МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Горюнов Артем Александрович**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **80**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	10	15	15	10	15	0

№1 Чистовкин

$$A = \frac{3}{(1\cdot2)^2} + \frac{5}{(2\cdot3)^2} + \ldots + \frac{97}{(48\cdot49)^2} + \frac{99}{(49\cdot50)^2}$$

$$B = \frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}$$

В числе A каждая дробь может быть представлена в виде $\frac{2n+1}{n^2\cdot(n+1)^2}$, где n - порядковое число дроби.

$$\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2-n^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$A = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{49^2} - \frac{1}{50^2} = 1 - \frac{1}{50^2}$$

$$B = \frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{\sqrt{3}^2-2\sqrt{3}+1}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt[6]{(\sqrt{3}-1)^2}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{(3-1)}{(2)}} = 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow A < B$

Ответ: Больше число B.

Ильмахан
Ильясовна

На 19 делимые: 19, 38, 57, 76, 95
На 23 делимые: 23, 46, 69, 92
Если I цифра =1, то II - однозначно 9, после 9 могут идти либо 5, либо 2. Но 2 быть не может, т.к. после 2 может идти только 3, после 3 только 8, а с 8 никакое число не начинается, значит единственный вариант - 5. Но после 5 идет 7, после 7 идёт 6, после 6 идёт 9, тогда цикл замыкается. Получаем: 1-9-5-7-6-9-...
Всего цифр 2021, цикл длиной 4, тогда место искомой цифры в цикле - остаток от деления его на 4, а остаток =0, значит искомая цифра - 6.
Ответ: 6.

Игнатова Ирина Игоревна

№ 3

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}$$

$$f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-\frac{1}{1-x^5}}} = \frac{1}{\frac{\sqrt[5]{1-x^5-1}}{\sqrt[5]{1-x^5}}} =$$

$$= \frac{\sqrt[5]{1-x^5}}{-x}$$

$$f(f(f(x))) = \frac{\sqrt[5]{1-\frac{1}{1-x^5}}}{\frac{-1}{\sqrt[5]{1-x^5}}} = \frac{-x}{-1} = x$$

$1302 \vdots 3$

Тогда $f(f(f\ldots(f(x))\ldots)$ 1302 раза $= x$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ если 1303 раза, тогда $f(f(f\ldots(f(x))\ldots)$

1303 раза $= \frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}} \Rightarrow f(f(f\ldots(f(2022))\ldots)) =$

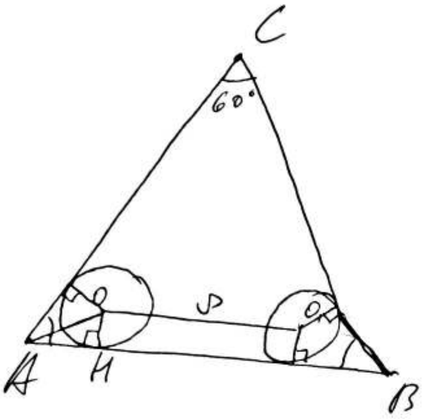
$$= \frac{1}{\sqrt[5]{1-2022^5}}$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt[5]{1-2022^5}}$.

11

№4

[illegible]



$\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$

(ΔABC - равност.)

В сечении (осевом) получится - равносторонний ΔABC

$R = ?$

· Отрезок $AH = \sqrt{(OH \cdot 2)^2 - OH^2} = 3\sqrt{3}$

· $R = \rho + 3\sqrt{3}$

· Центры шаров образуют ~~[illegible]~~ 19-и угольник

· $\alpha = 360/19 \Rightarrow \alpha/2 = \frac{\pi}{19}$; $2 \cdot \rho \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow \rho = \frac{3}{\sin\left(\frac{\pi}{19}\right)}$

Ответ: $R = \frac{3}{\sin\left(\frac{\pi}{19}\right)} + 3\sqrt{3}$

[illegible]

№5

[illegible]

