МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Гонимар Алексей Владимирович**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **95**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	15	5	15	15

Чистовик 1 | №1: $B=\frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}=$

$=\frac{\sqrt[6]{(\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}+1}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{(\sqrt{3})^2-1}}{\sqrt[3]{2}}=>$

$=>\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}=1=>B=1$; Пусть $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{k^2\cdot(k+1)^2}$; тогда

$A=S_{49}$. Предположим, что $S_n=\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}$. Докажем по индукции: база: $n=1$. $\frac{2\cdot1+1}{1^2\cdot2^2}=\frac{3}{4}=\frac{2^2-1}{2^2}$.

пусть $S_t=\frac{(t+1)^2-1}{(t+1)^2}$. $S_{t+1}=S_t+\frac{2(t+1)+1}{(t+1)^2(t+2)^2}$. Пусть $x=t+1$:

$S_{t+1}=S_x=\frac{x^2-1}{x^2}+\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}=\frac{2x+1+(x^2-1)(x+1)^2}{x^2(x+1)^2}=\frac{x^4+2x^3}{x^2(x+1)^2}=$

$=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^2-1}{(x+1)^2}=\frac{(t+2)^2-1}{(t+2)^2}$. Утв. доказано: $A=$

$=S_{49}=\frac{51^2-1}{51^2}<1=B$.

Ответ: B

Чистовик 2

№2

~~Первая цифр~~ Перечислим все числа до 100, кр 19 и 23.

кр 19: 19, 38, 57, 76, 95;

кр 23: 23, 46, 69, 92

Пользуясь этим, выпишем первые цифры числа

1 9 5 7 6 9 ... , или

1 9 2 3 8

Т.к двузначн. число, нач на 8, не дел ни на 19, ни на 23, то второе число продолжить не выйдет =>

ед вариант — первый (периодический)

Рассмотрим последний период числа - только в нём после 9 может идти 2 (если раньше появилось 92, то числу не хватит длины)

На позиции $2+4x$ всегда стоит девятка. наиб.

x: $2+4x \leq 2021 \Rightarrow 4x \leq 2019 \Rightarrow x \leq 504$

$2+4x = 2018 \Rightarrow$ число заканчивается на $9***$.

Это может быть или 9576, или 9238 =>

Ответ: 6 или 8.

Чистовик 3 | №3 |

Пусть $f(f(\dots f(x)\dots))$, где f прим. n раз, обозначается как $f_n(x)$

$$f_1(x)=f(x);\ f_2(x)=f(f_1(x))=f(f(x))=\frac{1}{\sqrt[5]{1-f(x)}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt[5]{1-\frac{1}{1-x^5}}}=\frac{1}{\sqrt[5]{\frac{1-x^5-1}{1-x^5}}}=-\frac{\sqrt[5]{1-x^5}}{x}$$

$$f_3(x)=f(f_2(x))=\frac{1}{\sqrt[5]{1-f_2^5(x)}}=\frac{1}{\sqrt[5]{1+\frac{1-x^5}{x^5}}}=\frac{1}{\sqrt[5]{\frac{x^5+1-x^5}{x^5}}}=$$

$=x$. Аналогично, $f_4(x)=f_1(x)$, $f_5(x)=f_2(x)$, $f_6(x)=f_3(x)$ и $f_{3k+t}(x)=f_t(x)$ для любых k,t.

$1303=432\cdot3+1 \Rightarrow f_{1303}(x)=f_1(x)\Rightarrow$

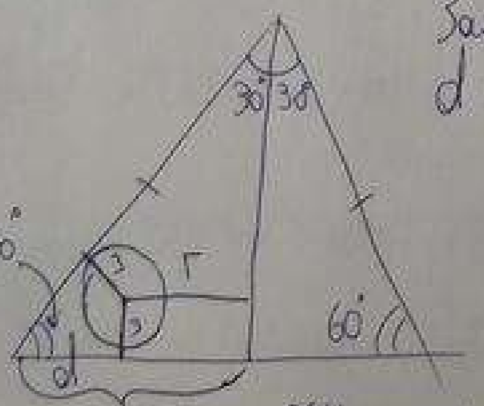
Ответ $f_{1303}(2022)=\frac{1}{\sqrt[5]{1-2022^5}}$

Чистовик 4 | №4

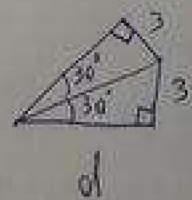
19 шаров радиуса 3 вписаны в конус ук. способом $\Rightarrow$ их центры лежат на нек. окружности (в силу симметрии ~~конус~~ высота конуса проходит через центр его основания). Пусть её радиус r. Тогда в окр. радиуса r вписан правильный 19-угольник со стороной, равной удвоенному радиусу шара $\Rightarrow$ сторона равна 6. Центральный угол, опир на сторону, равен $\frac{360^\circ}{19} = \alpha$, а по формуле длины хорды $a = 2r \sin\frac{\alpha}{2}$ (a – длина хорды, r – радиус окр, α – центр. угол, опир. на хорду) Подставим числа из задачи:

$$6 = 2r \cdot \sin\frac{180^\circ}{19} \Rightarrow 3 = r\sin\frac{180^\circ}{19} \Rightarrow r = \frac{3}{\sin\frac{180^\circ}{19}}.$$

Теперь рассмотрим осевое сечение конуса, прох. через центр одного из шаров:



Заметим, что $R = r + d \Rightarrow$ ост. найти d



$$d = \frac{3}{tg\,30^\circ} = 3\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$R = 3\sqrt{3} + \frac{3}{\sin\frac{180^\circ}{19}}$$

Ответ: $R = 3\left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sin(180^\circ/19)}\right)$.

