МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Гончарова Арина Евгеньевна**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **90**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	15	15	15	0

Задача 2.

Пусть K - загаданное число. $(K = 9\ldots)$

Представим K в виде $K = \overline{a_1 a_2 a_3 \ldots a_{2021} a_{2022}}$

$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2021}, a_{2022}$ - цифры $\Rightarrow a_n$, где $n \in [1, 2022] \in N$, $n \in N$

$a_n \in [0, 9]$).

Т.к. любые две соседние цифры $\vdots 19$ или $\vdots 23$, то можно рассматреть каждые две пары в виде совокупности (т.к. подходят оба варианта)

$$\left[\begin{array}{l} \overline{a_k a_{k+1}} \vdots 19 \\ \overline{a_k a_{k+1}} \vdots 23 \end{array}\right., \text{ где } k \in [1, 2021], k \in N$$

Рассмотрим все такие пары в виде системы, т.к. полученные цифры должны подходить для каждой пары соседних цифр. ⇓

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \overline{a_1 a_2} \vdots 19 \\ \overline{a_1 a_2} \vdots 23 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \overline{a_2 a_3} \vdots 19 \\ \overline{a_2 a_3} \vdots 23 \end{array}\right. \\ \ldots \\ \left[\begin{array}{l} \overline{a_{2021} a_{2022}} \vdots 19 \\ \overline{a_{2021} a_{2022}} \vdots 23 \end{array}\right. \end{cases}$$

⇒ Рассмотрим все двузначные числа (как указано в условии), кратные 19 и 23.

Оба эти числа - простые ⇒ числа, кратные им:

$19: 19, 38, 57, 76, 95$

$23: 23, 46, 69, 92$

Т.к. рассматриваются две соседние цифры + в паре $\overline{a_1 a_2}$ $a_1 = 9$, то можно составить цепочку для двузначных чисел ~~каждой пары соседних цифр~~ из выше написанных чисел, кратных 19 или 23:

Если встречается цифра 9, то можно вычислить последующие цифры:

$$9\ldots$$

$$\begin{array}{ccc} 92 & & 95 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 23 & & 57 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 38 & & 76 \\ & & \downarrow \\ & & 69 \\ & & \downarrow \\ & & 9\ldots \end{array}$$

$\overline{9238\ldots 95769}$

⇒ Если после цифры 9 будет стоять цифра 2, то дальше будет до 4 ~~цифр~~ разрядов после. Если после цифры 9 будет цифра 5, то каждые 4 разряда будут повторяться.

Т.к. в числе 2022 > 4 разрядов, то будет использован только 1 возможный вариант.

последовательности цифр. в числе - 9576.9576...9576

чистовик №1

Т.к. надо найти последнюю цифру:
Рассмотрим два варианта.

1. $\overline{95}$ $\underbrace{\qquad\qquad}_{2022-1=2021 \text{ цифра}}$

2. $\overline{95769}$ $\underbrace{\qquad\qquad}_{2022-5=2017}$ ... и т.д.

повторяется каждые 4 цифры

$2022 = 2020 + 2 = \underbrace{4\cdot 505}_{\text{повтор комбинации цифр } 9576} + 2$

Остается 2 цифры. Т.к. это последняя пара цифр возможны 2 варианта.

$\overline{9576\ 9576 \ldots 95769 \ldots c}$ c - неизвестная цифра

единств. вариант; одна цифра (2022-ая)

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{2021 \text{ цифра}}$

c — 2 или 5 можно поставить любую из 2 цифр, т.к. после нее нет разрядов

Ответ 5 или 2

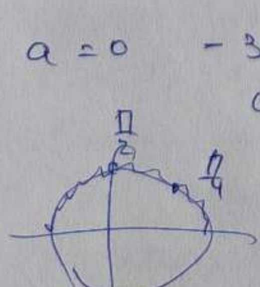
Задача 6.

