МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Городецкий Михаил Андреевич**

Класс: **10 класс**

Технический балл: **50**

Дата проведения: **12 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	10	10	0	15	5	0	10

Чистовик.

Задача № 1.

Решение

1) Пусть необходимо найти число A.

Тогда $A = 22k+2$, где $k \in \mathbb{N}_0$.

$A = 21m + r$, где $m \in \mathbb{N}_0$; $r \in [0; 20]$

$A = 20n + r - 1$, где $n \in \mathbb{N}_0$.

$A = 21m + r = 20m + m + r \equiv m + r \equiv r - 1 \pmod{20}$.

Тогда $(m \equiv -1 \pmod{20},\ m \in \mathbb{N}_0) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Наименьшее возможное m: 19.

2) Если $m = 19$, то.

$21m = 399$.

$21m \leq A \leq 21m + 20 = 399 + 20 = 419$

Тогда

$$\begin{array}{r|l} 399 & 22 \\ \hline 22 & 18 \\ 179 & \\ 176 & \\ \hline 3 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 419 & 22 \\ \hline 22 & 19 \\ 199 & \\ 198 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

. Но тогда $22 \cdot 18 + 2 < 399 < 419 < 22 \cdot 19 + 2$.

Значит невозможно подобрать такое r, что $A = 21 \cdot 19 + r$.

3) Следующее возможное $m \to 39$.

Если $m = 39$, то $21m = 21 \cdot 39 = 39 + 780 = 819$.

$$\left(\begin{array}{r|l} 819 & 22 \\ \hline 66 & 37 \\ 159 & \\ 154 & \\ \hline 5 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 839 & 22 \\ \hline 66 & 38 \\ 179 & \\ 176 & \\ \hline 3 & \end{array} \qquad A = 22k + 2. \right) \Rightarrow k = 38.$$

$22 \cdot 38 + 2 = 20 \cdot 38 + 2 \cdot 38 + 2 = 20 \cdot 38 + 78 = 20 \cdot 38 + 3 \cdot 20 + 18 =$

$= 20 \cdot 41 + 18 \equiv 18 \mod 20$.

$18 = 19 - 1$;

$20 \cdot 41 + 18 = 20 \cdot 40 + 38 = 20 \cdot 38 + 38 + 40 = 21 \cdot 38 + 40 = 21 \cdot 39 + 19 \equiv 19 \mod 21$

$\Rightarrow$ Наименьшее число: 838.

Ответ: 838

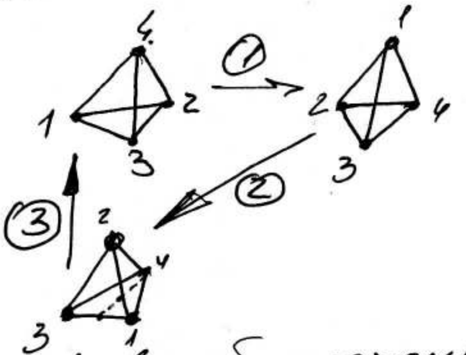
Лист 1.

Чистовик.

Задача №2

Решение.

1) Пусть неподвижная вершина номер 3.
Тогда перекатывать можно только через ребра, вершинами одной из вершин которых является вершина номер 3.



Таких ребер 3. На схеме справа обозначены перекаты пирамиды. Каждая вершина проходит одинаковую траекторию с точностью до сдвига ходов на 1. Тогда можно посчитать только траекторию движения вершины номер 2.

При ① перекатывании вершина номер 2 не двигалась.