Чистовик 5 | №5 | Если хотя бы 2 числа из 3 полож., то среднее — тоже. Если нет 2 пол. чисел, то их среднее — отриц. (расп. в порядке возр. $x \le y \le z$. если $y > 0$, то $z > 0$ и есть 2 пол.; если нет двух пол., то $x \le y \le 0$ и среднее не больше нуля).

Перепишем условие: найти все t, при которых хотя бы 2 числа среди $a = t^3 - 144t$, $b = 2^t - 256$, $c = \sin t - \frac{\sqrt{3}}{2}$ больше нуля. Решим нер-ва:

$a > 0 \Rightarrow t^2(t-144) > 0 \Rightarrow t > 144$

$b > 0 \Rightarrow 2^t - 2^8 > 0 \Rightarrow t > 8.$

$c > 0 \Rightarrow \sin t > \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow t \in \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \cancel{\frac{5\pi}{6}}\ \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$

Если $t \le 8$, то a и $b \le 0 \Rightarrow$ не подх.

Если $t > 144$, то $a > 0$ и $b > 0 \Rightarrow$ любые $t > 144$ подх.

Пусть $t \in (8; 144]$. Тогда ~~подх.~~ подх. только $t \in \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \cancel{\frac{5\pi}{6}}\ \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right)$ для некоторого n.

$\cancel{\frac{\pi}{3} + 2\pi n > 8 : \pi \cdot 2n + \frac{1}{3} > \frac{8}{\pi}, n > \left(\frac{8}{\pi} - \frac{1}{3}\right)/2}$

~~миним. целое n: 2~~

$\frac{\pi}{3} + 2\pi n > 8$, миним. целое $n = 2$

$\cancel{\frac{5\pi}{6}}\ \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \le 144$, ~~то~~ макс. целое $n = 22$

Если $n = 1$, то $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n > 8 \Rightarrow t \in \left(8; \frac{2\pi}{3} + 2\pi\right)$ подх.

Если $n = 23$, то $\frac{\pi}{3} + 2\pi n > 144 \Rightarrow$ промежуток не уч.

Ответ: $t \in \left(8; \frac{\pi}{3} + 2\pi\right) \cup \bigcup_{k=1}^{22} \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right) \cup (144; +\infty)$

Чистовик 6 | №6 | Пусть $t = ctg\, x$. Тогда

$at^3 + (a^2-a-3)t^2 + (3-3a-a^2)t + 3a = 0$. Пусть $a \neq 0$.

Заметим, что $t = 1$ — корень. Поделив многочлен на $t-1$, получим $(t-1)(at^2+(a^2-3)t-3a) = 0$.

По т. Виета найдём ост. корни: $t = -a$ и $t = \frac{3}{a}$

Получим, что корни: $t=1$, $t=-a$, $t=\frac{3}{a}$. Пусть d — наиб. расстояние между корнями исх. ур-я:

При (1) $a \in (-\infty;-1)$ $-a \geq 1 > \frac{3}{a}$ и $d = \operatorname{arcctg}(\frac{3}{a}) - \operatorname{arcctg}(-a)$

(2) $a \in [-1;0)$ $1 > -a > \frac{3}{a}$ и $d = -\operatorname{arcctg}(1) + \operatorname{arcctg}(\frac{3}{a})$

(3) $a \in (0,3)$ $\frac{3}{a} > 1 > -a$ и $d = \operatorname{arcctg}(-a) - \operatorname{arcctg}(\frac{3}{a})$

(4) $a \in [3;+\infty)$ $1 > \frac{3}{a} > -a$ и $d = \operatorname{arcctg}(-a) - \operatorname{arcctg}(1)$

(2). $\operatorname{arcctg}\frac{3}{a} - \operatorname{arcctg} 1 \to \min \Rightarrow \operatorname{arcctg}\frac{3}{a} \to \min \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{3}{a} \to \max \Rightarrow a \to \min \Rightarrow a = -1$; $d = \operatorname{arcctg}(-3) - \frac{\pi}{4}$

(4): $\operatorname{arcctg}(-a) - \operatorname{arcctg} 1 \to \min \Rightarrow \operatorname{arcctg}(-a) \to \min \Rightarrow$

$-a \to \max \Rightarrow a \to \min \Rightarrow a = 3$, $d = \operatorname{arcctg}(-3) - \frac{\pi}{4}$

Если $a = 0$, то корни уравнения — $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{2} \Rightarrow d = \frac{\pi}{4}$.