$a\,ctg^3 x + (a^2 - a - 3)ctg^2 x + (3 - 3a - a^2)ctg x + 3a = 0$

$a\,ctg^3 x + (a^2 - a - 3)ctg^2 x + (3 - 3a - a^2)ctg x + 3a =$
$= a\,ctg^3 x + a^2 ctg^2 x - a\,ctg^2 x - 3ctg^2 x + 3ctg x - 3a\,ctg x -$
$- a^2 ctg x + 3a = a\,ctg^2 x(ctg x - 1) + a^2 ctg x(ctg x - 1) -$
$- 3ctg x(ctg x - 1) - 3a(ctg x - 1) = (ctg x - 1)(a\,ctg x(ctg x + a) -$
$- 3(ctg x - 1)) = (ctg x - 1)(ctg x + a)(a\,ctg x - 3) = 0$

корни уравнения
$\left[\begin{array}{l} ctg x = 1 \\ ctg x = -a \\ ctg x = \frac{3}{a}, \text{ при } a \neq 0 \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ - 1 корень, - 2 корень, - 3 корень.

При $a = 0$ $\quad -3ctg^2 x + 3ctg x = 0$
$ctg x - ctg^2 x = 0, \quad ctg x(1 - ctg x) = 0$
$ctg x = 0, \quad ctg x = 1$



$x = \frac{\pi}{2} \qquad x = \frac{\pi}{4}$

Расстояние $= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

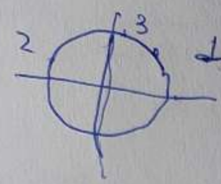
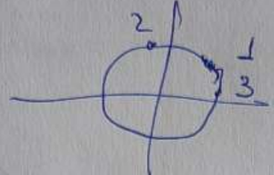
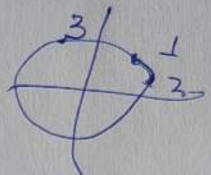
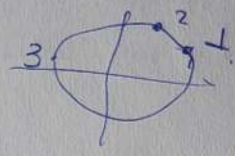
$\frac{\pi}{4} < 1$ чистовик №6-

сет

Рассмотрим другие случаи расположения корней:

1. $a>0$, 2 $a<0$

1. а) $a>3$ 1 б) $a<3$ 2. а) $a>-1$ 2 б) $a<-1$

$\max c = c(1,2) > \frac{\pi}{4}$ $\max c = c(2,3) > \frac{\pi}{4}$ $\max c = c(2,3) > \frac{\pi}{4}$ $\max c = c(1,3) > \frac{\pi}{4}$

т. к.

$\frac{\pi}{4} < 1.$

$\operatorname{ctg} x = -a$, и $\operatorname{ctg} x = \frac{3}{a}$ имеют разные знаки $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ один всегда находится между $\frac{\pi}{2}$ и π, а и расстояние до корня $\operatorname{ctg} x = 1$ $(x = \frac{\pi}{4}) > \frac{\pi}{4}$

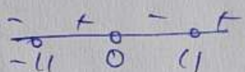
Ответ $a = 0$, расстояние $= \frac{\pi}{4}$.

Задача 5

$a = t^3 - 121t$, $b = 2^t - 32$, $c = \sin t - \frac{\sqrt{3}}{2}$

1) $t^3 - 121t > 0$ -?

$t(t-11)(t+11) > 0$



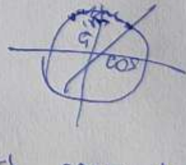
при $t \in (-11;0)\cup(11;\infty)$

2) $2^t - 32 > 0$ -?

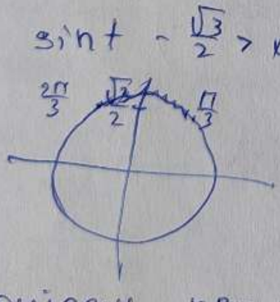
$2^t > 32 = 2^5$

$2 > 1 \Rightarrow t > 5$

при $t \in (5;\infty)$



3). $\sin t - \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$



при $t \in (\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k)$, где $k \in Z$

Найдем промежуток пересечения хотя бы 2 границ. (п.1), п.2), п.3).)