$a > 0 \Rightarrow t(t^2 - 144) > 0$

t: $-\quad +\quad -\quad +$

$-12 \qquad 0 \qquad 12 \qquad t$

$b > 0 \Rightarrow 2^t - 256 > 0 \Leftrightarrow t > 8$

$c > 0 \Rightarrow \sin t - \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$

$t \in \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k;\ \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right)$

Среди положительно тогда и только тогда, когда как минимум 2 числа будут положительными. $t > 12$ - подходит

$\frac{7\pi}{3} < 8 < \frac{8\pi}{3} \Rightarrow t \in \left(8;\ \frac{8\pi}{3}\right)$ - подходит

$t \in \left(-\frac{\pi}{3};\ -\frac{4\pi}{3}\right)$ - подходит

$\left(-\frac{11\pi}{3};\ -\frac{10\pi}{3}\right)$ - подходит

Ответ: $t \in \left(-\frac{11\pi}{3};\ -\frac{10\pi}{3}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{3};\ -\frac{4\pi}{3}\right) \cup$

$\cup \left(8;\ \frac{8\pi}{3}\right) \cup (12;\ +\infty)$

№6 Шиловский

$a \cdot ctg^3 x + (a^2 - a - 3)\, ctg^2 x + (3 - 3a - a^2)\, tg x + 3a = 0$

$\exists\ ctg\, x = 1$

[redacted]

$a + a^2 - a - 3 + 3 - 3a - a^2 + 3a = 0$

Подходит $x \in (0; \sqrt{2})$; $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}$

Группируем при $ctg\, x = 1$:

$a \cdot ctg^2 x \cdot (ctg\, x - 1) + a^2 \cdot ctg\, x \cdot (ctg\, x - 1) -$

$- 3 \cdot ctg\, x \cdot (ctg\, x - 1) - 3 \cdot a \cdot (ctg\, x - 1) = 0$

$a \cdot ctg^2 x + (a^2 - 3) \cdot ctg\, x - 3a = 0$

В случае $a = 0$: $ctg\, x = 0$

$x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\exists\ a \neq 0$: $D = (a^2 - 3)^2 + 12a^2 > 0$ (сумма квадратов, $a \neq 0$)

$$\begin{cases} ctg\, x_2 \cdot ctg\, x_3 = -3 \\ ctg\, x_2 + ctg\, x_3 = \frac{3 - a^2}{a} = \frac{3}{a} - a \end{cases}$$

$f(a) = 3a - a$

$E(f) = (-\infty; +\infty)$

$x_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $ctg\, x_2 \cdot ctg\, x_3 < 0 \Rightarrow x_2$ или $x_3 > \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$

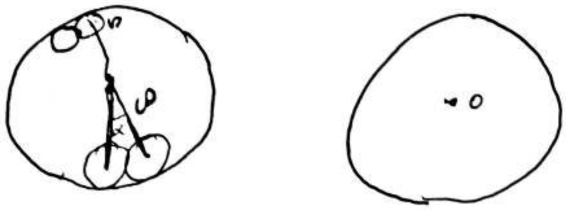
$\Rightarrow$ макс $|x_i - x_k| \geq \frac{\sqrt{2}}{4}$

В случае же, когда $a = 0$, $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{2}}{4}$

Ответ: $a = 0$; $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_1 - x_2 = \frac{\sqrt{2}}{4}$ 6

Черновик



№1

$A = \frac{3}{4} + \frac{5}{36}$

$\frac{2n+1}{n^2 \cdot (n+1)^2}$ – каждая дробь, n – нат. число

$\frac{2n+1}{n^2 \cdot (n+1)^2} = \frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2 \cdot (n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$

$A = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{49^2} - \frac{1}{50^2} =$

$= 1 - \frac{1}{50^2}$

$B = \frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{\sqrt{3}^2 - 2\sqrt{3}+1} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} =$

$= \frac{\sqrt[3]{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{(3-1)}{2}} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow A < B$

