МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Валиев Вячеслав Артурович**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **85**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	15	15	0	10

Чистовик

№2

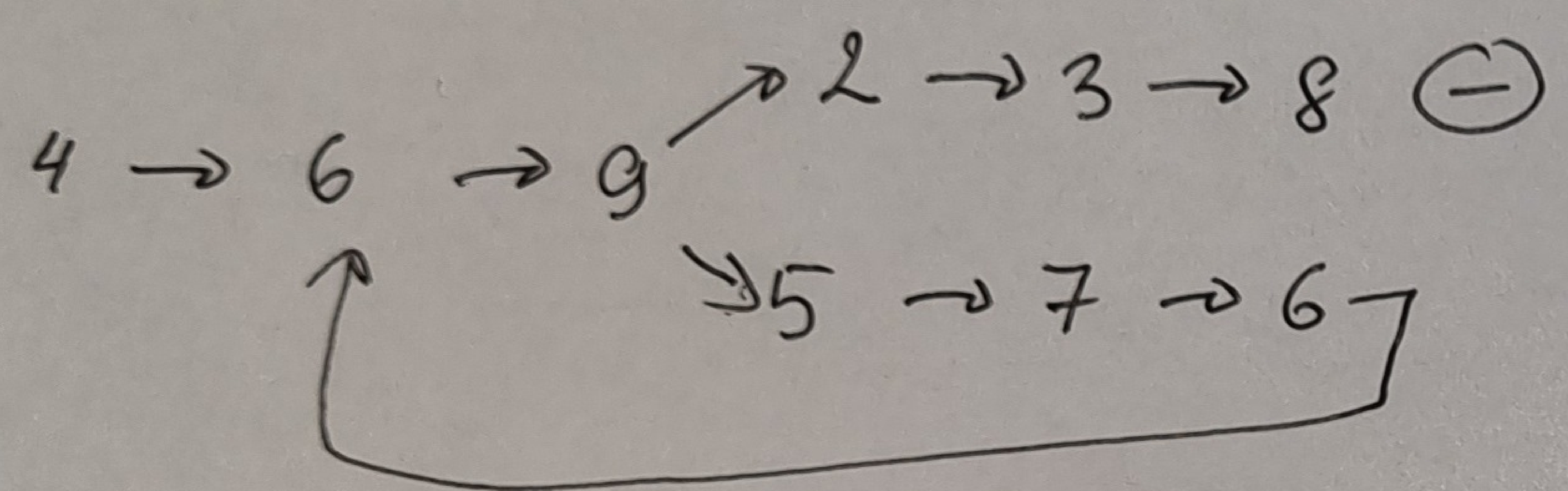
Выпишем возможные пары подряд идущих цифр:

19: 19, 38, 57, 76, 95

23: 23, 46, 69, 92

Мы знаем, что наше число начинается с 4.
Тогда след. цифра 6.

Распишем „цикл" (с развет.)



Сл. „цикл" состоит из 6 этапов
и есть возм. ответвление тупиковое

Посмотрим „остаток от деления на 6 числа 2022.

$2022 \equiv 0 \pmod 6$

Сл. у нас либо посл. цифра в цикле, либо ответвление в самой последней шестёрке.

6 или 8.