Очевидно, что при $t \in (11;\infty)$ всегда будут ≥ 2 положительных числа $\Rightarrow$ рассмотрим промежуток $(-11;0)$ и $(5;11)$

$(\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \frac{2\pi}{3} + 2\pi k) \in (-11;0)$ и $(5;11)$

$(\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k) \in (-11;0)$ при $k = -1$

$(\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k) \in (5;11)$ при $k = 1$

чистовик №3

Сравним -11 с $\frac{\pi}{3}-4\pi$ и $\frac{2\pi}{3}-4\pi$

$-11 > -\frac{11\pi}{3}$, $\Leftarrow -33 > -11\pi$, $\Leftarrow \pi > 3$

$\underbrace{-11 < -\frac{10\pi}{3} \Leftarrow -33 < -10\pi \Leftarrow -10\cdot 3{,}3 < -10\pi \quad \pi < 3{,}3}$

значит промежуток = $(-11;\ \frac{2\pi}{3}-4\pi)$

$\frac{\pi}{3}-4\pi < -11 < \frac{2\pi}{3}-4\pi$

при $t \in (-11;\ \frac{2\pi}{3}-4\pi)$ ср. число

Ответ $t \in (-11;\ \frac{2\pi}{3}-4\pi) \cup \cancel{(\frac{\pi}{3}+2\pi)}$

$\cup\ (\frac{\pi}{3}+2\pi k;\ \frac{2\pi}{3}+2\pi k),\ k = \pm 1 \cup (11;\ \infty)$

Задача 4.

Соприкасаясь, шарики образуют правильный 8-угольник с углом $= \frac{4}{8}\pi$ и ребром $= 2r = 2\cdot 2 = 4$.

Пусть (•) O - центр

Задача 1.

$$A = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \ldots + \frac{97}{(48\cdot 49)^2} + \frac{99}{(49\cdot 50)^2}$$

$$B = \frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}$$

Для A рассмотрим слагаемые $3 = 1+2 = 1+1+1$

$1\cdot 2 = 1(1+1)$

Заметим, что для всех слагаемых суммы A. каждое из них можно представить в виде

$$\frac{k+(k+1)}{(k(k+1))^2} = \frac{k}{(k(k+1))^2} + \frac{(k+1)}{(k(k+1))^2} = \frac{1}{k(k+1)^2} + \frac{1}{k^2(k+1)} =$$

$$= \frac{1}{k(k+1)}\left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k}\right) = \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{k}\right)^2 - \left(\frac{1}{k+1}\right)^2$$

$$A = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \ldots + \frac{99}{(49\cdot 50)^2} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} -$$

$$- \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} \ldots + \frac{1}{49^2} - \frac{1}{50^2} = 1 - \frac{1}{50^2}$$

$$B = \frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}$$

$4-2\sqrt{3} = 1+3-2\sqrt{3} = (-1+\sqrt{3})^2$

$\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}} = \sqrt[6]{(-1+\sqrt{3})^2} = \cancel{\sqrt[3]{1-\sqrt{3}}}$

$\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{-1+\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{3-1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = 1$$

Сравним $1-\frac{1}{50^2}$ и 1

$0 < \frac{1}{50^2}$

или. $\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}} = \sqrt[6]{(1-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1-\sqrt{3}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow B = \frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{1-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{1+\sqrt{3}}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{1-3}}{\sqrt[3]{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{-2}}{\sqrt[3]{2}} = -1$$

$1-\frac{1}{50^2} > -1$

$2 > \frac{1}{50^2}$

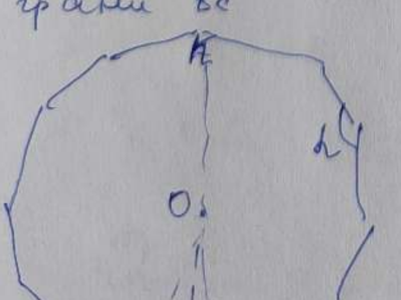
$A = 1-\frac{1}{50^2} < B = 1$

Ответ B

Задача 4.

Соприкасаясь, шарики образуют правильный 13угольник с углом $\cancel{\alpha = \frac{11}{13}\pi}$ $\alpha = \frac{11}{13}\pi$ и ребром $= 2r = 2\cdot 2 = 4$.

Пусть (·)O - центр многоугольника, (·)H - середина грани BC



Т.к. 13 - нечетное число, то против какой-то грани 13-угольника будет находиться вершина этого же 13-угольника.

