МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Гарифзянов Нияз Алмазович**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **100**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	15	15	15	15

Чистовик 1

Задача 2 Ответ: 6 или 8

~~Давайте будем~~ давайте посмотрим на ~~на~~ двузначные числа, кратные 19, и 23 кратные 19: 19, 38, 57, 76, 95. кратные 23: 23, 46, 69, 92. То есть любые две соседние цифры образуют одно из этих 9 чисел (потому что других нет). ~~Заметим, что нет~~ назовём двузначное число "хорошим", если оно одно из 9 выше указанных (кратно 19 или 23). Заметим, что нет хорошего числа, начинающегося на 8 => 8 может быть только последней, если 8 только последняя, то 3 может быть не ранее, чем ~~только~~ 2020-й (предпоследней) => 2 может быть не ранее чем ~~только~~ 3-й сконца (2019-й) потому что если есть 2, то следующая обязательно 3 (других хороших, начинающихся на 2 нет), а после 3 обязательно 8 (аналогично) => 2 не ранее, чем на 2019-й позиции. Итак, первая цифра 1, вторая 9 (других хороших нет), => 3-я "5", т.к. 2-й быть не может ($3 < 2019$) после 5 идёт 7, после 7 идёт 6, после 6 снова 9 и т.д. $1\underbrace{9576}\underbrace{9576}\ldots$ пока 9 стоит не ранее, чем на 2018-й позиции, после неё будет 5. итак, наше число имеет вид $1\underbrace{9576}\ldots\underbrace{9576}_{504\text{ раза}}9\ \_\ \_\ \_$ (2019, 2020, 2021; $504\cdot4+2$-я позиция, 2018-я позиция)

если 2019 "2", то 2020-я 3 и 2021-я 8

если 2019 "5", то 2020-я 7 и 2021-я 6.

P.S. все хорошие числа делятся либо на 19, либо на 23, т.е. ровно на 1 из них

19
23
38
46
57
69
76
92
95

Задача 3 Ответ: 2022

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[9]{1-x^9}} \qquad f(f(x))=\frac{1}{\sqrt[9]{1-(f(x))^9}}=\frac{1}{\sqrt[9]{1-\frac{1}{1-x^9}}}=\sqrt[9]{\frac{1}{\frac{-x^9}{1-x^9}}}=\sqrt[9]{\frac{1-x^9}{-x^9}}$$

$$f(f(f(x)))=\frac{1}{\sqrt[9]{1-(f(f(x)))^9}}=\sqrt[9]{\frac{1}{1-\frac{1-x^9}{-x^9}}}=\sqrt[9]{\frac{1}{\frac{-x^9-1+x^9}{-x^9}}}=\sqrt[9]{\frac{1}{\frac{-1}{-x^9}}}=\sqrt[9]{x^9}=x.$$

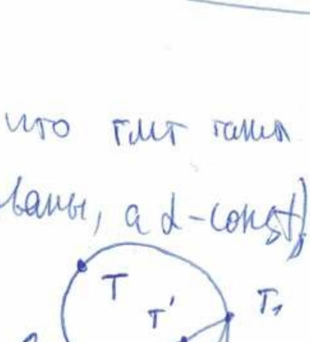
т.е. $f(f(f(x)))=x$. т.е. если применить к числу a функцию $f(x)$ 3 раза, то получим снова это число. применим f к 2022 435 раз по 3 раза (то есть 435 · 3 раза = 1305 раз), мы снова получим 2022. (потому что после 3 раз получим снова 2022, и где это умножить много раз => получ ~~1000~~ 2022)

Задача 7

ответ: $\sqrt{14}$.

Давайте найдём, что за точка N. сначала заметим, что ГМТ таких точек T, что $\angle XTY = \alpha$ (где точки X и Y фиксированы, а α - const), это две дуги, построенные на хорде XY

тогда заметим, что если взять точку T' внутри ~~окружности~~ отмеченной области, то угол $\angle XT'Y > \angle XTY$.