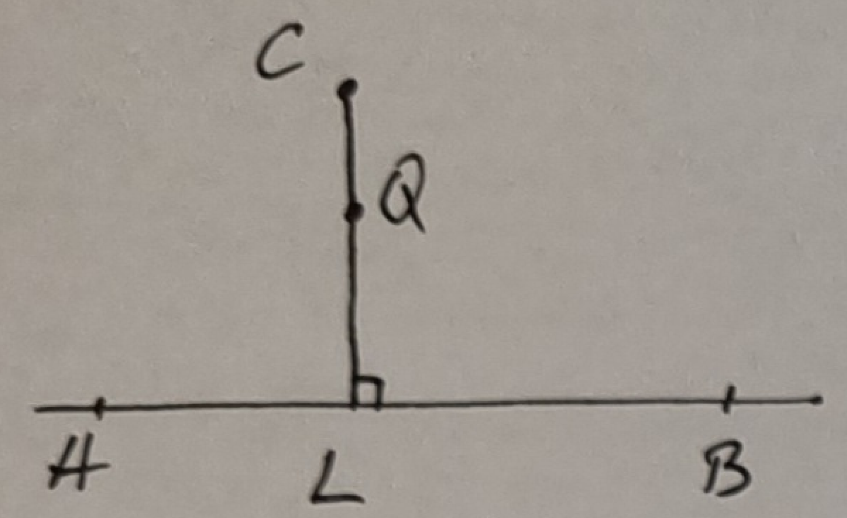
Ответ: 6 или 8

Чистовик

№7

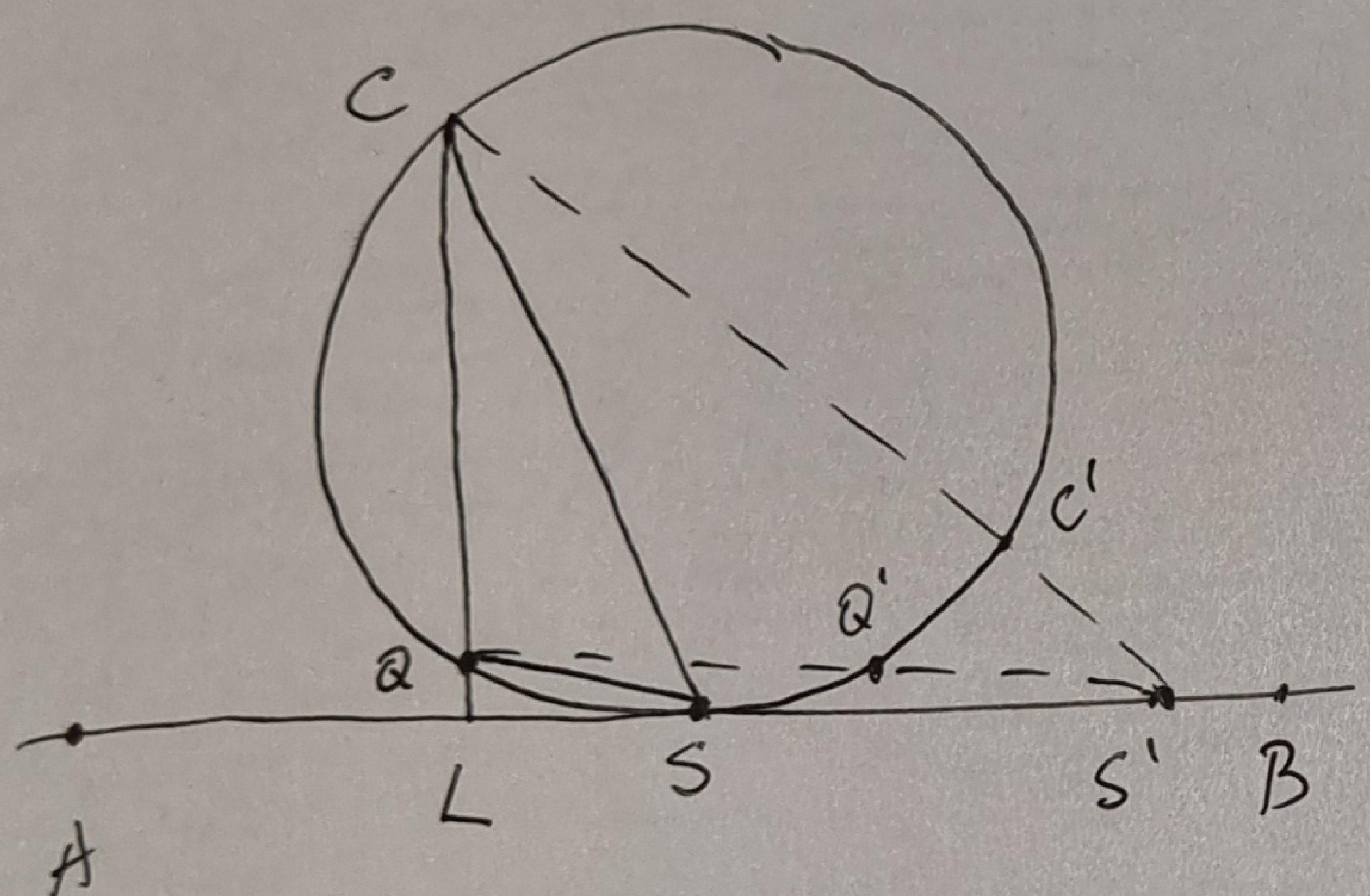
Рассмотрим прямую AB и отрезок, не пересекающий её CQ, такой что $AB \perp CQ$

$CQ \cap AB = L$



Отложим окр. ω : ω касается AB, $C, Q \in \omega$:

$\omega \cap AB = S$ (таких две, но будем рассматривать только такую, которая касается AB на луче (B))



$\angle CSQ = \frac{1}{2} \cup CQ$

Рассмотрим любую другую точку S' на луче LB

Она будет лежать вне этой окружности, таким образом,

$\angle CS'Q = \frac{1}{2}(\cup CQ - \cup Q'C') < \frac{1}{2} \cup CQ = \angle CSQ$