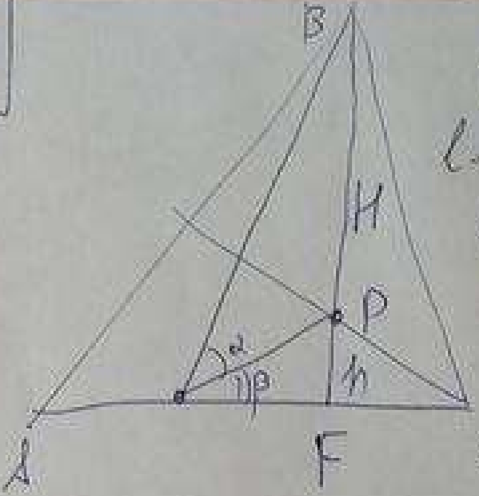
При $a \in (-\infty;-1)$ $d\uparrow$, при $a \in (0;3)$ $d\uparrow \Rightarrow$

$d_{min} = \min(\operatorname{arcctg}(-3) - \frac{\pi}{4}, \pi/4) = \frac{\pi}{4}$ (т.к. $\operatorname{arcctg}(-3) > \frac{\pi}{2}$) и

достигается при $a = 0$.

Ответ: $a = 0$, $d_{min} = \frac{\pi}{4}$

Чистовик №7



Пусть $h = FP$, $H = FB$, $l = FN$. Тогда

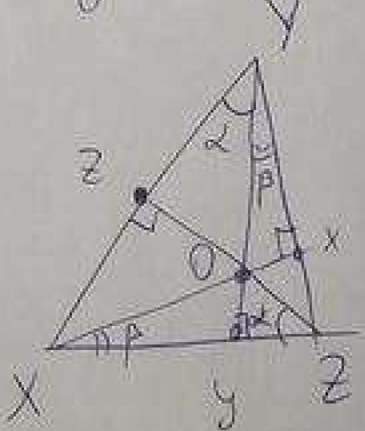
$tg(\alpha+\beta) = \frac{H}{l}$, $tg(\beta) = \frac{h}{l} \Rightarrow$

$$\Rightarrow tg\alpha = \frac{\frac{H}{l} - \frac{h}{l}}{1 + \frac{H\cdot h}{l^2}} = \frac{(H-h)\cdot l}{l^2 + H\cdot h} = f(l)$$

$\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow tg\alpha \uparrow \Rightarrow tg\alpha \to max \Leftrightarrow \alpha \to max$.

$$f'(l) = \frac{(H-h)(H\cdot h - l^2)}{(l^2 + H\cdot h)^2}. \quad f'(l) = 0 \Leftrightarrow l = \sqrt{H\cdot h}.$$

При $l < H\cdot h$ $f\uparrow$, при $l > H\cdot h$ $f\downarrow \Rightarrow$ максимум α дост. при $l = \sqrt{H\cdot h}$. Пусть дан $\triangle XYZ$ и



Xx, Yy, Zz — его высоты, а $\alpha = \angle XYy$ и $\beta = \angle ZYy$. Тогда $\angle zZX = \alpha$ и $\angle xXZ = \beta$, ~~tgα~~ $O = Yy \cap Xx$. Тогда

$$tg\alpha = \frac{Oy}{yZ} = \frac{Xy}{Yy} \Rightarrow Oy \cdot Yy = Xy \cdot yZ.$$

По условию $Xy = 7$, $yZ = 2 \Rightarrow Oy \cdot Yy = h\cdot H = 14 \Rightarrow$ $l = \sqrt{H\cdot h} = \sqrt{14}$. Т.к. $\sqrt{14} > 2$, но $\sqrt{14} < 7$, то $N \in AF$ и $FN = \sqrt{14}$

Ответ: $FN = \sqrt{14}$

Чорновик 1 ~~сили кр 19~~

$1\,\overset{2}{9}\overset{3}{2}\,3\,8\,5\,7\,\overset{9}{6}\,\overset{10}{9}\,2\,3\,8\,5\,7\,6\,9\quad 1\,\boxed{95\,76}$

№ $\boxed{2}$

		цифри	
1	1	5	8
2	9	6	5
3	2	7	7
4	3	8	6

2021 | 7
14 | 288
621
56
61
56

$\boxed{5}$ допишу

85 | 19
76 | 4

1 2 3 4 5
$1\,\boxed{9578}$
6 7 8 9
9 5 7 6

$\boxed{3}$

$f(x)=\frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}$; $f(f(x))=\frac{1}{\sqrt[5]{1-\frac{1}{1-x^5}}}=\frac{1}{\sqrt[5]{\frac{1-x^5-1}{1-x^5}}}=$

$=-\frac{x}{\sqrt[5]{\frac{5\,1-}{1-x^5}}}=-x\cdot f(x)$, $f(f(f(x)))=$

$=\frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5\cdot f(x)^5}}\quad\frac{1}{\sqrt{1+x^5\cdot f(x)^5}}=$

$\frac{1}{\sqrt[5]{1-t^5\cdot f(x)^5}}=\frac{1}{\sqrt[5]{1-\frac{t^5}{1-x^5}}}=\frac{1}{\quad}$

