МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Васильев Андрей Владимирович**

Класс: **9 класс**

Технический балл: **55**

Дата проведения: **12 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	10	15	15	0	15	0	0

Чистовик.

№1.

Рассмотрим числа: 1; 2; 3; 4; 5; 6.
Найдём степень вхождения 2 в каждое из них: $2^0; 2^1; 2^0; 2^2; 2^0; 2^1$. Если произведение 5 чисел делится на $16 = 2^4$, то у нас обязательно присутствуют чётные числа => закрытое число - нечётное. Всего вариантов закрытого числа 6 (может быть 1; 2; 3; 4; 5; 6). Нам же подходят лишь 3 (1; 3; 5 => все чётные видны). Вероятность равна: $P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
Ответ: $\frac{1}{2}$.

№2.

Есть числа: 1; 2; ...; 2022.
Есть 2 прогрессии (арифм.):
1; 3; 5; ... и 1; 4; 7; ...
В первой прогрессии каждый член представим в виде: $2n-1 = a_n$, ведь $a_1 = 1$; $d = 2$. Во второй прогрессии: $a_n = 3n-2$, ведь $a_1 = 1$; $d = 3$. $2n-1 \underset{2}{\equiv} 1$ => не подходят числа, дающие остаток 1 при делении на 2;
$3n-2 \underset{3}{\equiv} 1$ => не подходят числа, дающие остаток 1 при делении на 3.

ЧИСТОВИК
№2 (продолжение)

~~Числа~~ 1; 2; 3; ...; 2022 по модулю 2: 1; 0; 1; 0; ...; 0. Вычеркиваем дающие остаток 1: их половина от 2022.

Остаются: 2; 4; 6; 8; ...; 2022

(Пояснение: числа можно было разбить на пары, где одно давало остаток 1, второе остаток 0: $1+1 \underset{2}{\equiv} 0$; $0+1 \underset{2}{\equiv} 1$ - зацикливалось; началось с 1, закончилось 0 => ровно половина не подходит.)

По модулю 3: 2; 1; 0; 2; ...; 0. Не подходят с остатком 1: их $\frac{1}{3}$ от всех.

(Началось с 2: $2+1 \underset{3}{\equiv} 0$; $0+1 \underset{3}{\equiv} 1$; $1+1 \underset{3}{\equiv} 2$; закончилось 0 => ровно треть.)

Итого: От 2022 отняли половину, затем от получившегося треть: $2022 - \frac{2022}{2} = 1011$.

$1011 - \frac{1011}{3} = 674$. - осталось.

Ответ: 674 числа.

Чистовик

№3.

Последние 3 цифры числа - это его остаток от деления на 1000. Тогда сравним число $10^{2022}-9^{2022}$ по этому модулю.

$10^{2022}-9^{2022} \underset{1000}{\equiv} 10^3\cdot 10^{2019}-9^{2022} \underset{1000}{\equiv} 1000\cdot 10^{2019}-9^{2022} \underset{1000}{\equiv}$

$\underset{1000}{\equiv} 0-9^{2022} \underset{1000}{\equiv} -9^{2022}$. Заметим, что ~~$9^5 = 59049 \underset{1000}{\equiv} 49$. Тогда: $-9^{2022} \equiv$~~ по теореме Эйлера: $9^{400} \underset{1000}{\equiv} 1$ (Сама теорема: $a^{\varphi(n)} \underset{n}{\equiv} 1$, где НОД$(a,n)=1$; φ - функция Эйлера).

По формуле: $\varphi(1000) = 5^2\cdot 2^2\cdot(5-1)(2-1) = 400$ $(1000 = 5^3\cdot 2^3)$. Применим теорему к нашему сравнению: $-9^{2022} = -9^{22}\cdot(9^{400})^5 \underset{1000}{\equiv} -9^{22}$. Заметим, что $9^5 = 59049 \underset{1000}{\equiv} 49$. Применим:

$-9^{22} = -9^2\cdot(9^5)^4 \underset{1000}{\equiv} -9^2\cdot 49^4$. $49^2 = (50-1)^2 = 50^2-2\cdot 50+1 = 2500-100+1 = 2401$. Тогда: $49^4 = 2401^2 = 5764801$.