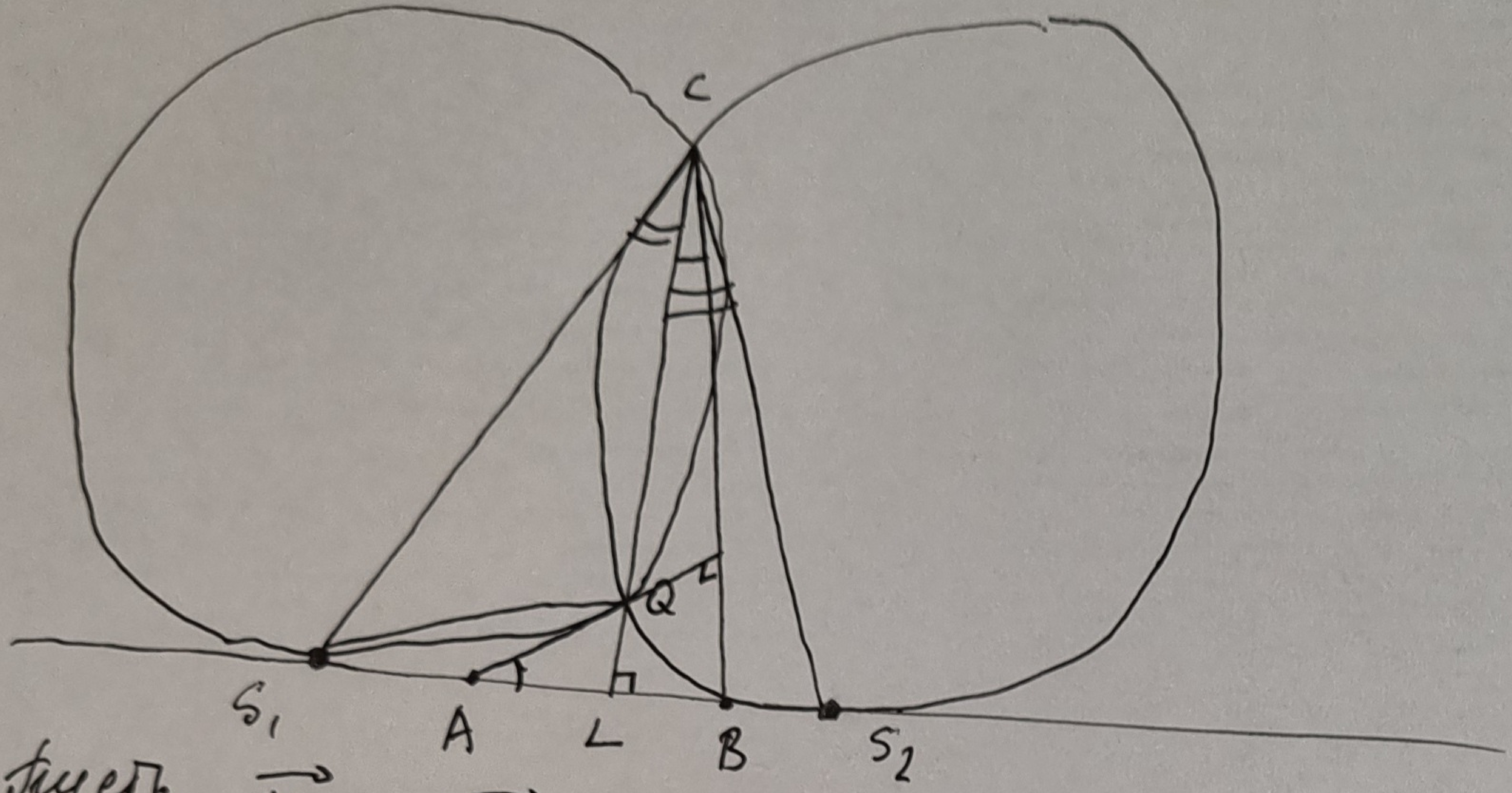
Таким образом, $\angle QSC$ - максимальный

Почему хотя бы одна из двух S попадает на отр. AB?

Допустим, что ни одна из точек S (S_1 и S_2) не попала внутрь отрезка AB:

Чистовик

№7



Пусть $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{S_1S_2}$ (пусть так, ~~ес~~ с точностью для перестановки A и B)

Скажем, что $S_1 S_2$ - числовая прямая $L=0$

тогда, если $B > S_2$, то $S_2 \in AB$

Если $B < L = 0$, то $\angle ABC > 90^\circ$, но у нас остроуг. треуг.