$f(x)=\frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}$, $f(f(x))=\frac{1}{\sqrt[5]{1-\frac{1}{1-x^5}}}=\frac{1}{\sqrt[5]{\frac{1-x^5-1}{1-x^5}}}$

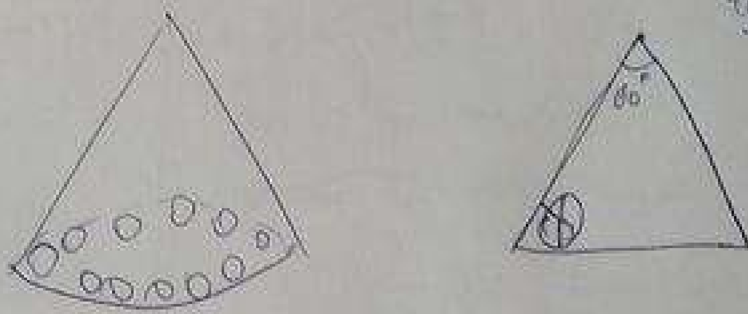
$=-\frac{\sqrt[5]{1-x^5}}{x}$; $f(f(f(x)))=\frac{1}{\sqrt[5]{1+\frac{1-x^5}{x^5}}}=\frac{1}{\sqrt[5]{\frac{x^5+1-x^5}{x^5}}}$

$= x$ залишилось допишу

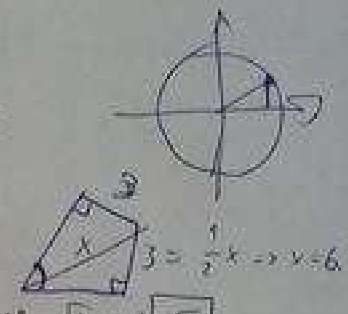
$434\cdot 3+1=1200+90+12\overset{+1}{=}\cancel{1032}+1=1303$ 1302

1303 | 3
12 | 434
103

Черновик 2 $\boxed{4}$



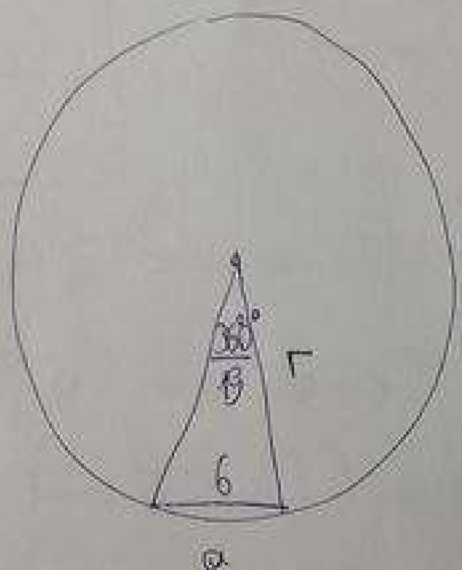
$tg\, 30°$:



$3 = \frac{1}{2}x \Rightarrow x = 6$

$60°$ $\frac{\sqrt{3}}{2} x = \boxed{3\sqrt{3}}$

на окр радиуса $R - 3\sqrt{3}$ расп. 19 шаров радиуса $3 \Rightarrow$
19-угольник со стороной 6



$a = 2r \sin \alpha/2 =$

$= 2r \cdot \sin \frac{180°}{19} \Rightarrow$

$\Rightarrow r = \frac{a}{2 \sin \frac{180}{19}} = \frac{3}{\sin \frac{180}{19}}$

$R = r + 3\sqrt{3} =$

$= 3 \cdot \left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sin 180°/19} \right)$

$\boxed{5}$ $\underset{A}{t^3 - 144t}$, $\underset{B}{2^t - 256}$, $\underset{C}{\sin t - \frac{\sqrt{3}}{2}}$

$t^2(t - 144)$, $2^t - 2^8$, $\sin t = \sin \frac{\pi}{3}$

t огр: $C < A < B$

$\boxed{\text{найти подх. пром.}}$

хотя бы
если 2 из 3х положительны, то ок.

$t^3 - 144t > 0$: $t \in ($ $t^2(t - 144)$

$t > 144$	$A > 0$
$B > 0$:	$t > 8$
$C > 0$	

$\sin t > \frac{\sqrt{3}}{2}$

$t \in \left(\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{6} \right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$

$\begin{array}{r|l} -808 & 314 \\ -628 & 2,22 \\ -420 & \\ 628 & \\ 920 & \end{array}$ $6,28 \cdot$

