МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Вытовтова Злата Денисовна**

Класс: **9 класс**

Технический балл: **60**

Дата проведения: **12 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	0	15	15	15	0	15	0

№ 1

Назовём количество возможных вариантов того, как выпадут числа на гранях кубика x, а количество вариантов, при которых произведение чисел на видимых пяти гранях кубика кратно 16 — y. Тогда, раз чисел у нас всего шесть, а видимых граней пять, можно посчитать, чему равно x: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 720$ (на одной грани возможно, что выпадет одно из шести возможных чисел, на второй — из пяти (т.к одно число уже на предыдущей грани), на третьей — из четырёх и т.д.)

Посмотрим на случай, когда произведение ~~видимых~~ чисел, находящихся на видимых (пяти) гранях кубика, кратно 16. Разложив число, мы получим, что $16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$ ~~=> число произведение чисел на гранях тех же разложение этого кратно 16~~. Заметим, что среди возможных ~~не граней~~ гранях чисел имеются только 3, у которых в разложении имеется двойка.

Это числа $2 = 2$ и только они при ~~умножении дают~~ перемножении
$4 = 2 \cdot 2$ дают число, кратное 16 => на трёх из пяти
$6 = 2 \cdot 3$ граней кубика находятся числа 2, 4, 6.

Значит, на оставшихся двух гранях будут числа 1, 3, 5.

$\Rightarrow y = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 = 36$ (т.к. на одной грани будет число, содержащее двойку (одно из трёх), на второй также число, содержащее двойку (одно из двух, т.к. одно из чисел 2, 4, 6 уже на первой грани), на третьей — оставшееся число, содержащее двойку; аналогично с числами 1, 3, 5). ~~Чтоб~~

Чтобы узнать, чему равен шанс ~~нам~~ получить именно числа, произведение которых кратно 16, необходимо количество вариантов, при которых получается набор чисел, произведение которых ~~рав~~ кратно 16, поделить на общее количество возможных вариантов.

$$\frac{y}{x} = \frac{36}{720} = \frac{1}{20} = 0{,}05$$

Ответ: шанс получить ~~эти~~ такие числа на гранях кубика $= 0{,}05 = 5\%$

чистовик

№2

Рассмотрим 2 прогрессии

1) $a_1=1$ $q=2$ $a_n=a_1+(n-1)\cdot 2$

2) $b_1=1$ $q=3$ $b_n=b_1+(m-1)\cdot 3$

Обозначим их члены на числовой прямой

Заметим, что члены прогрессии с $c_1=1$ и $q=6$ являются одновременно членами прогрессий 1) и 2)
Введём новую прогрессию и так же обозначим её значения на числовой прямой

3) $c_1=1$ $q=6$ $\cancel{c_k=c_1+(k-1)\cdot q}$
$c_k=c_1+(k-1)\cdot 6$

Между членами этой прогрессии находятся 1 член прогрессии 2) и 2 члена прогрессии 1). Всего числа от 1 до 2022 (включая 1 и 2022) $=2022$

$$\left.\begin{array}{l} c_1=1 \\ c_2=7 \\ c_3=13 \\ \vdots \\ c_{337}=2017 \end{array}\right\}\text{всего 337 членов прогрессии}$$

$c_{338}=2023>2022$ - неудовлетворяет
Групп между этими соседними членами тоже 337. В каждой группе по 3 неучтённых члена прогрессий 1) и 2) $\Rightarrow$
чисел будет $2022-337-337\cdot 3=674$ ни в одну из прогрессий

Ответ: 674 числа не входят ни в одну из прогрессий

чистовик

№3

$10^{2022} - 9^{2022}$

$10^{2022} = \underbrace{10\ldots0}_{2022}$

$9^{2022} = 9^{2000} \cdot 9^{20} \cdot 9^{2}$

9^{10} заканчивается на 401, т.к. $\cancel{3\cdot3\ldots3} =$ $9^{10} = (3\cdot3)^{10} = \underbrace{3\cdot3\cdot\ldots\cdot3}_{20}$,

$=> 9^{20}$ заканчивается на $401\cdot401 = \ldots801$

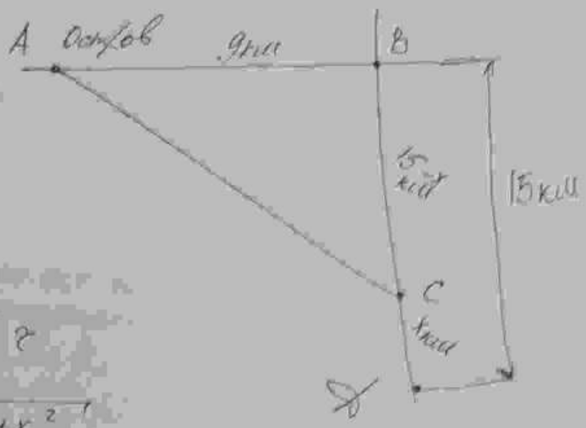
А если степень числа кратна 50, то 9^{50n} заканчивается на 001 (401^5). Тогда $1\cdot801\cdot9^2 = 64881$

Тогда $1000-881=119$

Ответ: $10^{2022} - 9^{2022}$ заканчивается на 119.