Докажем. если $T' \in$ отрезку XY, то угол $180° > XTY$.

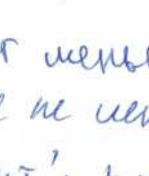
если $T' \notin XY$, то без ограничения общности считаем, что выше прямой XY. продлим XT' до пересечения с дугой — T_1. тогда $\angle XT'Y = \angle T'YT_1 + \angle T'T_1Y$ т.е. $\angle XT'Y > \angle T'T_1Y = \angle XT_1Y = \angle XTY$. доказано.

аналогично, если взять T' вне области, то угол будет меньше

если $T' \in$ прямой XY, то $\angle XT'Y = 0° < \angle XTY$, если же не лежит, то пусть не выше прямой XY. проведём отрезки XT' и YT'

тогда заметим, что какая-то часть дуги (которая выше XY) окажется внутри $\triangle XT'Y$. возьмём $T_1 \in$ этому куску:

пусть $T'T_1$ пересечет XY в т. Q. тогда $\angle XT'Y =$



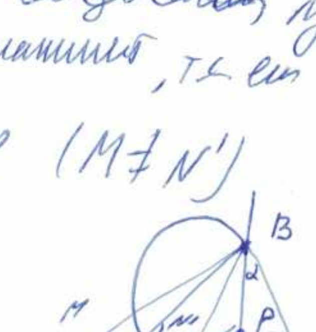
$= \angle XT'T_1 + \angle YT'T_1 < \angle XT_1Q + \angle YT_1Q = \angle XT_1Y$.

т.е. $\angle XT'Y < \angle XT_1Y = \angle XTY$. доказан. вернёмся к задаче.

найдём окружность, которая проходит через точки B, P и касается прямой AC. (таких окружностей две, возьмём то, что лежит в одной полуплоскости с точкой A. ~~Всех точек~~ пусть точка касания - N'. докажем, что $\angle BN'P$ - максимален, т.е. если возьмём т. M на луче FA, то $\angle BN'P > \angle BMP$ $(M \neq N')$

~~возьмём проведём окружность через~~ - заметим, что ~~прямая AC лежит вне~~ луч FA лежит вне отмеченной области ~~(между BN' и хордой BA)~~

(области, ограниченной хордой PB и дугой BN'P) поэтому



$M \in FA$ лежит вне этой области (и в той же полуплоскости) $\Rightarrow$

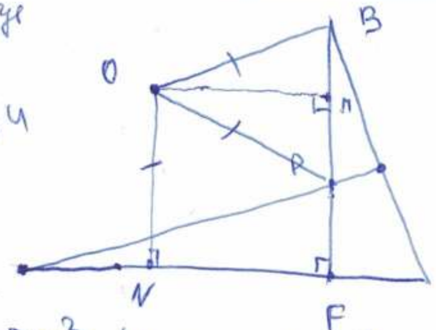
$\Rightarrow \angle BMP > \angle BN'P$ $\angle BMP < \angle BN'P = BN'P \Rightarrow$ угол $BN'P$ - максимален. $N' = N$. найдём FN. пусть $\angle FAP = \alpha$. $AF = 7$. $FC = 2$.

$FP = AF \cdot tg\alpha = 7tg\alpha$. $\angle FAP = \angle FBC$ (дополняют угол C до 90°) $\Rightarrow$

$\Rightarrow BF = FC \cdot ctg\alpha = 2ctg\alpha$. $\Rightarrow BP = 2ctg\alpha - 7tg\alpha$.

Задача 7 (продолжение) | Чистовик 3

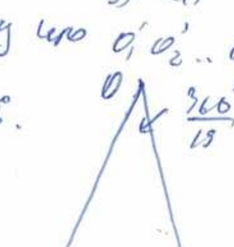
Пусть O - центр окружности, описанной около BPN, тогда ON = OP = OB. ~~...~~ M - середина BP. Заметим, что $\angle ONF = 90^\circ = \angle OMP = \angle BFN \Rightarrow$ OMFN - прямоугольник, и ~~...~~ $MF = ON = OB = OP$. $MF = BF - BM = BF - BP/2 =$
$= 2\operatorname{ctg}\alpha - (2\operatorname{ctg}\alpha - 7\operatorname{tg}\alpha)\frac{1}{2} = \operatorname{ctg}\alpha + 3{,}5\operatorname{tg}\alpha = ON = OP$.