$\frac{314}{3}$ $2,22 - 0,33 \approx$
$\approx 1,9$

Черновик 3

$3{,}14\cdot 5 = 15{,}9$

$15{,}9 : 6 = 2{,}65$

$144 - 2{,}65 =$

$\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

$\frac{\pi}{3} + \pi n \le 72.$

6

$ctg x = t$: $at^3 + (a^2 - a - 3)t^2 + (3 - 3a - a^2)t + 3a = 0.$

$x \in$ ~~для~~ $(0; \pi)$ ~~$ctg(x)$~~ $ctg(x) \in (-\infty; +\infty).$

$t_{max} - t_{min} \to min$

~~Можно ли 3 од. корня?~~

$a = 1$: $t^3 - 3t^2 - t + 3a = 0$

$t(t^2 - 1) - 3(t^2 - 1) = (t-3)(t-1)(t+1).$

$\boxed{\text{разница 4 есть}}$

$n = 10$: $31{,}4 + 2 \le 72$

$n = 20$: $62{,}8$

$n = 23$: $62{,}8 + 10$

$n = 22$: $62{,}8 + 6{,}28 = 69{,}08.$

$62{,}8 + 9{,}42 = \cancel{72{,}22}$

$a = 0$: $-3t^2 + 3t = 0.$

~~$t = 0$,~~ $t(t-1) = 0$

$\boxed{\text{разница 1}}$

~~$at + (at^2 + 3 - 3a - a^2) + (a^2 - a - 3)t^2 + 3a = 0.$~~

~~$t^2(at + a^2 - a - 3) + (3 - 3a - a^2)t + 3a = 0$~~

~~$at^2\left(t + a - 1 - \frac{3}{a}\right) + t + \frac{3a}{3 - 3a - a^2} = 0$~~

$62,$

$\frac{\pi}{3} + 2\pi n \le 144$:

$2\pi n \le 143$

$\pi n \le 71{,}5.$

~~$t(at^2 + a^2 - a - 3 + 3) + \frac{3a}{3 - 3a - a^2} = 0$~~

$t = 1$: $\cancel{a} + \cancel{a^2} - \cancel{a} - \cancel{3} + \cancel{3} - \cancel{3a} - \cancel{a^2} + \cancel{3a} = 0.$

$t = 1$ всегда корень.

$at^3 + (a^2 - a - 3)t^2 + (3 - 3a - a^2)t + 3a \;|\; t - 1$

$at^3 - at^2 \quad\quad | \; at^2 + (a^2 - 3)t + 6 - 3a$

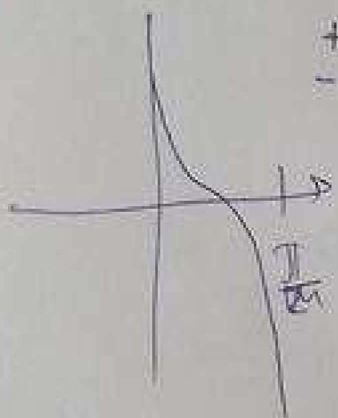
$(a^2 - 3)t^2$

$(a^2 - 3)t^2 - (a^2 - 3)t$

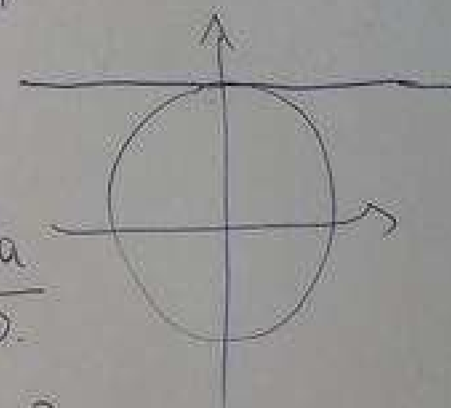
$(6 - 3a)t + 3a$

$(6 - 3a)t -$

Черновик 4 | $\boxed{6}$ $t = 1$ корень



$$\begin{array}{l} +\,at^3 + (a^2-a-3)t^2 + (3-3a-a^2)t + 3a \;\Big|\; t-1 \\ -\,at^3 + at^2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\;\; \overline{at^2+(a^2-3)t-3a} \\ \quad +\,(a^2-3)t^2 + (3-3a-a^2)t \\ \quad -\,(a^2-3)t^2 + (a^2-3)t \\ \qquad\qquad +\,-3at \\ \qquad\qquad\quad 3a - 3a \\ \qquad\qquad\qquad\; 0 \end{array}$$



ок.

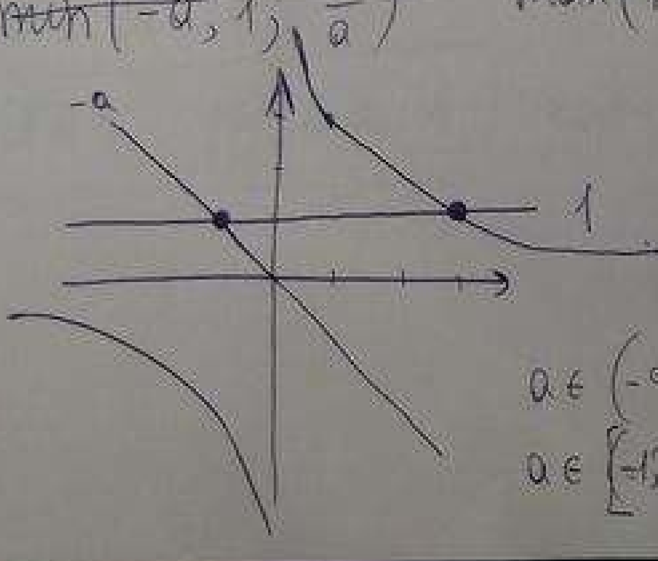
$$\boxed{(t-1)(at^2+(a^2-3)t-3a)} = at^3 + (a^2-3)t^2 - 3at -$$
$$- at^2 - (a^2-3)t + 3a = at^3 + t^2(a^2-a-3) + t(3-3a-a^2) + 3a$$

