin{matrix} \frac{2}{a} \\ -2a \end{matrix} \right.$$

Задача №1 [ЧЕРНОВИК) $\sqrt{3}\cdot 1$

$$A = \frac{\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}}$$

$$(\sqrt{3}+1)^2 = 3+1+2\sqrt{3}.$$

$$B = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \dots + \frac{117}{(58\cdot 59)^2} + \frac{119}{(59\cdot 60)^2}$$

---

$$A = \frac{\sqrt[3]{(\sqrt{3}+1)}\cdot\sqrt[3]{(\sqrt{3}-1)}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{3-1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = 1.$$

---

~~B~~

$$\cancel{\sqrt[7]{\frac{2022^7-1}{2022^7}}}$$

Знак производной меняет знак с + на −

⇒ это ~~max~~ максимум

ЧЕРНОВИК

$\Rightarrow X = \sqrt{b^2 + bc}$

$X = \sqrt{b(b+c)} = \sqrt{\underbrace{(AF \cdot tg \angle PAC)}_{b = PF} \underbrace{(FC \cdot ctg \angle FBC)}_{b+c = BF}} =$

т.к $\angle PAC = \angle PBC$

$= \sqrt{AF \cdot FC} = \sqrt{2 \cdot 7} = \sqrt{14}$

1

$$B = \frac{1+2}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{2+3}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{3+4}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{59+60}{(59 \cdot 60)^2} =$$

$\frac{(1+2)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{1}\right).$

$$= \frac{1}{1 \cdot 2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2 \cdot 3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \dots + \frac{1}{59 \cdot 60}\left(\frac{1}{59} + \frac{1}{60}\right) =$$

ЧЕРНОВИК

N

C

Ce

O

$$\frac{1}{1 \cdot 2} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right); \quad \frac{1}{2 \cdot 3} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right).$$

$\Rightarrow$ получаем, что: $B = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \dots =$

$$= \left(\frac{1}{1}^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2\right) + \dots$$

слагаемые сократятся. $\Rightarrow$ останется только разность первого и последнего.

рассмотрим функцию $a$: $a = t^3 - 81t. = t(t^2 - 81)$

$\Rightarrow$ корни $t = -9$, $t = 0$, $t = 9.$

$$a = t^3 - 81t$$

$$b = 11^t - 121$$

$$c = \sin t - \frac{1}{2}. \quad c_{min} = -\frac{3}{2}, \quad c_{max} = \frac{1}{2}.$$

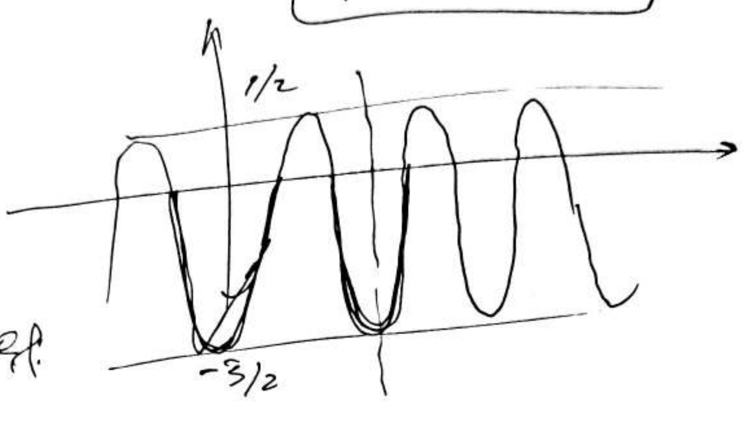
$$-1 \le \sin \le 1$$

$\boxed{\text{ЧЕРНОВИК}}$

№ 5

$c = \sin t - 1/2$

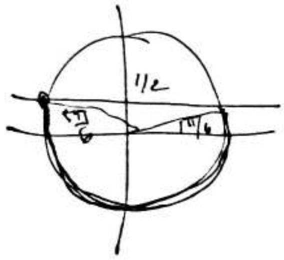
$c \in [-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}]$




Отрицательные:

$\sin t - 1/2 < 0$

$\cancel{t \in (\frac{5\pi}{6}; \frac{\pi}{6}}$   $t \in (-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k)$




положительна

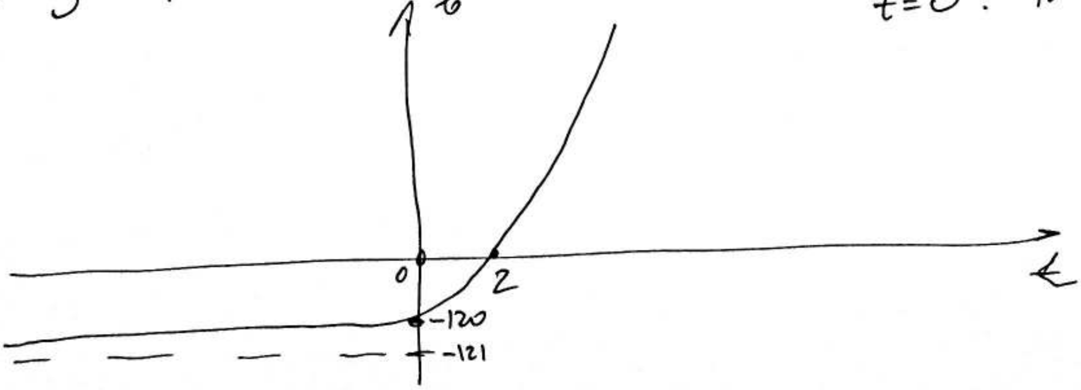
$\sin t - 1/2 > 0$   $t \in (\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k)$

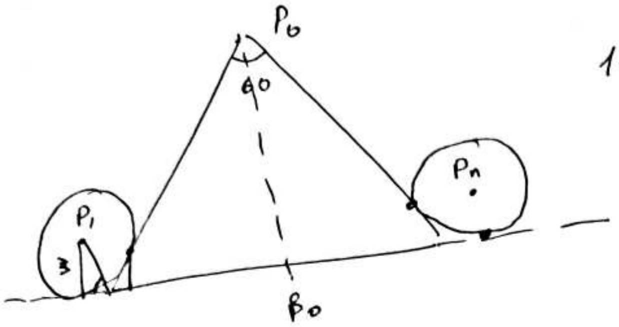
$b = 11^t - 121 = 11^t - 11^2 = 11^2(11^{t-2} - 1)$

полож: $11^{t-2} - 1 > 0$ при $t > 2$

отриц: $11^{t-2} - 1 < 0$   $t < 2$

$t = 0: 121(\frac{1}{121} - 1) = -120$

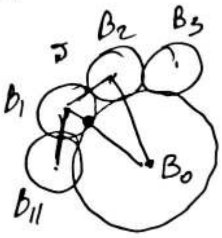





11 шаров R=3

ЧЕРновик

Проекции на плоскость основания




$P_1P_2 = 2R = 6$

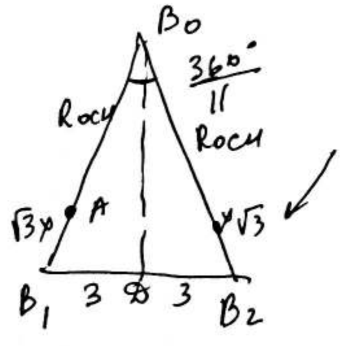
Имеем правильный 11-ти угольник

Рассмотрим Δ с вершиной $B_0$

(проекция $P_0$ на плоскость основания)

$B_1, B_2$ – проекции центров шаров на основание $P_1$ и $P_2$

Обозначим $R_{осн}$ – радиус основания




$B_1A = P_1B_1 \cdot ctg\angle P_1AB_1 = 3\, ctg\,\frac{120}{2} = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$

$$\frac{B_1B_0}{B_1D} = \frac{R_{осн}+\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sin\frac{\angle B_0}{2}}$$

$$\Rightarrow R_{осн}+\sqrt{3} = \frac{3}{\sin\angle\frac{180}{11}}$$

$$R_{осн} = \frac{3}{\sin\angle\frac{180}{11}} - \sqrt{3}$$