При перекатывании номер ②:
Пусть 1 вершина: A; вторая: B; проекция второй B'.
Третья: C; четвертая: D.
M - середина CD. Тогда $AM \perp CD$; $BM \perp CD$.
$\rho(B'; ACD) = B'O$
Пирамида правильная, поэтому $O \in AM$.
$B'O = \sqrt{B'A^2 - (OA)^2}$ (по т. Пифагора в $\triangle AOB'$, т.к $\angle B'OA = 90°$, т.к $B'O \perp OA$, т.к $B'O \perp (ACD)$)
$B'O = \sqrt{6^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{6\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{6^2 - (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{36 - 4 \cdot 3} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}.$
Тогда $tg\angle B'MO = \frac{2\sqrt{6}}{\frac{6\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{2}.$
$BM \perp CD$
$B'M \perp CD$ (по т.т.п) $\Rightarrow \angle BMB'$ - линейный угол двугранного угла $((BCD); CD; (B'CD))$.
$\angle BMB' = arctg(-2\sqrt{2})$.
Тогда длина траектории: $\frac{arctg(-2\sqrt{2})}{360} \cdot 2\pi r = \frac{arctg(-2\sqrt{2})}{360} \cdot 2\pi \cdot \frac{6\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}\, arctg(-2\sqrt{2}) \cdot \pi}{60}$
За перекат 3 вершина 2 перемещается аналогично на $\frac{\sqrt{3}\pi\, arctg(-2\sqrt{2})}{60}$

Лист 2

Значит за 2 цикла перекатов переместится на $\frac{4\sqrt{3}\pi\, arctg(-2\sqrt{2})}{60} = \frac{\sqrt{3}\pi \cdot (arctg(-2\sqrt{2}))}{15}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3} \cdot \pi \cdot arctg(-2\sqrt{2})}{15}$

Чановик.

Задача №3.

Решение

1) $10^{2022} \equiv 0 \pmod{1000}$

2) Пусть $3\cdot 1 \equiv r_1 \mod 1000$.

$3\cdot 2 \equiv r_2 \mod 1000$.

...

$3\cdot 999 \equiv r_{999} \mod 1000$.

а) Пусть $r_i = r_j$, где $i \neq j$.

Тогда $3\cdot i - 3\cdot j \,\vdots\, 1000$; $(3;1000)=1$ $\Rightarrow$ $i-j \,\vdots\, 1000$;

$i \le 999$, $j \le 999$, $i \neq j$ $\Rightarrow$ Такое невозможно. Значит никакие 2 остатка не совпадают.

б)
$$\begin{aligned} &3\cdot 1 \equiv r_1 \\ \times\ &3\cdot 2 \equiv r_2 \\ \times\ &3\cdot 3 \equiv r_3 \\ \times\ &\ldots \equiv \ldots \\ \times\ &3\cdot 999 \equiv r_{999} \end{aligned}$$

Справа 999 различных остатков от 1 до 999 (в каком-то, почти случайном порядке), значит их произведение $= 999!$

$3^{999}(999)! \equiv 999! \Rightarrow 3^{999} \equiv 1 \pmod{1000} \Rightarrow$

$\Rightarrow (3^{999})^2 \equiv 1 \mod 1000$

Тогда $9^{999\cdot 2} \equiv 1 \pmod{1000}$

$9^{1998} \equiv 1 \mod 1000$

3)

степень 9	остаток
1999	9
2000	81
2001	729
2002	561
2003	049
2004	441
2005	969
2006	721
2007	489
2008	401
2009	609
2010	481
2011	329
2012	961
2013	649
2014	841
2015	569

Степень	Остаток
2016	121
2017	89
2018	801
2019	209
2020	881
2021	929
2022	361

Тогда $10^{2022} - 9^{2022} \equiv$

$\equiv 0 - 361 \equiv$

$\equiv 1000 - 361 \equiv 639 \mod 1000$

$729 \times 9 = 6561$; 561×9; 049×9; 441×9; 969×9; 721×9; $489 \times 9 = 401$; $481 \times 9 = 329$

$329 \times 9 = 961$; 961×9; 649×9; 841×9; 569×9; 121×9; $089 \times 9 = 801$; 881×9; $929 \times 9 = 361$

Ответ: 639.

Лист 3

Чистовик.

Задача №5.