Если $B: 0 \leq B \leq S_2$

Пусть $A > S_1$, (тогда $S_1 \notin AB$ и $S_2 \notin AB$)

Q - ортоцентр $\triangle ABC$, тогда $\angle QAB = \angle QCB$ (по св-ву)

Заметим, что $S_2 > B \Rightarrow \angle LCS_2 > \angle LCB$

но угол $\angle S_1CL = \angle LCS_2 \Rightarrow \angle S_1CQ > \angle QAB$

но по св-ву касат.: $\angle S_1CQ = \angle QS_1A$,

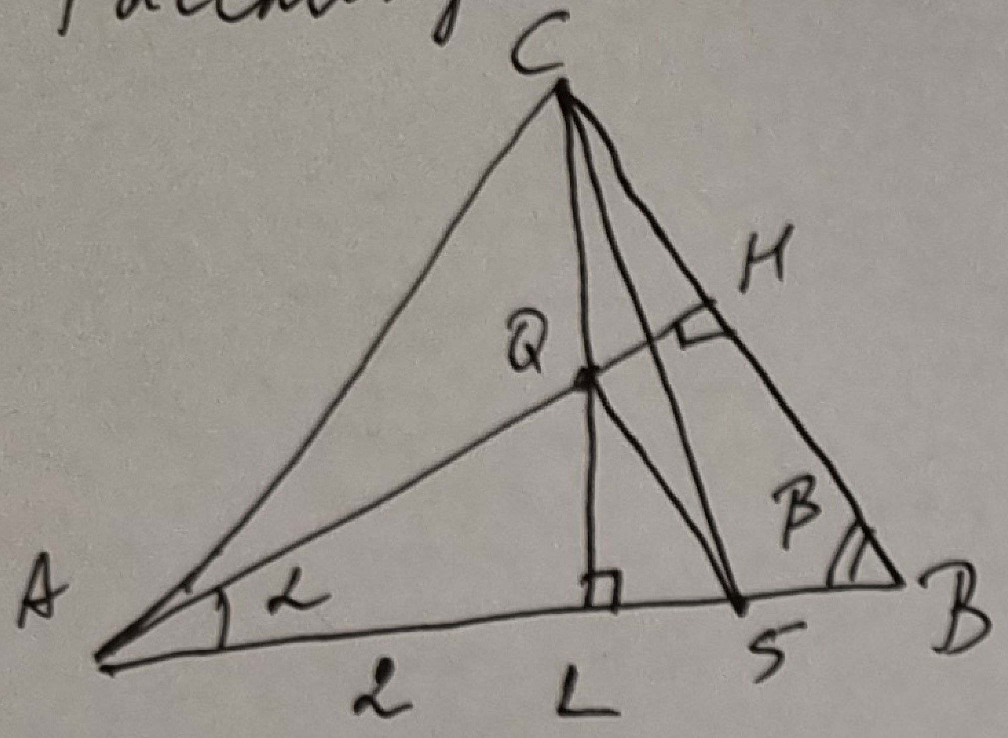
т.е. $\angle QS_1A > \angle QAL$, но $S_1 < A$, а такого быть не может.

Итого, одна из точек S будет принадлежать отрезку.

Чистовик

№ 7

Рассмотрим:



LS - касательная, LC - секущая, тогда по св-ву: $LS^2 = LQ \cdot LC$

Осталось посчитать $LQ \cdot LC$:
(AH - высота)

Пусть $\angle HAB = \alpha$ $\angle ABH = \beta$

$AL = 2$ $LB = 5$ по усл.

Тогда $tg\alpha = \frac{QL}{2}$, $tg\beta = \frac{CL}{5}$ =>

$QL \cdot CL = 2 \cdot 5 \cdot tg\alpha \cdot tg\beta = 10\, tg\alpha \cdot tg\beta$