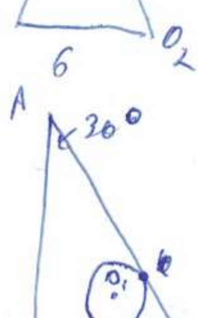
$MP = \frac{PB}{2} = \frac{2\operatorname{ctg}\alpha - 7\operatorname{tg}\alpha}{2} = \operatorname{ctg}\alpha - 3{,}5\operatorname{tg}\alpha$. $FN^2 = OM^2 = OP^2 - PM^2 = (\operatorname{ctg}\alpha + 3{,}5\operatorname{tg}\alpha)^2 - (\operatorname{ctg}\alpha - 3{,}5\operatorname{tg}\alpha)^2 = (\operatorname{ctg}\alpha + 3{,}5\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha - 3{,}5\operatorname{tg}\alpha)(\operatorname{ctg}\alpha + 3{,}5\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha + 3{,}5\operatorname{tg}\alpha) =$
$= 2\operatorname{ctg}\alpha \cdot 7\operatorname{tg}\alpha = 14. \Rightarrow FN = \sqrt{14}$. Заметим, что $\sqrt{14} < 7 \Rightarrow N \in$ отрезку AF, т.е. $N \in$ отр AC.

Задача 4 Ответ: $3(\sqrt{3} + \frac{1}{\sin\frac{180^\circ}{19}})$
19 шариков

Сперва спроецируем ~~всё на плоск~~ на плоскость основания. ~~О~~ Нетрудно доказать, что при повороте всех шаров на угол ~~...~~ $\frac{360^\circ}{19}$ шарики переходят друг в друга (каждый в своего соседа) $\Rightarrow$ их центры образуют правильный 19-угольник, со стороной 6 (т.к. шары касаются, расстояние между центрами - сумме радиусов). Пусть центры шариков $O_1\ O_2 \dots O_{19}$ (по обходу по часовой). O - ~~основание~~ центр основания конуса. O_1' и O_2' - проекции O_1 и O_2 на плоскость основания. Шара переходят в круги сразу, и они проекции касаются друг друга. $\Rightarrow O_1O_2 = O_1'O_2' = 6$. Заметим, что $OO_i = OO_j$ $(i,j \in \{1 \dots 19\})$ т.е. $OO_1 = OO_2$, ∠O, аналогично $OO_1' = OO_2' \Rightarrow \angle O_1'OO_2' = \frac{360^\circ}{19}$ (потому что $O_1'O_2' \dots O_{19}'$ тоже образуют правильный 19-угольник со стороной 6. $\Rightarrow OO_1' = 3/\sin\frac{180^\circ}{19}$.



A - вершина конуса, а AB - образующая, которая касается шар с центром O_1. Спроецируем шар 1 на плоскость OAB. $\angle OAB = 30^\circ = \frac{60^\circ}{2}$. ~~...~~
угол $\angle OBO_1 = \angle OBA/2 = 30^\circ$ (т.к. шар касался образующей, а при проекции эта образующая осталась собой, перешёл в круг, который тоже касается AB) $\Rightarrow$ ~~...~~ $BO_1' = O_1O_1' \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ = 3 \cdot \sqrt{3}$.
OB = радиус основания = $3\sqrt{3} + \frac{3}{\sin\frac{180^\circ}{19}}$



~~N~~ N1 Чистовик 4

$4-2\sqrt{3}=(\sqrt{3}-1)^2 \Rightarrow \sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}=\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}$ $(\sqrt{3}>1)$

$B=\frac{\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}}{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{\frac{2}{2}}=1.$