$-9^2\cdot 49^4 = -9^2\cdot 5764801 \underset{1000}{\equiv} -9^2\cdot 801 = -81\cdot 801 =$

$\underset{1000}{\equiv} -81\cdot(-199) \underset{1000}{\equiv} 81\cdot 199 = 200\cdot 81-81 = 16200-81 \underset{1000}{\equiv} 200-81 =$

$= 119$.

Лист 3.

Чистовик.

№3 (продолжение).

(Пояснение: $49^4 = 2401 \cdot 2401$.

$81 \cdot 200 = 162 \cdot 100 = 16200$.

$$\begin{array}{r} \times\, 2401 \\ 2401 \\ \hline +\,2401 \\ 0000 \\ 9604 \\ 4802 \\ \hline 5764801 \end{array}$$
)

Итого: $10^{2022} - 9^{2022} \underset{1000}{\equiv} 119$ – это и есть 3 последние цифры. Ответ: 119.

№5.

Поймем, что у нас среди чисел a, b, c должно быть хотя бы 2 положительных. Если у нас 1 положительное, то оно является наибольшим => среднее – неположительное. Если 0 положительных, то все – неположительные. Если 2 положительных, то они оба больше неположительного => среднее – положительное. Если 3 положительные, то все положительные => среднее тоже. Тогда найдем при каких X ~~котор~~ числа a, b и c будут положительными (необязательно все сразу, потом найдем X при которых 2 и более будут положительными).

Лист 4.

Чистовик

№5 (продолжение)

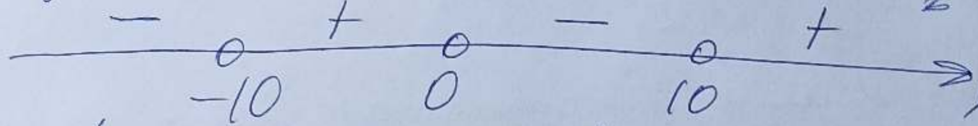
Будем пользоваться методом интервалов.

1) Рассм. ф-цию: $f(x)=x^3-100x$.

$x^3-100x = x(x^2-100) = x(x-10)(x+10)$.

Корни: $-10; 0; 10$. Точек, в которых ф-ция не существует: нет.

при $x=11$ полож.



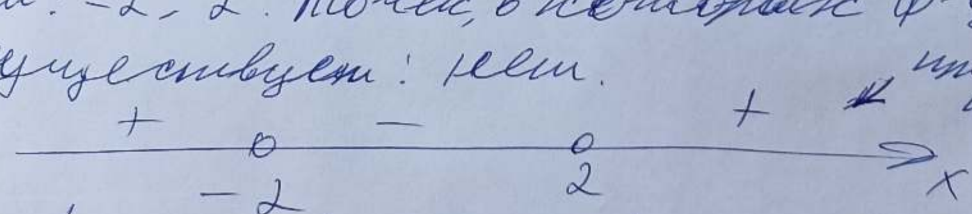
$x \in (-10; 0), (10; +\infty)$.

2) Рассм. ф-цию: $f(x)=x^4-16$.

$x^4-16 = (x^2-4)(x^2+4) = (x-2)(x+2)(x^2+4)$.

Корни: $-2; 2$. Точек, в которых ф-ция не существует: нет.

при $x=3$ полож.



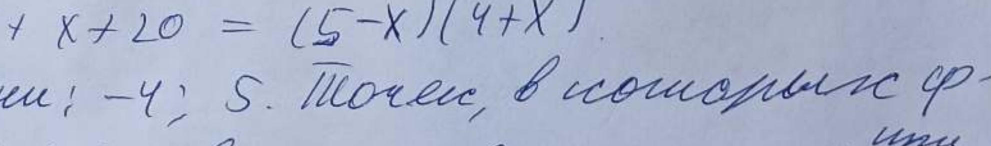
$x \in (-\infty; -2), (2; +\infty)$.

3) Рассм. ф-цию: $f(x) = -x^2+x+20$.

$-x^2+x+20 = (5-x)(4+x)$

Корни: $-4; 5$. Точек, в которых ф-ция не существует: нет.