но $\alpha + \beta = 90^\circ$ => $tg\alpha \cdot tg\beta = 1$

Тогда $LS^2 = 10$ => $LS = \sqrt{10}$

Ответ: $LS = \sqrt{10}$

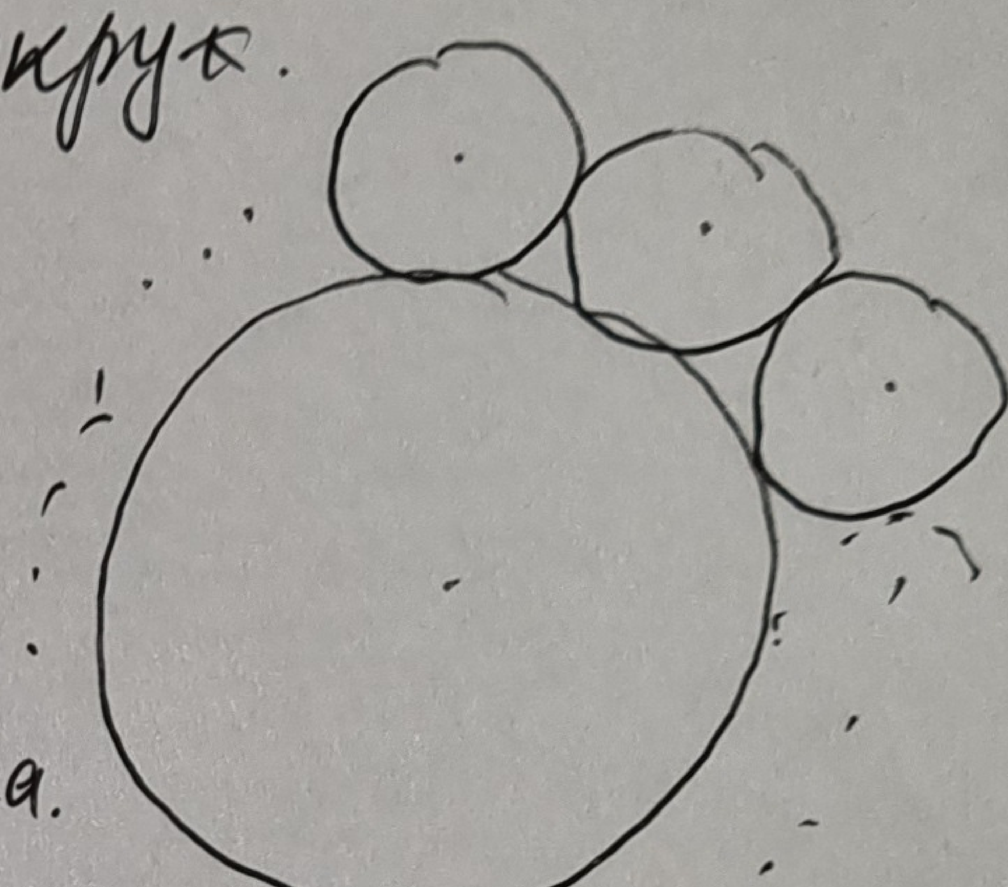
Чистовик

№4 Рассмотрим сечение, проходящее через E (центр шара) и парал. основанию конуса.

Оно будет проходить через центры всех сфер, сл. сечения сфер-окружностей радиуса 2 будут касаться друг друга.

Сл. центры окружностей будут образовывать правильный 17 угольник со стороной 4.

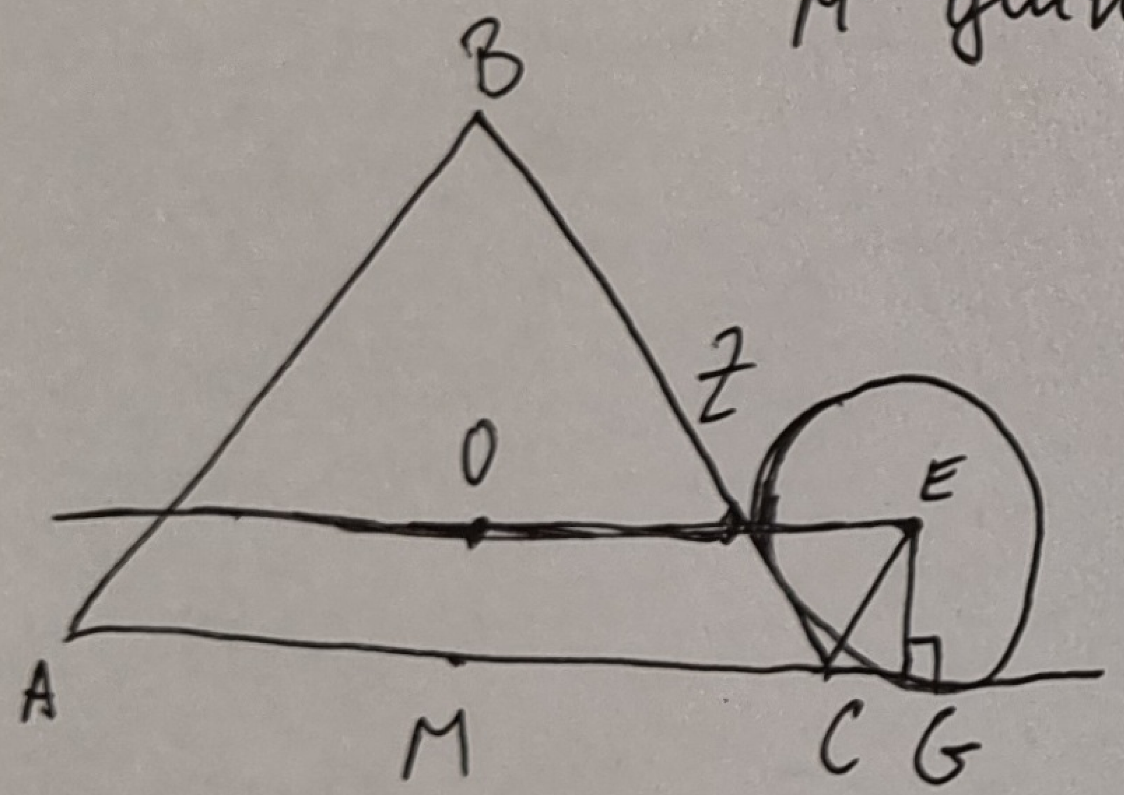
У такого многоугол. радиус описан. окруж.