~~пусть~~ пусть $A_n=\sum_{i=2}^{n}\frac{2i-1}{i^2(i-1)^2}$. докажем, что $A_n=1-\frac{1}{n^2}$. по индукции. база $n=2$. $\sum_{i=2}^{2}\frac{2\cdot2-1}{2^2\cdot1}=\frac{3}{4}=1-\frac{1}{2^2}$ ✓

переход: пусть $A_k=1-\frac{1}{k^2}$ докажем что $A_{k+1}=1-\frac{1}{(k+1)^2}$. $A_{k+1}=A_k+\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}=1-\frac{1}{k^2}+\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}=1-\left(\frac{(k+1)^2-2k-1}{k^2(k+1)^2}\right)=$

$=1-\frac{k^2}{k^2(k+1)^2}=1-\frac{1}{(k+1)^2}=A_{k+1}$. доказали. заметим, что $A=A_{45}=1-\frac{1}{45^2}<1$.

а $B=1 \Rightarrow A<B$

N5. Заметим, что условие, что среднее из чисел a, b, c положительно равносильно условию, что хотя бы два из чисел $a, b, c>0$.

(~~или~~ ~~менее~~ двух, то ~~среднее~~ (если хотя бы 2 ≤ 0, то среднее ≤ 0, а если хотя двух >0, то среднее ≤ 0, ~~...~~ т.к. если $0<x_2\leq x_3$, то x_2 и x_3 положительны)

$a=t^3-121t>0$. $t\in(-11;0)\cup(11;+\infty)$

$b=2^t-32$ $t\leq 5 \Rightarrow 2^t\leq 32 \Rightarrow t\in(5;+\infty)$

$c=\sin t-\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin t-\sin\frac{\pi}{3} \Rightarrow t\in\left(\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right)+2\pi k$.

Если $t>11$, то a и $b>0 \Rightarrow t>11$ подходит.

найдем, какие из чисел вида $\frac{\pi}{3}+2\pi k$ лежат в промежутке от -11 до 0.

$-11<\frac{\pi}{3}+2\pi k<0$. если $k\leq-2$, то $\frac{\pi}{3}+2\pi k\leq-4\pi+\frac{\pi}{3}\leq-3\pi-\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$.

$3\pi>9$, а $\frac{2\pi}{3}>2 \Rightarrow -3\pi-\frac{2\pi}{3}<-9-2=-11$. $\Rightarrow k\leq-2$ не подходит.

$k=-1$, $\frac{\pi}{3}-2\pi$ это меньше 0 и больше -11 - подходит. $k\geq0 \Rightarrow \frac{\pi}{3}+2\pi k\geq\frac{\pi}{3}>0 \Rightarrow$ только $k=-1$.

какие числа вида $\frac{2\pi}{3}+2\pi k_1$ лежат в промежутке от -11 до 0? $-11<\frac{2\pi}{3}+2\pi k_1<0$.

если $k_1\leq-3$, $\frac{2\pi}{3}+2\pi k\leq\frac{2\pi}{3}-6\pi$ ~~...~~ $<-5\pi<-11$.

если $k_1=-2$, то $\frac{2\pi}{3}-4\pi>-11$, т.к. $4\pi<13$ $(\pi<3{,}25)$, а $\frac{2\pi}{3}>2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{2\pi}{3}-4\pi>2-13=-11$. если $k=-1$ то $2\pi/3-2\pi k\in(-11;0)$ т.к. $-11<-3\pi<\frac{2\pi}{3}-2\pi<0$

Чистовик 5

№5 продолжение

если $k_1 \geq 0$ то $\frac{2\pi}{3}+2\pi k_1 \geq \frac{2\pi}{3} > 0$. $\Rightarrow$ $k_1=-1$ и $k_1=-2$ подходят.

если $t \in \left(-11; \frac{2\pi}{3}-4\pi\right) \cup \left(\frac{\pi}{3}-2\pi; \frac{2\pi}{3}-2\pi\right)$

то a и c положительны.