$\cancel{t_1+t_2 = 3-a^2}$ $\begin{cases} t_1+t_2 = \frac{3}{a} - a \\ t_1 \cdot t_2 = -3 \end{cases} \Rightarrow t_1, t_2 = -a; \frac{3}{a}$

$a^3 + (a^2-3)(-a) - 3a\cancel{t} = 0$

корни: $\boxed{1, -a, \frac{3}{a}}$

$\cancel{\min\left(-a, 1, \frac{3}{a}\right)}$ $\quad \max\left(1; -a; \frac{3}{a}\right) - \min\left(1; -a; \frac{3}{a}\right) \to \min$



$a < 0$: $\min = \frac{3}{a}$

$a < -1$: $\max = -a$

$a \in (-1, 0)$: $\max = 1$

$a \in (-\infty; -1)$: $-a - \frac{3}{a} \to \min$

$a \in [-1; 0)$: $1 - \frac{3}{a} \to \min \Rightarrow \boxed{a = -1}$

$\boxed{\text{Черновик } 5}$ $\boxed{6}$ $a\in(0;3)$: $\max=\frac{3}{a}$, $\min=-a$

$\frac{3}{a}+a\to\min$.

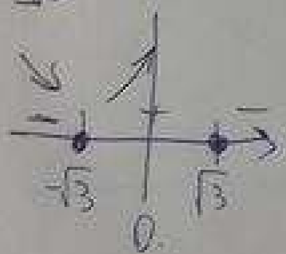
$a\in[3;+\infty)$: $\max=1$, $\min=-a$

$1+a\to\min \Rightarrow \boxed{a=3}$ $\left(\frac{1}{x}\right)'=(x^{-1})'=-x^{-2}$

$f(a)=-a-\frac{3}{a}\to\min$

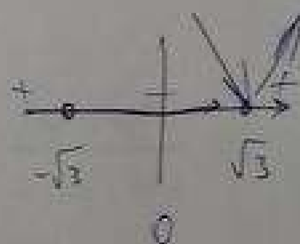
$f'(a)=-1+\frac{3}{a^2}=0\Rightarrow a=\pm\sqrt{3}$

$\cancel{a=-\sqrt{3}}$ $\frac{3-a^2}{a^2}$:



$\boxed{a=-\sqrt{3}}$

$f(a)=\frac{3}{a}+a\to\min$: $f'(a)=1-\frac{3}{a^2}=\frac{a^2-3}{a^2}$



$\boxed{a=\sqrt{3}}$

$a=-1$: $1;\ 1;\ -3$: 4

$a=3$: $1;\ -3;\ 1$: 4

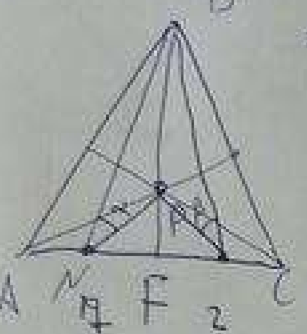
$a=\sqrt{3}$: $1;\ \sqrt{3};\ -\sqrt{3}$; : $2\sqrt{3}$

$a=-\sqrt{3}$: $-\sqrt{3}$

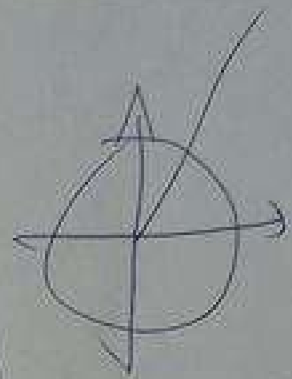
$\boxed{a=0\text{: разница } 1}$ корни: $-3t^2+3t=0$.

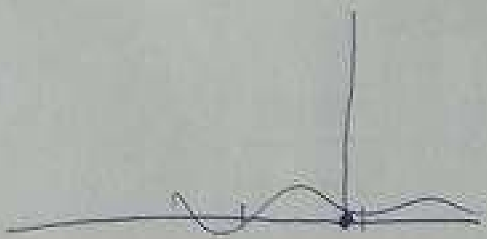
$\boxed{t=0;1.}$

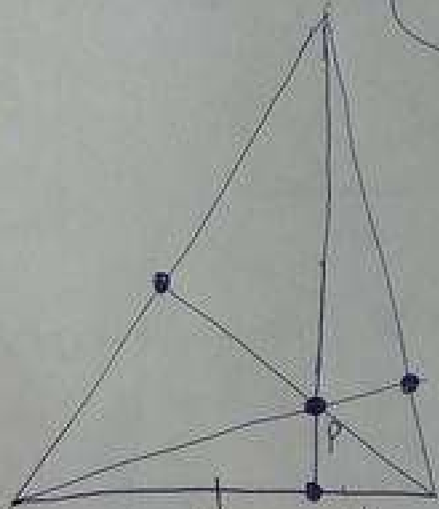
Черновик 6 | 7

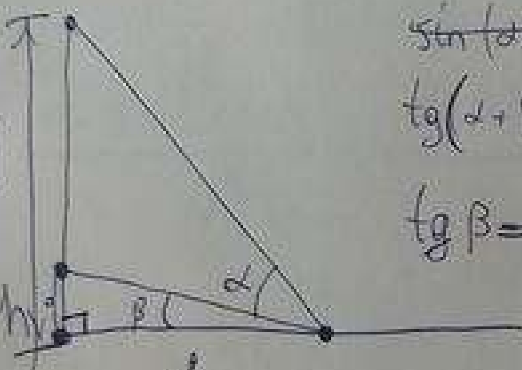


$\alpha \to max$









~~sin(α+β~~

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{\overset{b}{\overset{\parallel}{H}}}{l} = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\, tg\beta}$$