$t^3 + 4t^2 + 4t + a = 0.$

x, y, z – корни $\Rightarrow$

$\Rightarrow -xyz = a$

$xy + yz + xz = 4$

$x + y + z = -4.$

Тогда

$A = x^3 - 4y^2 - 4z^2 - 4y - 4z + 32 =$

$= x^3 + (y^2+z^2)(x+y+z) - (y+z)(xy+yz+xz) + 32 =$

$= x^3 + y^3 + z^3 + xy^2 + zy^2 + xz^2 + yz^2 - xy^2 - zy^2 - xz^2 - yz^2 - 2xyz + 32 =$

$= x^3 + y^3 + z^3 + 32 - 2xyz.$

$(x+y+z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(xy^2 + xz^2 + yx^2 + yz^2 + zx^2 + zy^2) + 6(xyz) =$

$= x^3 + y^3 + z^3 + 3((xy+yz+xz)(x+y+z) - 3xyz) + 6xyz =$

$= x^3 + y^3 + z^3 + 3(-4 \cdot 4 - 3xyz) + 6xyz = x^3 + y^3 + z^3 - 48 - 3xyz.$

Тогда $x^3 + y^3 + z^3 = -64 + 48 + 3xyz$, т.е

$x^3 + y^3 + z^3 + 32 - 2xyz = -32 + 48 + xyz = 12 + xyz = 12 - a.$

$(x^2+y^2+z^2)(x+y+z) - (x+y+z)(xy+yz+xz) =$

$= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 16.$

Ответ: $12 - a$

Лист 4

Чистовик.

Задача №7.

Решение

Пакет с пакетами длины n получается из пакетов с пакетами суммарным количеством пакетов n-1.

Тогда: 1: 1

2: 1

3: 2

4: ~~3=2+1=1+1+1~~ 4, т.к $3=2+1=(1+1+1)=3$, $1+1+2$

5: 8, т.к $4=4=3+1+1=2+1+1=2+2=1+1+1+1$, $4+2+1+1+1=9$

6: 19, т.к $5=5=4+1=3+2=3+1+1=2+2+1=2+1+1+1=1+1+1+1+1$, $8+4+2\cdot1+2\cdot1\cdot1+1\cdot1\cdot1+1\cdot1\cdot1\cdot1+1=$ $=19$

7: 47, т.к $7=6=6+1=5+2=4+1+1=3+3=3+2+1=3+1+1+1+\ldots$ $19+8+4+4+2\cdot2+2+2+1+1+1+1=$ $=47$

... Далее аналогично считается для 10 ~~чисел~~ пакетов.

Задача №4.

1) Стратегия для 2го игрока: суммировать числа, диаметрально противоположные тем, которые объединил 1ый игрок при отсутствии возможности выиграть.

2). Второй игрок не проиграет, т.к если до его хода не было выигрышного хода, то после хода не было и не могло получиться, т.к та ситуация, которую он создал симметрична ~~относительно~~ той, которую создал первый, но после хода первого не было выигрышного хода и при этом круг явно не сжался до того момента, что диаметрально противоположная ситуация накладывается.

3. Второй игрок выиграет, т.к первый раз когда число больше 3 появилось на доске произошло после хода 1го, т.к перед этим ходом там не

Чистовик.

Задача 5ч.

выиграли, что этот ход был 1ый,
при этой рядом с ~~2~~ стоит ~~две~~ 1.
Тогда след. ходом второй игрок выиграет.

Ответ: 2ой игрок.

~~Чистовик~~. Черновик.

Задача Б4.

Решение.

1) Докажем, что ~~вы~~ первый игрок ~~всегда~~ выиграет. Пусть он первым ходом объединит две средние единицы, а дальше либо выигрывает, если есть такая возможность, либо ходит симметрично относительно центра.

а) Пусть второй игрок выиграл. Тогда посмотрим на ход до этого. Мы не сделали выигрышный ход значит его не было, т.е он появился после ~~его~~ нашего хода. Игра получается симметричной, поэтому если выигрышный ход не затрагивал центральное число, то в симметричной ситуации относительно центра мы смогли бы выиграть. Если ход затрагивает центральное число, то тогда в любом случае после нашего хода оно становится не меньше $1+2+1=4$. Значит оно не может участвовать в исходном выигрышном ходе 2-ого игрока. Значит 2-ой игрок не мог выиграть

б) Пусть второй игрок свёл игру к ничьей. Тогда итоговое число 2022.