$\frac{2\pi}{3}-4\pi$ $\frac{2\pi}{3}-4\pi$ -11 $2a$ $\frac{\pi}{3}+2\pi$ $\frac{2\pi}{3}-2\pi$ 0

если ~~t~~ $t \leq -11$ то a и b отрицательны $\Rightarrow$ $t \leq -11$ не подходит.

если $t \in \left[\frac{2\pi}{3}-4\pi; \frac{\pi}{3}-2\pi\right]$ ~~и~~ $\cup \left[\frac{2\pi}{3}-2\pi; 0\right]$ то b и c ~~отрицательны~~ не положительны,

если $t \in [0; 5]$ то a и b отрицательны. ~~осталось~~

посмотрим, какие числа вида $\frac{\pi}{3}+2\pi m$ и $\frac{2\pi}{3}+2\pi m$, есть в промежутке $(5; 11)$

если $m < 1$ то $\frac{\pi}{3}+2\pi m$ и $\frac{2\pi}{3}+2\pi m$ не больше чем $\pi < 5$.

если $m \geq 2$ то $\frac{\pi}{3}+2\pi m > 12$, $\frac{2\pi}{3}+2\pi m > 12$, они больше $11 < 12$.

если $m=1$, то ~~$\frac{\pi}{3}+2\pi m$~~ $\frac{3}{3}+2\cdot 3 < \frac{\pi}{3}+2\pi < \frac{4}{3}+8$ т.е. $7 < \frac{\pi}{3}+2\pi < 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\pi}{3}+2\pi \in (5; 11)$, ~~$\frac{2\pi}{3}+2\pi$~~ $\frac{3\cdot 2}{3}+2\cdot 3 < \frac{2\pi}{3}+2\pi < \frac{8}{3}+8$

$8 < \frac{2\pi}{3}+2\pi < \frac{9}{3}+8 = 11 \Rightarrow \frac{2\pi}{3}+2\pi \in (5; 11)$,

$t \in \left(\frac{\pi}{3}+2\pi; \frac{2\pi}{3}+2\pi\right)$ то b и $c > 0$.

5 $\frac{\pi}{3}+2\pi$ $\frac{2\pi}{3}+2\pi$ 11

если $t \in \left[5; \frac{2\pi}{3}+2\pi\right) \cup \left(\frac{2\pi}{3}+2\pi; 11\right]$ то a и c ~~отрицат~~ не положительны

Итого, подходят только следующие промежутки.

$t \in \left(-11; \frac{2\pi}{3}-4\pi\right) \cup \left(\frac{\pi}{3}-2\pi; \frac{2\pi}{3}-2\pi\right) \cup \left(\frac{\pi}{3}+2\pi; \frac{2\pi}{3}+2\pi\right) \cup (11; +\infty)$

а если нет.

№6. ~~Заметим, что при~~ если $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ то $\operatorname{tg} x \in (-\infty; +\infty)$.

$\operatorname{tg} x = y$. $ay^3 + y^2(1-a-2a^2) + y(2a^2-2a-1) + 2a = 0$. $y=1$ – корень

подставим $a + (1-a-2a^2) + (2a^2-2a-1) + 2a = 0$ (правда). Вынесем $y-1$ за

скобки $(y-1)(ay^2+y(1-2a^2)-2a) = 0$ решим это кв. уравн. (которое пол

$y_{1,2} = \frac{2a^2-1 \pm \sqrt{4a^4-4a^2+1+4\cdot 2a\cdot a}}{2a} = \frac{2a^2-1 \pm (2a^2+1)}{2a}$. $y_1 = 2a$; $y_2 = -\frac{1}{2a}$, т.е.

$(4a^4-4a^2+1+8a^2 = 4a^4+4a^2+1 = (2a^2+1)^2)$ корни вместе дают ~~пр~~. -1.

№6 продолжение   Чистовик 6

Итак, у нас 3 корня $2a$; 1, $-\frac{1}{2a}$. ~~допустим, что $2a = b$, $-\frac{1}{2a} = -\frac{1}{b}$~~

пусть b - положительное из них $2a$ и $-\frac{1}{2a}$, тогда другой $-\frac{1}{b}$.