при $x=6$ отрицат.



$x \in (-4; 5)$.

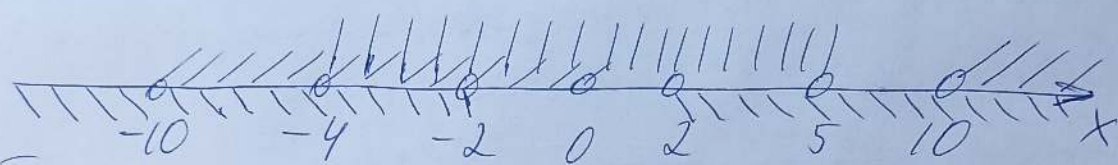
Мы нашли все x, при которых a, b и c — положительны. Теперь нужно найти x, при которых хотя бы 2 одновременно положительны.

Лист 5.

Чистовик.

№5 (продолжение 2).

Мы нашли X, при которых a, b и c положительны по-отдельности. Теперь найдем X, при которых хотя бы 2 одновременно положительны.



Где есть 2 или 3 штриховки — нам подходят (a: / ; b: \ ; c: |).

Это: $X \in (-10;0), (2;5), (10;+\infty)$.

Ответ: $x \in (-10;0), (2;5), (10;+\infty)$.

Черновик.

№1.

Если произведение ⋮16, то:

У нас есть числа: ~~1, 3, 5, 2, 4, 6.~~ 1, 2, 3, 4, 5, 6

Заметим, что степень вхождения в числа такие: $1=2^0\cdot 1$. $2=2^1$ $3=2^0\cdot 3$. $4=2^2$. $5=2^0\cdot 1$. $6=2^1\cdot 3$

Тогда у нас обязательно должны быть числа: 2, 4, 6. Всего вариантов падения 6 (сыграла грань 1; 2; 3; 4; 5; 6). Нам подходят варианты: 1, 3, 5. $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$. Ответ: $\frac{1}{2}$.

~~№2~~ Т.к. $u \le v \le w$, то $v \ge 0$, а значит и $w \ge 0$. u - меньше.

~~$x^3-100x \ge x+20-x^2$~~

~~$x^3+x^2-101x-20 \ge 0$~~

$x^4-16 \le 0$

$(x^2-4)(x^2+4) \le 0$

$(x-2)(x+2)(x^2+4) \le 0$

$+ \quad -2 \quad - \quad +2 \quad +$

$x \in [-2;2]$.

$x^3-100x \le 0$

$x(x-10)(x+10) \le 0$

$- \quad -10 \quad + \quad 0 \quad - \quad 10 \quad +$

то $x \in (-\infty;-10] \cup [0;10]$.

$-x^2+x+20<0$

$x^2-x-20=(x-5)(x+4)$.

$-x^2+x+20=(5-x)(x+4)<0$

$- \quad -4 \quad + \quad 5 \quad -$

$x \in (-\infty;-4] \cup [5;+\infty)$.

Лист 7.

Черновик.

Если среднее число положительное, то у нас есть 2 числа положительные.

$u \le v \le w$. $v > 0 \Rightarrow w > 0$.