№3 Черновик

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}$$

$$\sqrt[5]{\frac{1-x^5-1}{1-x^5}} = \sqrt[5]{\frac{-x^5}{1-x^5}}$$

$$f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-\frac{1}{1-x^5}}} = \frac{1}{\frac{\sqrt[5]{1-x^5-1}}{\sqrt[5]{1-x^5}}} = \frac{}{\sqrt[5]{1-x^5}}$$

$$= \frac{\sqrt[5]{1-x^5}}{-x}$$

$999+303=\underline{1302}$

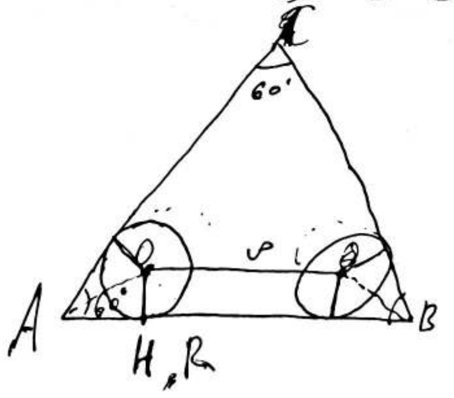
$$f(f(f(x))) = \frac{\sqrt[5]{1-\frac{1}{1-x^5}}}{\frac{-1}{\sqrt[5]{1-x^5}}} = \frac{-x}{-1} = x$$

Тогда $f(f(f \dots f(x) \dots)))$ 1302 раза $= x$, или 1303 раза, то тогда $f(f(\dots(f(x)))) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-2022^5}}$

№4

в осевом сечении

$R = \rho + 3\sqrt{3}$



$\angle ACB = 60°$

Центры шаров образуют 19-и угольник.

$\alpha = 360/19$; $\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{19}$

$2 \cdot \rho \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 6$; $\rho = \frac{3}{\sin\left(\frac{\pi}{19}\right)}$

Ответ: $R = \frac{3}{\sin\left(\frac{\pi}{19}\right)} + 3\sqrt{3}$

8

Черновик

$f(x)=\frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}$

$f(f(f(f(f(\ldots)\ldots f(2022)$

$f(2022)=\frac{1}{\sqrt[5]{1-2022^5}}$

2021 значное число

$\vdots 19 / \vdots 23$

$1\ \overline{a_2 a_3 a_4 \ldots a_{2021}}$

$\vdots 19$ (двузначные) $\quad 19\cdot 5=50+45$

19, 38, 57, 76, 95 : 9, 8, 7, 6, 5

$\vdots$ 23 (двузначные):

23, 46, 69, 92 : 3, 6, 9, 2

19238...?

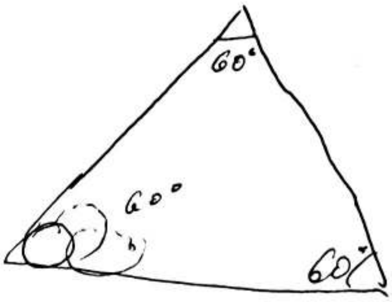
Скорее всего на 8, т.к. нет варианта? нет, вообще другого деления $\quad$ 19238 ^{5}

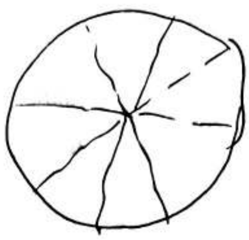
6:

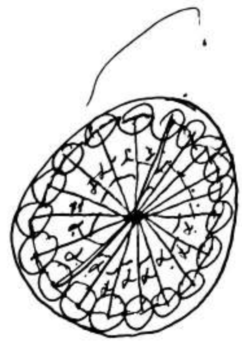
1..9..2..3..8

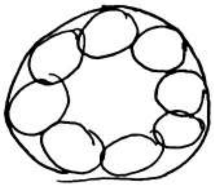
9

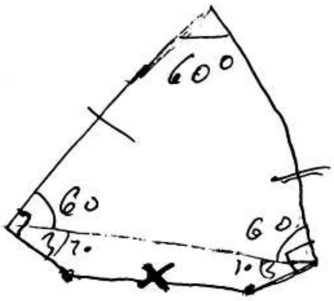
Черновик

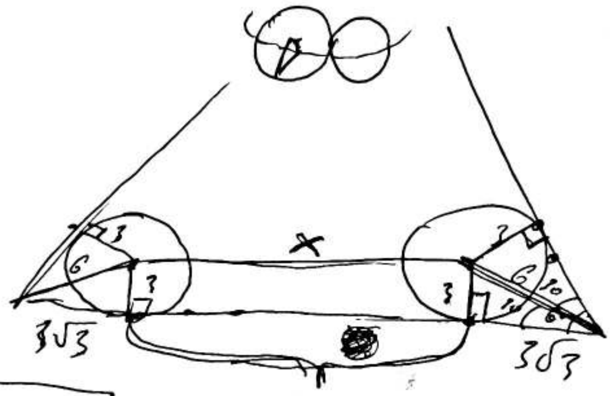




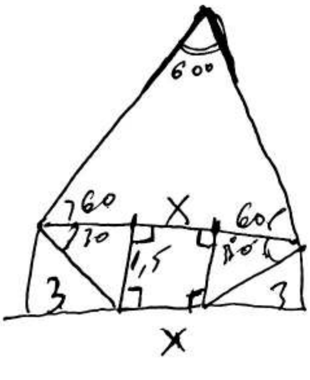








$\sqrt{36-9} = \sqrt{27}$



$\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}} =$

$= \sqrt[6]{3+1-2\sqrt{3}} =$

$= \sqrt[6]{(\sqrt{3}-1)^2} = \sqrt[3]{\sqrt{3}-1}$

Черновик

$x_1 \le x_2 \le x_3$

x_2 – среднее из a, b, c

$t = ?$

$a = t^3 - 144t$

$b = 2^t - 256$

$c = \sin t - \frac{\sqrt{3}}{2}$

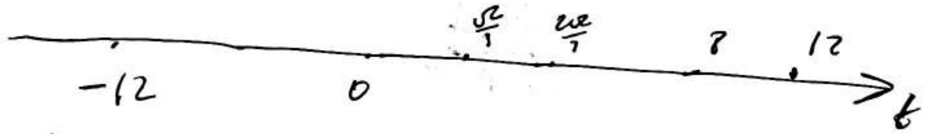
положительно $\quad 2^6 = 64 \quad 2^7 = 128$

$a = t(t^2 - 144)$, $b = 2^t - 256$, $c = \sin t - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$a = 0$ при $t = 0, \pm 12$

$b = 0$ при $t = 8$

$c = 0$ при $t = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$. $(+2\pi n, n \in Z)$



$\frac{\pi}{3} \approx 1,07$

$\frac{2\pi}{3} \approx 2,14$

π

$\frac{\pi}{3} - 2\pi \approx$

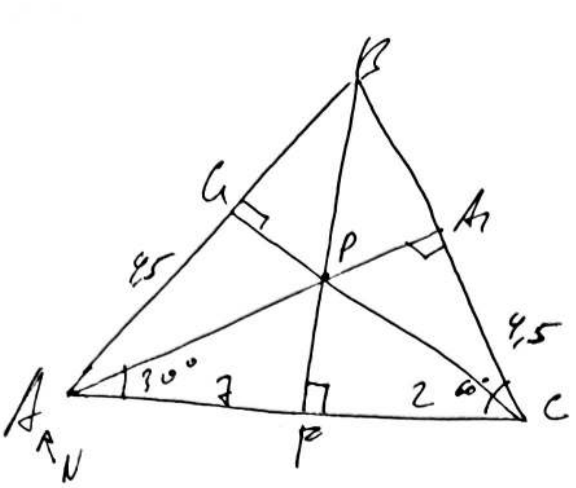
$\approx 1,07 - 3,14 -$

$- 3,14$

$\pi > 3$

Нули a, b, c

И



$\frac{7}{2} = \frac{AF}{FC}$

$\boxed{FN = 7}$?