~~если $b>1$, нужно доказать что $b-(-\frac{1}{b})>2$ т.к. $b+\frac{1}{b}>2$. т.к. $b>0$ $b+\frac{1}{b}\geq 2\sqrt{b\cdot\frac{1}{b}}=2$, а равен тогда при $b=\frac{1}{b}$, т.е. $b>1$, то $b\neq\frac{1}{b}$ => $b-(-\frac{1}{b})>2$. то есть разница между наибольшим и наименьшим корнем >2 ($b>1>0>-\frac{1}{b}$). если $b<1$ (но $b>0$) то $b-(-\frac{1}{b})=b+\frac{1}{b}$ также ≥ 2, $1-(-\frac{1}{b})>2$ ($b<1$) => разн. мин корня снова >2.~~

пусть $b=\operatorname{tg}\alpha$ ($\alpha\in(0;\frac{\pi}{2})$) тогда $-\frac{1}{b}=\operatorname{ctg}(-\alpha)=\operatorname{tg}(\alpha-\frac{\pi}{2})$

$1=\operatorname{tg}x \Rightarrow x=\frac{\pi}{4}$. итак, у нас корни $\alpha-\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{4}$ и α. разность между α и $\alpha-\frac{\pi}{2}$ $\frac{\pi}{2}$, то есть ~~самое~~ расстояние между какими-то корнями $\frac{\pi}{2}$, а значит и максимальное не меньше $\frac{\pi}{2}$.

т.е. при $a\neq 0$ разность минимальная разница между корнями максимальная - это $\frac{\pi}{2}$ ~~минимум~~, при $a=\frac{1}{2}, b=1, \alpha=\frac{\pi}{4}$) ~~если или $a=0$~~ (это значение достигается при $\alpha\geq\frac{\pi}{4}$, если $\alpha<\frac{\pi}{4}$ то $\frac{\pi}{4}-(\alpha-\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}+(\frac{\pi}{4}-\alpha)>\frac{\pi}{2}$. если $\alpha\geq\frac{\pi}{4}$, то $\frac{\pi}{2}>\alpha\geq\frac{\pi}{4}\geq\alpha-\frac{\pi}{2}$, т.е. $\alpha\in[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2})$

если же $a=0$ то наше уравнение будет иметь вид: $\operatorname{tg}^2x-\operatorname{tg}x=0$

$\operatorname{tg}x(\operatorname{tg}x-1)=0$ $\quad x=\frac{\pi}{4}$ и $x=0$, разность между корн. $\frac{\pi}{4}<\pi/2$

Ответ: при $a=0$, это значение $\frac{\pi}{4}$

Черновик

$\frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \dots + \frac{89}{(44\cdot 45)^2}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{5}{36}$ $\frac{7}{12\cdot 12}$

$19\cdot 23$

19576 9576

1

23	69
46	92

19
38
57
76
95

19
$\boxed{23}$
$\boxed{38}$
46
57
69
76
$\boxed{92}$
95

576
76 9238

$f(x) = \sqrt[9]{\frac{1}{1-x^9}}$ $\cancel{f(f(x)) = \sqrt[9]{\frac{1}{1-\frac{1}{1-x^9}}} = \sqrt[9]{\frac{-x^9}{1-x^9}} = \frac{-x}{\sqrt[9]{\frac{1}{1-x^9}}}}$

$\cancel{f(f(x)) = \sqrt[9]{\frac{1}{1-\frac{-x^9}{1-x^9}}} = \sqrt[9]{\frac{1-x^9+x^9}{1-x^9}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2x^9}{1-x^9}}}}$ $\sqrt{\frac{1-x^9+x^9}{1-x^9}}$ $= \frac{1}{\sqrt[9]{\frac{1}{1-x^9}}}$

$f(x) = \sqrt[9]{\frac{1}{1-x^9}}$ $f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt[9]{1-\frac{1}{1-x^9}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{-x^9}{1-x^9}}}$