$x^3 - 100x > 0$

$x(x-10)(x+10) > 0$

$-\quad +\quad -\quad +$

$-10 \quad 0 \quad 10$

$x \in (-10;0) \cup (10;+\infty)$

$x^4 - 16 > 0$

$(x-2)(x+2)(x^2+4) > 0$

$+\quad -\quad +$

$-2 \quad 2 \quad x$

$x \in (-\infty;-2) \cup (2;+\infty)$

$-x^2 + x + 20 > 0$

$(5-x)(4+x) > 0$

$-4 \quad 5$

~~$(5-x)(4-x) = 20 - 5x - 4x$~~

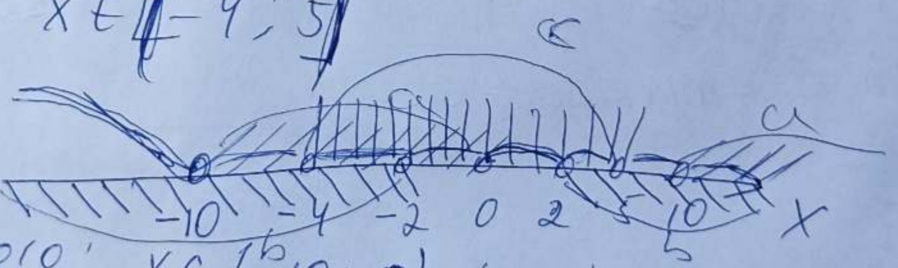
$(5-x)(4+x) > 0$

$-\quad +\quad -$

$-4 \quad 5$

$(5-x)(4+x) = 5x + 20 - 4x - x^2 = -x^2 + x + 20$

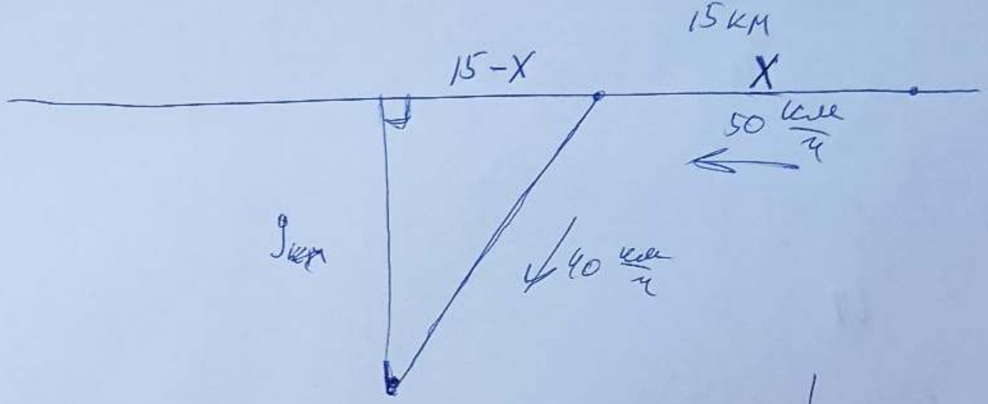
$x \in (-4;5)$



Итого: $x \in (-10;0), (2;5), (10;+\infty)$.

Черновик

№ 4.



$$\frac{x}{50} + \frac{\sqrt{9^2+(15-x)^2}}{40} - \min.$$

$$\begin{array}{r} 225 \\ +\;81 \\ \hline 306 \end{array}$$

$$\frac{x}{50} + \frac{\sqrt{81+225-30x+x^2}}{40} = \frac{\sqrt{x^2-30x+306}}{40} + \frac{x}{50}$$

$$\frac{\sqrt{x^2-30x+306}}{40} \geq \quad x^2-30x+306$$

$196-169=$

$=96-69=36-9=$

$x_в = -\frac{-30}{2} = 15.$

$$\begin{array}{r} 196 \\ -\;29 \\ \hline 225 \end{array} \quad \begin{array}{r} 225 \\ +\;81 \\ \hline 306 \end{array}$$

$225-30\cdot15+306=$

$=225-450+306-$

$=-225+306=-25+106=100-19=81.$

$$\frac{\sqrt{x^2-30x+306}}{40} + \frac{x}{50} \geq \frac{21}{40} \Big/ \cdot 200$$

$x^2-30x+306 \geq 81.$

$5\sqrt{x^2-30x+306} + 4x \geq 105.$

$$\begin{array}{r} 21 \\ \times\;5 \\ \hline 105 \end{array}$$

$5\sqrt{x^2-30x+306} \geq 105-4x. \Rightarrow x \leq \frac{105}{4}$

$$\frac{\sqrt{x^2-30x+306}}{40} \geq \frac{9}{40}.$$

$25(x^2-30x+306) \geq 16x^2-840x+105^2$

$25x^2-750x+25\cdot306 \geq 16x^2-840x+25\cdot21^2$

$$\begin{array}{r} 105 \\ \times\;8 \\ \hline 840 \end{array}$$

$$\frac{x}{50} = \frac{15}{50} = \frac{3}{10} = \frac{9+12}{40} = \frac{21}{40}$$

$9x^2+90x+25\cdot(306-441) \geq 0$

$$\begin{array}{r} 306 \\ \times\;25 \end{array}$$

$105 \,|\, 5 = 21$

$\times\, 21$

Лист 9

Черновик.