Пусть (·)K - вершина, противоположная грани BC

(·) - точка

чистовик №5 7

1) ~~АН = АО + ОН~~ $KH = KO + OH = OB + OH$

2). т.к. O - центр 13-угольника $\Rightarrow OB = OC = OA$

3) По признаку равнобедренного треугольника $OB = OC \Rightarrow \triangle OBC$ - равнобедренный $\Rightarrow$ медиана OH - медиана, высота, биссектриса по свойству медианы в равнобедренном треугольнике

$\Downarrow$

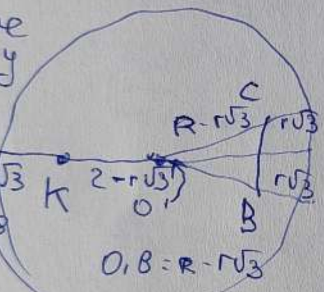
4) $BH = CH = 2$, $\angle HBO = \frac{\alpha}{2} = \frac{11}{13}\pi \cdot \frac{1}{2} = \frac{11}{26}\pi = B$

$\Downarrow$

5) $OB = \frac{HB}{\cos B}$ и $OH = HB \cdot tg\, B$

6). Рассмотрим основание конуса. После перенесения 13 угольника на основание, получится:

сечение сверху

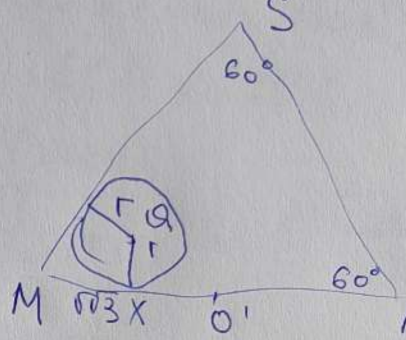


O' - центр основания и сон совпадают с O, т.к. расстояние до всех вершин = $= R - r\sqrt{3}$

$\Downarrow$

$O'H = \sqrt{OC^2 - CH^2} = \sqrt{(R - r\sqrt{3})^2 - r^2}$

$AO' = R - r\sqrt{3}$



сечение сбоку

7) угол при вершине $= 60°$ по условию $\Rightarrow$ $\Rightarrow SMA$ - правильный треугольник.

8) По свойству правильного шестиугольника $\angle M = 60° \left(\frac{180}{3}\right) \Rightarrow \angle QMX = \frac{1}{2} \cdot 60 = 30° \Rightarrow XM = r\sqrt{3}$ — расстояние от (·) касания шарика с поверхностью до границы $= r\sqrt{3}$

$\Downarrow$

9) $O'B = R - r\sqrt{3} = OB = \frac{HB}{\cos B}$ по п. 5 $= \frac{r}{\cos\frac{11\pi}{26}}$

$R = r\sqrt{3} + \frac{r}{\cos(\frac{11\pi}{26})} = 2\sqrt{3} + \frac{2}{\cos(\frac{11\pi}{26})}$

Ответ $R = 2\sqrt{3} + \frac{2}{\cos(\frac{11\pi}{26})}$

Задача 3.

$f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}} = \sqrt[5]{\frac{1}{1-x^5}}$

$f(f(x)) = \sqrt[5]{\frac{1}{1-\frac{1}{1-x^5}}} = \sqrt[5]{\frac{1}{\frac{1-x^5-1}{1-x^5}}} =$

$= \sqrt[5]{\frac{1-x^5}{-x^5}}$

~~f(~~ Рассмотрим теперь $f(f(f(x)))$ =

$f(f(f(x))) = \sqrt[5]{\frac{1}{1-\frac{1-x^5}{-x^5}}} = \sqrt[5]{\frac{1}{1+\frac{1-x^5}{x^5}}} =$

$= \sqrt[5]{\frac{x^5}{1}} = x$

каждое 3 применение получается x

⇓

т.к. функция применяется 1303, $1303 = 1302+1 =$

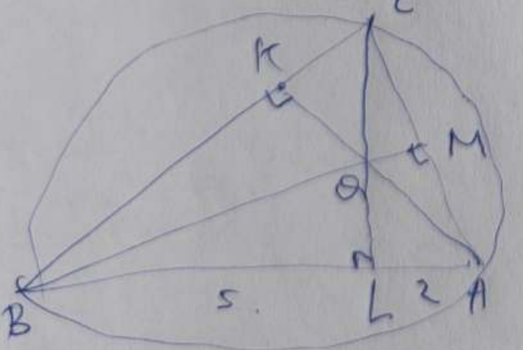
$= \underbrace{434 \cdot 3}_{\text{получается } x} + 1 \Rightarrow f(f(f(f(f(\ldots f(2022)))\ldots)) =$