$$R = 4/2 \sin\frac{180^\circ}{17} = \frac{2}{\sin\frac{180^\circ}{17}}$$

При этом из симметрии центр получ. описанной окруж. будет лежать на оси конуса. Пусть это точка O.

M- центр основания конуса



$OE \cap BC = Z$

$\angle ZEC = \angle ECG = 60^\circ$

$\angle CZE = \angle ZCA = 60^\circ$

сл. $ZE = ZC = \frac{2}{\sin 60^\circ} = \frac{4}{\sqrt{3}}$

сл. $MC = OZ + ZE/2 = R - ZE + \frac{ZE}{2} = R + \frac{ZE}{2} = R + \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sin\frac{180^\circ}{17}} + \frac{2}{\sqrt{3}}$

т.к. $\angle BCA = \angle BAC = 60^\circ$ и $\angle BGC = 90^\circ$

из св-ва касания и CE - бисс. $\angle BCG$

т.к. окруж. с центром в E впис. в $\angle BCG$

тогда искомый радиус основания: MC

Ответ: $\frac{2}{\sin\frac{180^\circ}{17}} + \frac{2}{\sqrt{3}}$

Чистовик

N 1

$$A = \frac{\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}} \qquad B = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \dots + \frac{77}{(38\cdot 39)^2} + \frac{79}{(39\cdot 40)^2}$$

$$B = \frac{(1+2)(2-1)}{(1\cdot 2)^2} + \frac{(3+2)(3-2)}{(2\cdot 3)^2} + \dots + \frac{(39+38)(39-38)}{38^2\cdot 39^2} + \frac{(40+39)(40-39)}{39^2\cdot 40^2} =$$

$$= \frac{1}{1^2} - \cancel{\frac{1}{2^2}} - \frac{1}{3^2} + \cancel{\frac{1}{2^2}} + \dots + \frac{1}{39^2} - \frac{1}{40^2} = 1 - \frac{1}{40^2} = 1 - \frac{1}{1600} = \frac{1599}{1600}$$

$$\frac{\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}} \vee \frac{1599}{1600}$$

$$A = \sqrt[3]{\frac{\sqrt[2]{\sqrt{1}^2+\sqrt{3}^2+2\sqrt{3}}\,(\sqrt{3}-1)}{2}} = \sqrt[3]{\frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3-1}{2}} = 1$$