№2.

$1, 3, 5, \ldots \quad a_1 = 1 \quad d = 2.$

$1, 4, 7, \ldots \quad a_1 = 1 \quad d = 3.$

1) $n \equiv_2 1$

2) $n \equiv_3 1$

$\cancel{1}, 2, \cancel{3}, \ldots, \cancel{2021}, 2022.$

чисел, кратных.

$2, 4, \ldots, 2020, 2022.$

$4 + 6 = 10.$

$\overbrace{2, 4, 6}, \overbrace{8, 10}, \ldots, 2018, 2020, 2022$

$\equiv 2 \; \equiv 1 \; \equiv 0 \; \equiv 2 \; \equiv 1 \qquad \equiv 2 \quad \equiv 1 \quad \equiv 0$

$\frac{2022}{2} = 1011. \qquad 1011 - \frac{1011}{3} = 1011 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 1011 \cdot \frac{2}{3} =$

$= \frac{2022}{3} = 674.$

$2022 \,|\, 3$

$-18 \quad 674$

22

-21

12

Лист 10

Черновик.

№7.

Есть n пакетов. ~~Пусть~~

n=1. ( ). n=3 ((·)(·))

n=2. 2((( ))) ((( ))).

n=1. ( ) 1 ур

n=2. (( )) 2 ур.

n=3. ((( ))) ((( ))) 3 ур. → 4 ур. 3 ур. 3 ур

(( )( )) 2 ур.

n=4. (((( )))) ((( ))) ((([ ]))) 4 ур.

(( )( )( )) (( )[ ]) 3 ур.

(( )( )[ ]) 3 ур.

( ) → (( )) → ((( )))

(( )( ))

11 → 1221 → 123321 → 12344321

12334421 $e(6)=20\cdot 30$°.

12332441

equal.

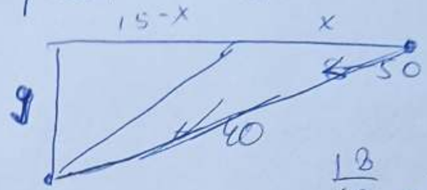
122331 → 12442331

12233441 $\frac{2022}{6}\cdot e(6) =$

=

Лист 11

Черновик



$\frac{15}{50}+\frac{9}{40}=\frac{3}{10}+\frac{9}{40}=\frac{21}{40}$

$\frac{18}{40} > \frac{\sqrt{306}}{40} = \frac{17}{40}$

$16 \times 7 = 112$

$\frac{x}{50}+\frac{\sqrt{x^2-30x+306}}{40} \geq$

$17 \times 17 = 289$

$18 \times 18 = 324$

$\frac{1}{50}+\frac{\sqrt{250}}{40} = \frac{1}{25}+$

$5625 - 2754 = 2871$

$310-120=190$

$310-60=250$

$24000^2 - 4 \cdot 112 \cdot 100 \cdot 2871.$

$2871 \times 112 = 321552$

$24 \times 24 = 576$

$32155200 \times 4 = 128620800$

$\frac{8+25\sqrt{10}}{200} \vee \frac{\sqrt{306}}{40}$

$8+25\sqrt{10} \vee 5\sqrt{306}$

83 85

15

27.

576000000

$576000000 - 128620800$

$\frac{2}{50}+\frac{5\sqrt{10}}{40}=\frac{1}{25}+\frac{\sqrt{10}}{8}=\frac{8+25\sqrt{10}}{200}$

$\frac{x}{50}+$

$\frac{\sqrt{(x-15)^2+81}}{40}+\frac{x}{50}$

лист 12

Черновик.