Посмотрим на момент, когда второй игрок впервые получит число, большее 2. Т.к мы делаем ходы, симметричные, то мы не могли за 1-ого игрока получить число, большее 2. раньше.

Тогда в данный момент на доске находятся ~~числа~~ только 1 и 2. Тогда, чтобы получить число, большее 3 необходимо

Черновик.

$a = 22k+2 = 21k+(k+2) \equiv r \pmod{21} = 20k+(2k+2)$

$a = 21m+r \quad 21m+r = 20m+(m+r \equiv r-1) \bmod 20$

$a = 20n+r-1.$

$m \equiv -1 \bmod 20$

$m \geq 19$

$m = 19; \quad a = 21\cdot 19 + r$

$9^{999} \quad 3.$

$3^{999\cdot 2} \equiv 1 \bmod 1000.$

$3\cdot 1 \equiv r_1$, $3\cdot 2 \equiv r_2$, $3\cdot 2 \equiv r_3$, $3\cdot 3 \equiv r_4.$

$3^{\boxed{999}} \quad (3^{999})^2 \equiv 1.$

$9^{999} \equiv 1.$

$399+1=400$

$399 : 22 = 18$; 22; 179; 176; 3

$399+r$

$419 : 22 = 19$; 22; 199; 198; 1

$22\cdot 19+2$

$21\cdot 39$

22

$9^{k-l}-1 \equiv 0 \bmod 1000$

$9^{k-l} \equiv 1 \bmod 1000.$

$9^{l}\cdot(9^{k-l}-1) ⋮ 1000$

39×21: 39, 78, 819

$819 : 22 = 37$; 66; 159; 154; 5

2022

$819+20 : 22 = 38.$

$9^k - 9^l ⋮ 1000$

$22\cdot 38+2 = 838$

$9^k(1-9^{l-k})$

38×22: 76, 76, 836

$1000 \to 9$

$2000-2 \to 1.$

$0 \to 1.$

$999 \to 1$

838

$21\cdot 39+20.$

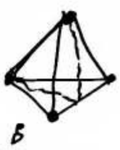
$838 : 20 = 41$; 80; 38; 20; $18.$

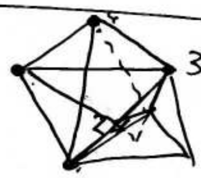
$80\cdot 41+18$

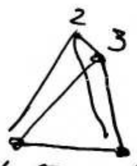
$20\cdot 39+59 =$

$= 20\cdot 41+18$

$749\times 9 = 741$







$621\times 9 = 589$

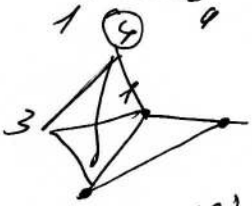
$4\cdot 8$

$589\times 9 = 301$

$709\times 9 = 381$

$861\times 9 = 749$

$301\times 9 = 2709$



$X = \frac{120}{360}\cdot 2\pi r =$

$= \frac{2}{3}\pi\cdot\frac{6\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}\pi$

$10^{2022} - 9^{2022}.$

$9^{999\cdot 2} \equiv 1 \pmod{1000}$

$429\times 9 = 861$

9^{2022}

$9^k\cdot(1-9^{l-k}) \equiv 1 \pmod{1000}$ ⋮ 1000; 9 – взаимно простые

$9^k \equiv 9^l \pmod{1000}$

$9^k - 9^l \equiv 0 \pmod{1000}$

$9 \quad 81$

$729\times 9 = 6561$

$461\times 9 = 4149$

$149\times 9 = 1341$

$381\times 9 = 429$

$741\times 9 = 669$

$341\times 9 = 069$

$69\times 9 = 621$

$669\times 9 = 129$

$129\times 9 = 1161$

$161\times 9 = 1449$

$449\times 9 = 041$

$41\times 9 = 369$

369×9

Лист 8

Черновик.

4

ПСП.