$$A = 1 \qquad B = 1 - \frac{1}{40^2}$$

Следовательно $A > B$

Ответ: $A > B$

6

Чистовик

№5

Заметим, что $a(t) = t^3 - 121t$

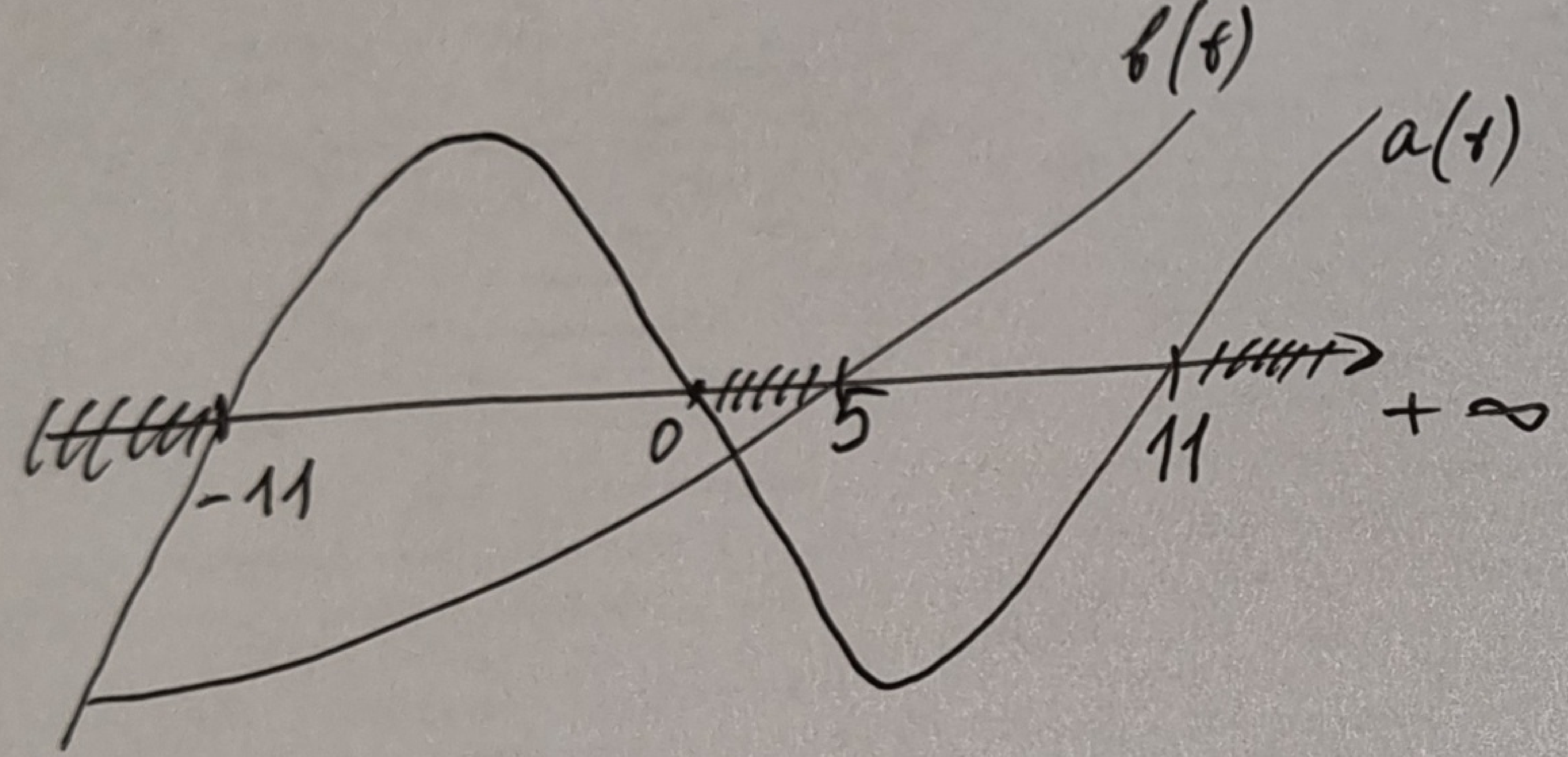
$a(t) = 0$ при $t = 0$, $t = 11$, $t = -11$

сл. $a(t) < 0$ при $t \in (-\infty; -11) \cup (0; 11)$

$b(t) = 2^t - 32$ $b(t) = 0 \Leftrightarrow t = 5$

$b(t) < 0$, на $t \in (-\infty; -5)$

$c(t) = \sin t - \frac{\sqrt{3}}{2}$ $c(t) < 0$ при $t \in \left(\frac{2\pi}{3} + \pi k; \frac{7\pi}{3} + \pi k\right)$
$k \in Z$



и на $(0, 5)$

Заметим, что на $(-\infty; -11)$ a и $b < 0$, сл.

средние точно < 0

а на $(11; +\infty)$ a и $b > 0$, сл. средние > 0

сл. на $(-11; 0)$ и на $(5; 11)$ средние больше 0 когда $c(t) > 0$

т.е. на $\left(-11; -\frac{10\pi}{3}\right), \left(-\frac{5\pi}{3}; -\frac{4\pi}{3}\right), \left(\frac{7\pi}{3}; \frac{8\pi}{3}\right)$

$c(t) > 0$ и средние больше.

Ответ: средние больше 0 при $t \in \left(-11; -\frac{10\pi}{3}\right) \cup \left(-\frac{5\pi}{3}; -\frac{4\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{3}; \frac{8\pi}{3}\right) \cup (11; +\infty)$.

Чистовик

№6.