$$\frac{\sqrt{x^2-30x+306}}{40}+\frac{x}{50}\geq t \quad |\cdot 200$$

$$5\sqrt{x^2-30x+306}+4x\geq 200t.$$

$$5\sqrt{x^2-30x+306}\geq 200t-4x.$$

$$25x^2-750x+25\cdot 306\geq 200^2t^2-1600tx+16x^2$$

$$9x^2-750x+1600tx+25\cdot 306-200^2t^2\geq 0.$$

$$x(1600t-750) \qquad 25^2(40^2\cdot t^2).$$

$$1600t-750=3\cdot 2\cdot\sqrt{25\cdot 306-200^2t^2}$$

$$1600t-750=6\cdot\sqrt{25\cdot 306-25\cdot(40^2t^2)}$$

$$1600t-750=6\cdot 5\cdot\sqrt{306-40^2t^2}.$$

$$320t-150=6\sqrt{306-1600t^2}.$$

$$160t-75=3\sqrt{306-1600t^2}.$$

$$160^2t^2-2\cdot 160\cdot 75t+75^2=9\cdot 306-9\cdot 1600t^2$$

$$160^2.$$

$$(160^2-1600\cdot 9)t^2-150\cdot 160t+75^2-9\cdot 306=0.$$

$$160\cdot(160-90)t^2-24000t+75^2-9\cdot 306=0.$$

$$160\cdot 70t^2-24000t+5625-2754=0.$$

$750 \,|\, 5$, 150; $1600 \,|\, 5$, 320

$75\cdot 75=5625$; $16\cdot 15 = 240$; $306\cdot 9=2754$

Лист 13

Черновик

$10^{2022}-9^{2022}\underset{1000}{\equiv}-9^{2022}$

$\begin{array}{r} 59049 \\ \times\ 9 \\ \hline 531441 \end{array}$

$9^4=81$ $9^5=$

$\begin{array}{r} 81 \\ \times\ 9 \\ \hline 729 \end{array}$

$\begin{array}{r} 729 \\ \times\ 9 \\ \hline 6561 \end{array}=9^4$

$\begin{array}{r} 81 \\ \times\ 81 \\ \hline 81 \\ 648 \\ \hline 6561 \end{array}$

$\begin{array}{r} 6561 \\ \times\ 9 \\ \hline 59049 \end{array}=9^5$.

$\begin{array}{r|l} 2020 & 5 \\ -20 & 404 \\ \hline 20 & \end{array}$

$9^5\underset{1000}{\equiv}49$

$-9^{2022}\underset{1000}{\equiv}-(9^5)^{404}\cdot 9^2\equiv-81\cdot 49^{404}\equiv-81\cdot 7^{808}$

$\begin{array}{r} 49 \\ \times\ 7 \\ \hline 343 \end{array}$ $\begin{array}{r} 343 \\ \times\ 7 \\ \hline 2401 \end{array}=7^4$ $49\cdot 49=(50-1)^2=50^2-2\cdot 50+1=2500-100+1$

$\begin{array}{r} 2401 \\ \times\ 7 \\ \hline 16807 \end{array}$ $\begin{array}{r} 16807 \\ \times\ 7 \\ \hline 9649 \end{array}$

$\varphi(1000)=5^2\cdot 2^2\cdot(5-1)(2-1)=$

$=100\cdot 4=400.$

$10^{2022}-9^{2022}\underset{1000}{\equiv}-9^{2022}$

$a^{\varphi(n)}\equiv 1$

$\begin{array}{r} 200 \\ \times\ 81 \\ \hline 16200 \end{array}$

$\begin{array}{r} 200 \\ -\ 81 \\ \hline 119 \end{array}$

$-9^{2022}\equiv-(9^{400})^5\cdot 9^{22}\underset{1000}{\equiv}-9^{22}$

$-9^{22}\underset{1000}{\equiv}-9^2\cdot(9^5)^4\equiv-9^2\cdot 49^4\equiv$

$\begin{array}{r} 49 \\ \times\ 49 \\ \hline 2401 \end{array}$

$\equiv-81\cdot 801$

$\begin{array}{r} 2401 \\ \times\ 2401 \\ \hline 2401 \\ 00000 \\ 9604 \\ 4802 \\ \hline 5764801 \end{array}$

$\begin{array}{r} 801 \\ \times\ 81 \\ \hline 801 \\ 6408 \\ \hline 64881 \end{array}$

$\begin{array}{r} 2401 \\ \times\ 2401 \\ \hline 2401 \\ 0000 \\ 9604 \\ 4802 \\ \hline 5824801 \end{array}$

Лист 14