$$tg\beta = \frac{h}{l} = a$$

$$tg\alpha = x: \quad \frac{x+a}{1-ax} = \cancel{m}\, b$$

$$x + a = b - abx$$

$$(ab+1)x = b+a$$

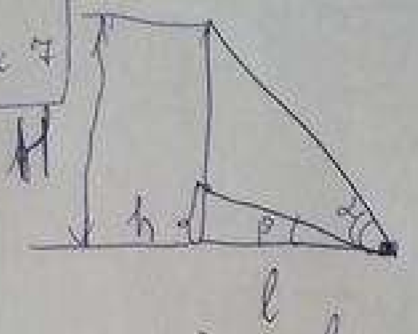
$$x = \frac{b-a}{ab+1} = \frac{\frac{H-h}{l}}{\frac{H\cdot h}{l^2}+1} = \frac{\frac{H-h}{l}}{\frac{l^2+h\cdot H}{l^2}} =$$

$f(l)$
h

$$= \frac{(H-h)\cdot l}{l^2 + h\cdot H} \to \cancel{max} \to max$$

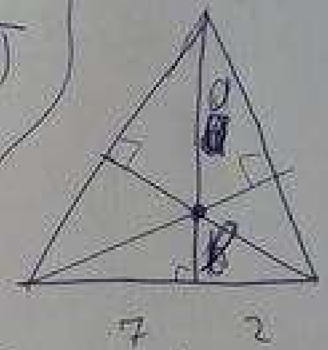
$$f'(l) = \frac{(H-h)(l^2+h\cdot H) - (H-h)\cdot l\cdot 2l}{l^2} = \frac{H-h}{l^2}\,(l^2 - 2l^2$$

Черновик 7



$$tg(\alpha+\beta) = \frac{H}{l}, \quad tg(\beta) = \frac{h}{l}$$

$$b = \frac{tg(\alpha)+tg(\beta)}{1-tg(\alpha)tg(\beta)}$$



ab = const

$$\frac{\sin a\cos b+\cos a\sin b}{\cos a\cos b-\sin a\sin b}$$

$$x = tg\,\alpha: \quad \frac{x+a}{1-xa} = b \Rightarrow x+a = b - xab$$

$$x(1+ab) = b-a$$

$$x = \frac{b-a}{1+ab} \to \max$$

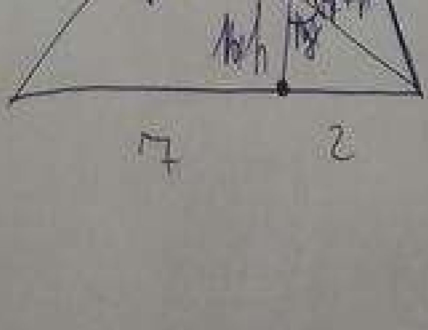
$$x = \frac{\frac{H-h}{l}}{1+\frac{H\cdot h}{l^2}} = \frac{(H-h)\cdot l}{l^2+H\cdot h} = f(l) \to \max$$

$$f'(l) = \frac{(H-h)(l^2+H\cdot h)-(H-h)l\cdot 2l}{(l^2+H\cdot h)^2} =$$

$$= \frac{(H-h)(H\cdot h-l^2)}{(l^2+H\cdot h)^2} = 0 \Rightarrow \boxed{l = \sqrt{H\cdot h}}$$

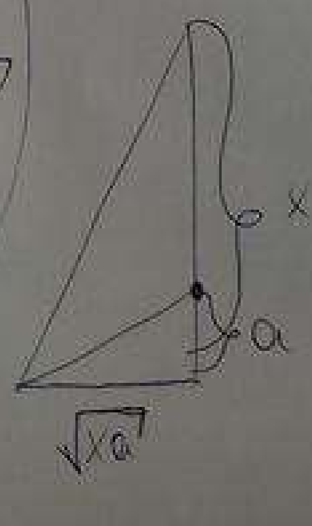
$$tg\,\alpha = \frac{(H-h)}{2}$$

$$tg\,\beta = \sqrt{\frac{h}{H}}$$



$$\sqrt{H^2 - 2\frac{H^2}{4+h^2}}$$

$$\frac{h}{\sqrt{4+h^2}} = \frac{\sqrt{1-\frac{2}{4+h^2}}}{}$$



Черновик 6

$\boxed{1}$ $\dfrac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}$

$$4-2\sqrt{3}=1-2\sqrt{3}+3=(1-\sqrt{3})^2=(\sqrt{3}-1)^2$$

$$\frac{\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}\,\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}=1$$

B = 1 ; ост. A v1.