чистовик

№4



X км Хамид проехал со скоростью 50 км/ч => время $t_1 = \frac{x}{50}$ ч

$AC = \sqrt{AB^2+BC^2} = \sqrt{81+(15-x)^2} =$

$= \sqrt{306-30x+x^2}$

Время t_2 (на AC) $= \frac{\sqrt{306-30x+x^2}}{40}$ ч

$t(x) = t_1 + t_2 = \frac{x}{50} + \frac{\sqrt{306-30x+x^2}}{40} =$

$= \frac{4x+5\sqrt{306-30x+x^2}}{200}$ – время-функция от x $(t(x))$

Это время наименьшее, когда числитель наименьший

$f(x) = 4x+5\sqrt{x^2-30x+306}$

Найдём производную и приравняем её к нулю

$f'(x) = 4 + \frac{5(2x-30)}{2\sqrt{306-30x+x^2}} = 0$

$\frac{5(-2x+30)}{\sqrt{x^2-30x+306}} = 8$

$8\sqrt{x^2-30x+306} = 10(15-x)$

$(4\sqrt{x^2-30x+306})^2 = (5(15-x))^2$

$16(x^2-30x+306) = 25(15-x)^2$

$5625-750x+25x^2 = 4896-480x+16x^2$

$9x^2-270x+729=0$

$x^2-30x+81=0$

$D = 900-324 = 576$

$x_{1,2} = \frac{30\pm 24}{2} = \left[\begin{array}{l} 27 \\ \vee \\ 3 \end{array}\right.$

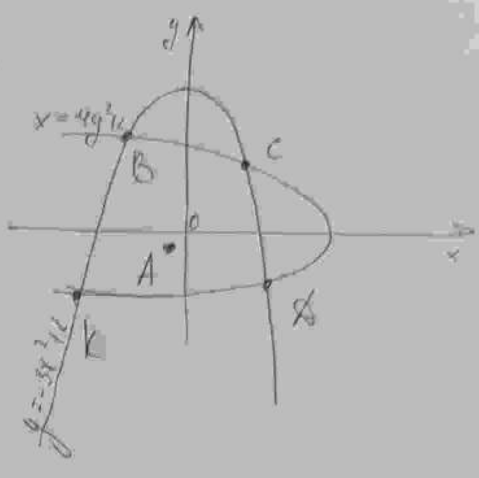
Ответ: $x = 3$ км.

чистовик

№6

Точки пересечения удовлетворяют системе:

$$\begin{cases} y = -3x^2+2, & \Big|\cdot 4 \\ x = -4y^2+2; & \Big|\cdot 3 \end{cases}$$



$$\begin{cases} 4y = -12x^2+8, \\ 3x = -12y^2+6, \end{cases} +$$

Если т. A лежит на одинаковом расстоянии от B, C, D и K, то она – центр окружности

$$4y+3x = -12x^2-12y^2+8+6;$$

$$12x^2+3x+12y^2+4y = 14$$

$$12\left(x^2+\frac{x}{4}+y^2+\frac{y}{3}\right) = 14$$

$$x^2+\frac{x}{4}+y^2+\frac{y}{3} = \frac{14}{12}$$

$$\cancel{x^2+\frac{x}{4}}\; x^2+\frac{x}{4}+\left(\frac{1}{8}\right)^2+y^2+\frac{y}{3}+\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{14}{12}+\left(\frac{1}{8}\right)^2+\left(\frac{1}{6}\right)^2$$

$$\left(x+\frac{1}{8}\right)^2+\left(y+\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{7}{6}+\left(\frac{1}{8}\right)^2+\left(\frac{1}{6}\right)^2$$

$$\left(x+\frac{1}{8}\right)^2+\left(y+\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{7\cdot 6\cdot 64+36+64}{6^2\cdot 8^2}$$

$$\left(x+\frac{1}{8}\right)^2+\left(y+\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{2788}{64\cdot 36}$$ – квадрат радиуса.

$$r^2 = \frac{2788}{64\cdot 36}$$

$$r = \sqrt{\frac{2788}{64\cdot 36}}$$

$$r = \frac{2\sqrt{697}}{48} = \frac{\sqrt{697}}{24}$$

Ответ: $r = \dfrac{\sqrt{697}}{24}$

чистовик

Рассмотрим 2 прогрессии:

1): $a_1 = 1$ $q = 2$ $a_2 = a_1 + 2$ $a_n = a_1 + (n-1) \cdot 2$

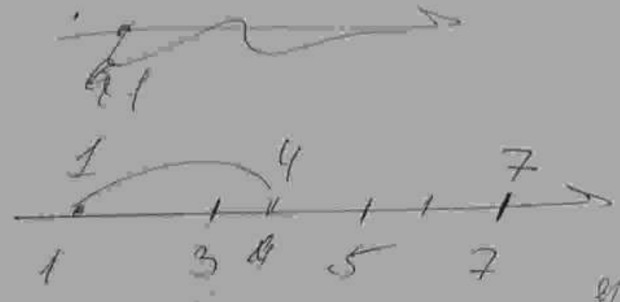
2) $b_1 = 1$ $q = 3$ $b_2 = b_1 + 3$ $\cancel{b_n = b_1 +}$

$10^{2022} = 100000\ldots0$

$9^{2022} = 9^{2000} \cdot 9^{20} \cdot 9^2$

$9^2 = 81$

$9^{20} = (9^2)^{10} = 81^{10} = \ldots 441$



$c_1 = 1$ $q = 6$

$81 \cdot 81 = 6561$

$6561 \cdot 81$ ... 441

$441 \cdot 81$ ... 021

$c_n = c_1 + (n-1)6$

$2020 = 1 + 6n - 6$

21

$2020 = 6n - 5$

$6n = 2025$

$n = \frac{2025}{6} = 337$

$2022 - 1348 = 674$

$337 \cdot 4 = 1348$

6

черновик

готова сдать
общее число листов
чистовиков
черновиков

$4 : 16$, если 12
14^2
4

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$
$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 =$

1
2
3
$4 = 2 \cdot 2$
5
$6 = 2 \cdot 3$

sanssanssan

sr sanssanssanssans sanssanssanssans sanssanssanssans sanssanssanssans

x ~~делится~~ имеет $(2^4 \cdot 4$. Её можно получить
~~$2^4 = 2 \cdot 4$~~ только числами 2, 4, 6 =>
2, 4, 6 точно будут не у всех

ещё 2 числа: 1 3
1 5
3 5

2	2	2	2	2
4	4	4	4	4
6	6	6	6	6
1	1	1	3	3
3	3	1	3	3
5	5	3	5	5
5	5	5		

всего 5 участ

UNDERTALE

E E E

9км 15км

$a = x^3 - 100x$
$b = x^4 - 16$
$c = -x^2 + x + 20$

$$\frac{15}{50} + \frac{9}{40} = \frac{3}{10} + \frac{9}{40} = \frac{12+9}{40} = \frac{21}{40}$$

$$\frac{a+b+c}{3} > 0$$

$$\frac{23}{40} \quad \frac{21}{40}$$

$$\frac{x^3 - 100x + x^4 - 16 - x^2 + x + 20}{3} > 0$$

$a = x^3 - 100x$
$b = x^4 - 16$
$c = -x^2 + x + 20$
$$\frac{a+b+c}{3} > 0$$

$$\frac{5}{100}$$

$$\frac{x^4 + x^3 - x^2 - 99x + 4}{3} > 0$$

~~$x(x^4$~~ $$\frac{x(x^3 + x^2 - x - 99) + 4}{3} > 0$$

6
18
32
~~$x(x^3+x^2$~~

черновик

$$\frac{x^3-100x+x^4-16-x^2+x+20}{3}>0$$

$x^4+x^3-x^2-99x+4>0$

$x(x^3+x^2-x-99)+4>0$

$x(x^3+x^2-x-99)>-4$

$x^4+x^3-x^2-99x+4>0$

~~$x^3+x^2-x-99+\frac{4}{x}>0$~~

$x^4+x^3-x^2-99x+4>0$

$x^4+x^3-x^2-99x+4>0$

$x^4+x^3-x^2-99x+4>0$

1 = 1
2 = 2
3 = 3
4 = 2·2
5 = 5
6 = 2·3

$16=2^4$ => на сторонах кубика должны быть ~~ст~~ цифры 2 4 6 (т.к. 2·2·2·2·3)

=> на остальных 2 гранях: 1|3, 1|5, 5|3

2 4 6 | 2 4 6 | 2 4 6 | 1 3 5 | 1 3 5

возм.
~~3шн~~ 2 · 1 · 3 · 2 = 36

всего возм. вариантов:

1
2
3
4
5
6

$6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2=720$

30
120
360
720

36

$\frac{36}{2}$

$\frac{1}{20}$

6·5·4·3·2·1

720

$\frac{2}{5}$

[redacted]

?

1

8

черновик