$= f(2022)$

$f(2022) = \sqrt[5]{\frac{1}{1-2022^5}}$ ~~$= \sqrt[5]{-1+2022^5}$~~

Ответ $\sqrt[5]{\frac{1}{1-2022^5}}$

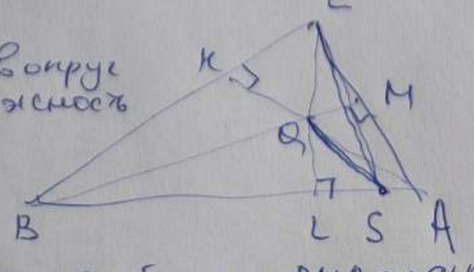
Задача 7



Рассмотрим расположение ~~точки~~ С ($(\cdot)C$)

~~Высота~~ Величина острого угла максимальна, если он максимально приближен к 90°

⇓



1. Опишем вокруг $\triangle CLA$ $\triangle ABC$ окружность

2. Рассмотрим $\triangle CLA$ и $\triangle BMA$

$\angle CLA = \angle BMA = 90°$ по свойству высот, LA - общий $\Rightarrow \triangle BMA \sim \triangle CLA$ по 2 углам (1 признак)

чистовик №7

3. $\triangle BMA \sim \triangle CLA \Rightarrow \frac{LA}{MA} = \frac{CL}{BM} = \frac{AC}{AB} = \frac{2}{MA} = \frac{AC}{2+5} =$
$= \frac{AC}{7}$; $14 = AC \cdot AM = (AM + MC) AM$

Не успела дорешать(

чистовик 8.

$a\,ctg^3x + a^2ctg^2x - a\,ctg^2x - 3ctg^2x + 3ctgx - 3a\,ctgx - a^2ctgx + 3a =$

$a\,ctg^2x(ctgx-1) + a^2ctgx(ctgx-1) -$

$-3ctgx(ctgx-1) - 3a(ctgx-1) =$

$=(ctgx-1)(a\,ctg^2x + a^2ctgx - 3ctgx - 3a) =$

$=(ctgx-1)(a\,ctgx(ctgx+a) - 3(ctgx+a)) =$

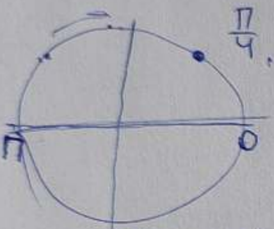
$=(ctgx-1)(ctgx+a)(a\,ctgx-3) = 0$

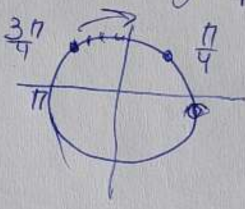
$ctg\,x = 1$ $\quad ctg\,x = -a \quad ctg\,x = \frac{3}{a} \quad a \neq 0$

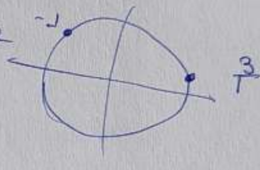
$x = \frac{\pi}{4} + \pi k$

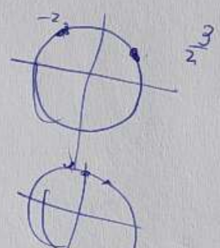
чем больше $-a$, (чем меньше a) тем меньше расстояние от x до $\frac{\pi}{4}$

При $a = 1$.









единственный корень $x = \frac{\pi}{4}$

чем больше a, тем меньше расстояние

$a\,ctg^3x + (a^2-a-3)\,ctg^2x + (3-3a-a^2)\,ctgx + 3a = 0$ наши

$(0; \pi)$

9

95 23

19 46

38 69

57 92

76

95

$-a = \frac{3}{a}$

$a = -1$.

При $a = 0$

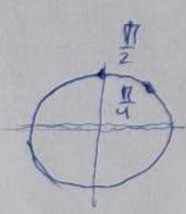
$-3ctg^2x + 3ctgx = 0$

$ctgx - ctg^2x = 0$

$ctgx(1 - ctgx) = 0$

$ctgx = 0 \quad ctgx = 1$.