Замена $\operatorname{ctg} x = y$

Заметим, что:

$$ay^3 + (2a^2 - a - 2)y^2 + (2 - 4a - 2a^2)y + 4a =$$

$$= (y-1)(2a+y)(2y-2) \overset{?}{=} 0$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} y = -2a \\ y = 1 \\ y = 2/a, \ a \neq 0 \end{array}\right.$$

$y = 1 \Rightarrow$ корень $\operatorname{ctg} x = 1 \Rightarrow x = \pi/4$ (смотрим только на $(0;\pi)$)
есть всегда

Если $a = 0$, то 2 корня: $\operatorname{ctg} x = 0$, $\operatorname{ctg} x = 1$

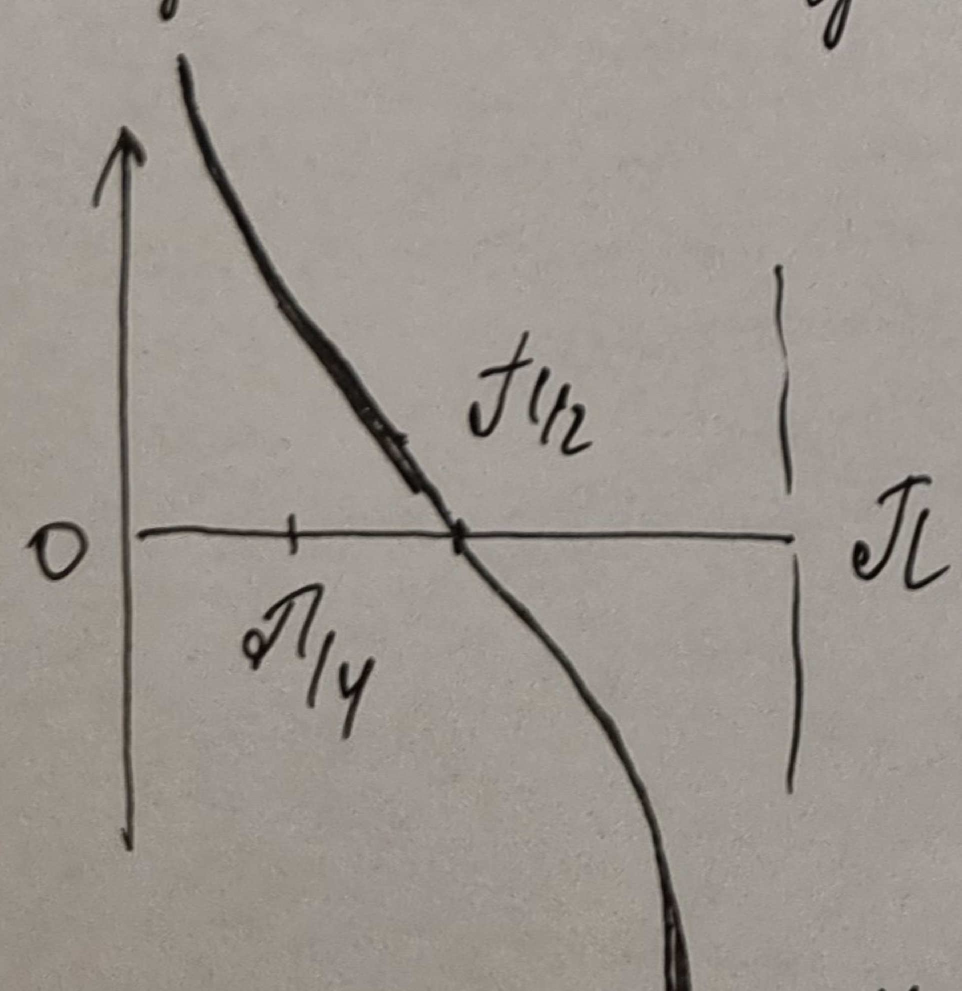
$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$x = \pi/2 \qquad x = \pi/4$$

расстояние: $\pi/4$

$a \neq 0$, тогда либо число $-2a$, либо $\frac{2}{a}$ – отрицат.

Построим на график $\operatorname{ctg} x$ на $(0;\pi)$



Либо $-2a$, либо $2/a$ отриц., $\operatorname{ctg} x$ – непрер.
и обл. знач. $\mathbb{R}$, тогда $\exists\, x_0, x_1$

$$\begin{cases} \operatorname{ctg} x_0 = -2a \\ \operatorname{ctg} x_1 = \frac{2}{a} \end{cases}$$

Что-то из этого $-2a$ или $a/2$ отриц.,
тогда либо $x_1 > \pi/2$, либо $x_0 > \pi/2$

Чистовик

№6

Тогда $x_0 - \pi/4 > \frac{\pi}{4}$

или $x_1 - \pi/4 > \pi/4$

А тогда максим. расстояние между корнями $> \pi/4$

У нас есть пример на $\pi/4$: $a=0$

Ответ: $a=0$