$y=2x^2-1;\ x=4y^2-2.$

$4(2x^2-1)^2-2=$

$=4\cdot(4x^4-4x^2+1)-2=$

$=16x^4-16x^2+2=$

$=(4x^2-2)^2-2$

$\underbrace{11\ldots\ 11\ldots11}_{2022}$

111111

11211. 11211

1131 1122

141 → 1. 114 → 1.

$(4x^2-2)^2-2-x=0.$

$16x^4-16x^2-x+2=0$

$16x^2(x-1)(x+1)-(x-1)+1=0$

$(16x^2(x+1)-1)(x-1)=-1$

$(4x^2-2)=2+x$

ab.

a+b.

a+b+c.

$(xy+yz+xz)(x+y+z)$

$x=2\cdot(2y^2-1)$

$2y=2(2x^2-1)$

$(t^2+4)(t+4)=a-16.$

$x^3+y^3+z^3+$

$+2x^2+2y^2+2$

$2y-x=2\cdot(2x^2-2y^2)$

$-\frac{d}{a}=$ ~~abc~~ $xyz.$

$y^2=\frac{1}{2}$

$y=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$-a=xyz.$

$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

$x^2+y^2+z^2=8.$

4: (((()))) ()(()) (())(()) ((()()))

6:4

3:2

2:1

1:1

5: 8

9: $2^7=128$.

$x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz=$

$xy+yz+xz=4$

[redacted]

$x+y+z=-4$

10 число Каталана

11 n-2

12 n-3

13 n-4

$=x^2+y^2+z^2$

1·1·1+1·1+ 1211

()

(())

()()

(()()())

(()()

(n+1) 1 n-1.

2 n-2

3 n-3

$\left[\frac{n}{2}\right]$ $n-\left[\frac{n}{2}\right]$

{()()(...)}

{()()(...)}

1 2 ...

$x^3-4y^2-4z^2-4y-4z+32=$

4: 2+1·1+1·1·1=4.

$=x^3+xy^2+y^3+y^2z+xz^2+z^3+yz^2$

5: 4+2·1+2·1·1+1·1·1·1+

4+2+1+1=11

+1·1·1

$-xy^2-y^2z-xyz\ xyz-yz^2-xz^2+32=$

xyz

$2\cdot 4^2$

$=x^3+y^3+z^3-2xyz+32$

$(x+y+z)^3=$

$x^3+y^3+z^3+3(x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y)+$

$+6xyz.$

$=(x+y+z)^2(x+y+z)=$

$=(x^2+xy+xz+xy+y^2+zy+z^2+zy+zx)(\ldots)=$

$=(x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz)(x+y+z)=$

$=x^3+xy^2+xz^2+2x^2y+2x^2z+2xyz$

Лист 9

Черновик.

$A = x^3 - 4y^2 - 4z^2 - 4y - 4z + 32 =$

$= x^3 + (y^2+z^2)(x+y+z) - (xy+yz+xz)(y+z) + 32 =$

$= x^3 + \cancel{xy^2} + y^3 + \cancel{zy^2} + \cancel{z^2x} + \cancel{z^2y} + z^3 - \cancel{xy^2} - \cancel{zy^2} - xyz - xyz - \cancel{yz^2} - xz^2 + 32 =$

$= x^3 + y^3 + z^3 - 2xyz + 32$

$(xy + yz + xz)\cdot(x+y+z) = x^2y + x^2z + xyz +$

$(x+y+z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y) +$

$+6(xyz)$

$(-4)^3 = (\ldots) + 3\left((xy+yz+xz)(x+y+z) - 3xyz\right) + 6(xyz)$

$= (\ldots) + 3\cdot(-4\cdot 4) + 3xyz$

$(\ldots) = -64 + 3\cdot 16 - 3xyz$

$48 - 32 - 5xyz = 16 - 5xyz = 16 + 5a$

$t^2(t+4) + 4(t+4) + a - 16 = 0.$

$(t^2+4)(t+4) = 16 - a.$ $(t+4)\cdot k.$

$t = 2$ $\quad$ $t \neq 2.$

t

$8 \cdot 6 = 16 - a$

$a = -32$

$(t^2 + 4 - k)(t+4) = 0.$

$t = -4.$

Лист 10.