$x = \frac{\pi}{2} \quad x = \frac{\pi}{4}$



$x = arcctg\left(\frac{3}{a}\right)$

$x = arcctg(-a) = -arcctg\,a$

чего $\frac{4}{505}$

$9 \to 2$.

$9 \to 5$.

до 4 разрядов

5 то каждые.

4 разряда будут повторяться

т.к. число > 4 разр.

будем исп. ед. возм. вар. 9576.

$t^3 - 121t$

$\frac{\pi}{4}$ - расстояние

Черновик 1

$t^3 - 121t \le 2^t - 32 \le \sin t - \frac{\sqrt{3}}{2}$ (макс $= \frac{2-\sqrt{3}}{2}$)

$t(t-11)(t+11) \le 2^t - 2^5$

$t(t-11)(t+11) \ge 0$

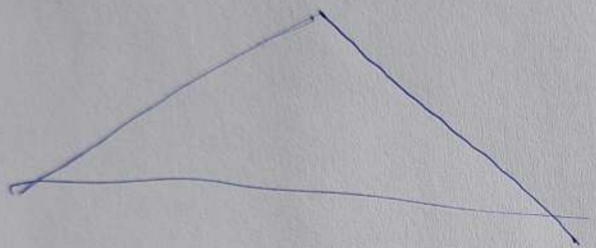
$-11 \quad 0 \quad 11$

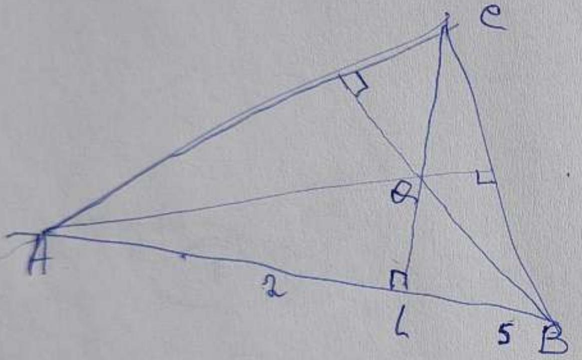
$2^t - 2^5 \ge 0$

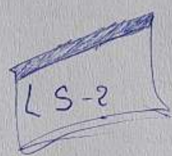
$t \ge 5$

13 шаров

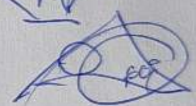
$\frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{4^2(4-2\sqrt{3})} \cdot \sqrt[3]{2\sqrt{3}+1}}{2}$

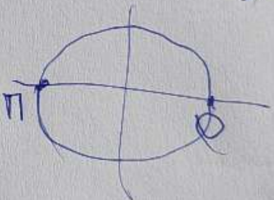






2020





$a\,ctg^3x + (a^2-a-3)\,ctg^2x + ctgx\,(a^2+3a-3)+3a$

$ctg^2x\,($

$\frac{4}{3}\pi$

a^2-a-3

1302 | 3
12 | 434
10
9
12

$1 - x^5 = (1+x)(1$

$x^5 - 1 = (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$

$(1-x)(x^4+x^3+x^2+x+1)$

черновик 2.

$\frac{LA}{MA} = BM$

$\Rightarrow \quad AM$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}$

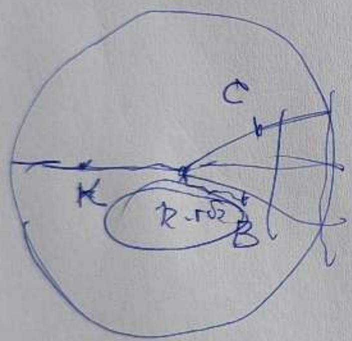
$f(f(x)) = \sqrt[5]{\frac{1}{1-\frac{1}{1-x^5}}} = \sqrt[5]{\frac{1}{\frac{1-x^5}{1-x^5}}} = \sqrt[5]{\frac{1-x^5}{-x^5}}$

$f(f(fx))) = \sqrt[5]{\frac{1}{1-\frac{1-x^5}{-x^5}}} = \sqrt[5]{\frac{1}{1+\frac{1-x^5}{x^5}}} = x$

$3 = \frac{1+(1+1)}{(1(1+1))^2}$

$5 = \frac{2+(2+1)}{(2(2+1))^2}$

$7 = \frac{3+(3+1)}{(3(3+1))^2}$



вик 8.

Черновик 3