$f(f(x)) =$ $\frac{1}{\sqrt{\frac{9}{6}}} = \sqrt{\frac{6}{9}}$

$\frac{1}{\sqrt[9]{1-\frac{1-x^9}{-x^9}}} = \frac{1}{\sqrt[9]{\frac{1}{-x^9}}}$ $\sqrt{\frac{1-x^9}{-x^9}} =$

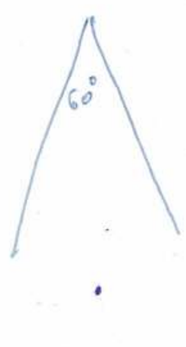
$f(f(x)) = x$

$= x$

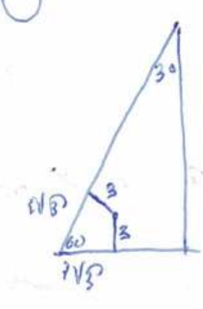
1308 | 13
12 | 436
10
3
16

13 шт

13 уг $60°$



2020
505



ЧЕРНОВИК

$a = t^3 - 121t$ $t(t^2-121)$ $t > 11$ Черновик

$b = 2^t - 32$ $2^t - 32$

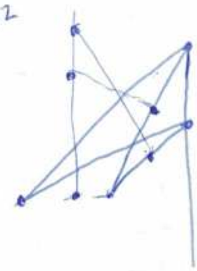
$\sin t - \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\sin t - \frac{\sqrt{3}}{2}$ $t \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right] + 2\pi k$

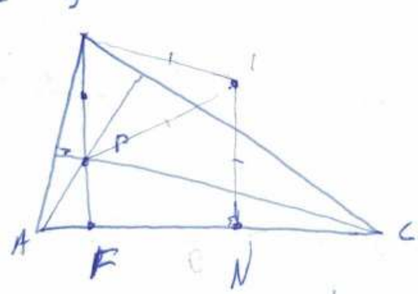
$-11 < \frac{\pi}{3} - 2\pi k < \frac{2\pi}{3} - 2\pi k < 0$

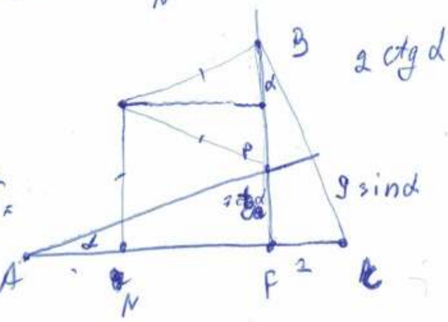
$-33 < \pi - 6\pi k < 2\pi - 6\pi k < 0$

$33 > \pi(6k-1) > \pi(6k-2) > 0$ $k = 1$

$\frac{33}{\pi} < 11 \le 6k-1$ $k \ge 2$







$(1-\sqrt{3})^2 = 1+3-2\sqrt{3}$

$\frac{2ctg\alpha + 7tg\alpha}{2} = r$

$(a+b\sqrt{3})^2 = 4-2\sqrt{3}$

$a+3b$

$(ctg\alpha + 3,5tg)^2 - (ctg\alpha - 3,5tg\alpha)^2 =$

$= 2ctg\alpha \cdot 7tg\alpha = \sqrt{14}$

$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{9}$ $\frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt[3]{(\sqrt{3}-1)}\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = 1$

$\frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \frac{7}{144}$ 16 $\frac{1}{1} - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} - \frac{5}{4 \cdot 9} = \frac{9-5}{}$

$\frac{\pi}{3} \approx 1,05$ $3,14 + 2,10$ $\frac{\pi}{3}$ 4π.

$\frac{2\pi}{3} \approx 2,10$

2 1+6 2+6

$ay^3 + (1-a-2a^2)y^2 + (2a^2-2a-1)y + 2a = 0$

$y = 1$ $a + 1 - a - 2a^2 + 2a^2 - 2a - 1 + 2a$

$= 0$.