~~3·4+5~~ $\dfrac{3}{(1\cdot2)^2}+\dfrac{5}{(2\cdot3)^2}=\dfrac{3\cdot3^2+5\cdot1^2}{(1\cdot2\cdot3)^2}=\dfrac{32}{36}=$

$=\dfrac{8}{9}$; $\dfrac{8}{9}+\dfrac{7}{(3\cdot4)^2}=\dfrac{8}{9}+\dfrac{7}{144}=\dfrac{128+7}{144}=\dfrac{135}{144}=$

$=\dfrac{15}{16}$

144/9 = 16
16·8 = 128
135/9 = 15
144/9 = 16

идея: $\dfrac{2n+1}{(n\cdot(n+1))^2}+\dfrac{n^2-1}{n^2}$

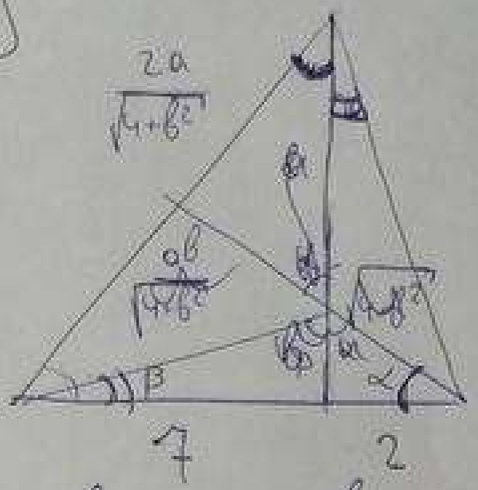
$0+\dfrac{1\cdot2+1}{(1\cdot2)^2}=\dfrac{3}{4}=\dfrac{(1+1)^2-1}{(1+1)^2}$

$\dfrac{2n+1}{n^2\cdot(n+1)^2}+\dfrac{n^2-1}{n^2}=\dfrac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}$?

$$\frac{2n+1+(n^2-1)\cdot(n+1)^2}{n^2(n+1)^2}=\frac{2n+1+(n^2-1)(n^2+2n+1)}{n^2(n+1)^2}=\frac{2n+1+n^4+2n^3+n^2-n^2-2n-1}{n^2(n+1)^2}$$

$=\dfrac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}$ ☒

Черновик 9



$\cancel{tg\alpha = \frac{2}{\sqrt{4+b^2}}}$

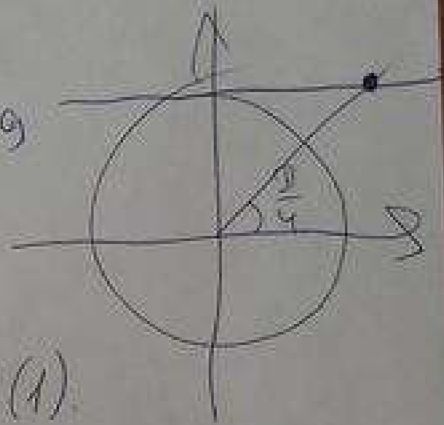
$\cancel{\cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{4+b^2}}}$

$\cancel{tg\alpha \quad \alpha = \arcsin\frac{2}{\sqrt{4+b^2}}}$

$\frac{tg\alpha}{\sin\alpha} = \frac{b}{2},\ tg\beta = \frac{b}{7}$

$\cancel{tg\beta = \frac{7}{H}}$ $\quad tg \quad \frac{b}{7} = \frac{7}{H} \Rightarrow b\cdot H = 49$

$tg\,\alpha = \frac{b}{2} = \frac{7}{H} \Rightarrow h\cdot H = 14$

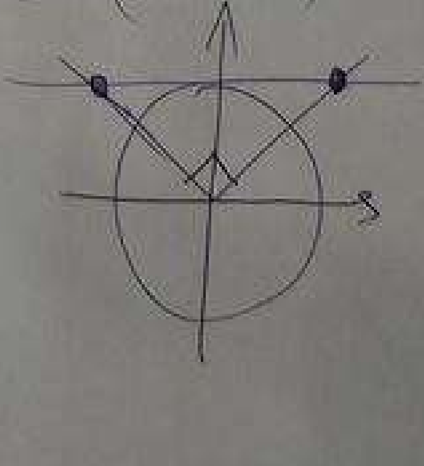


$\cancel{arcctg\left(\frac{3}{a}\right)}$ — $arcctg(-3) - arcctg(1)$

$ctg = 3 \Rightarrow tg = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{3}\cos\alpha$

$\cos^2\alpha + \frac{1}{9}\cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{3}$

$arcctg\left(\frac{3}{a}\right) - arcctg(-a),\ a \in (-\infty, -1)$



$ctg\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) - ctg(\alpha) =$

$ctg(a+b) = \frac{1}{tg(a+\beta)} = \frac{1 - tg a\, tg\beta}{tg a + tg b}$

$ctg\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 - tg\alpha}{1 + tg\alpha} - \frac{1}{tg\alpha}$