МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Григорьев Тимофей Евгеньевич**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **100**

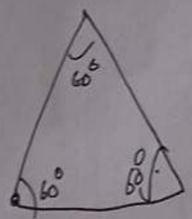
Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	15	15	15	15

Черновик. 1 из 8

$\frac{\pi}{3}-4\pi$



$\frac{180^\circ(n-2)}{n}$

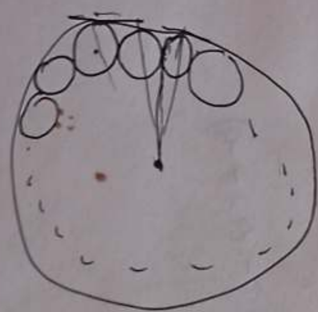
$\frac{180\cdot 17}{19}$

$-\frac{5\pi}{3}$

-7π

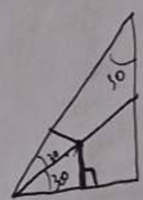
$-\frac{4\pi}{3}$

$\frac{7\pi}{3}$



$\frac{7\pi}{19}$

$\frac{\pi}{3}-2\pi$



$\frac{BE+O_1T}{BE}=\frac{O_1E}{MC}$

Черновик. 2 из 8

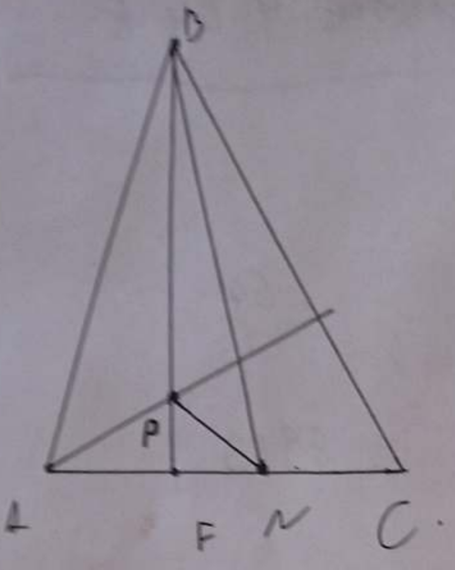
$a \neq$

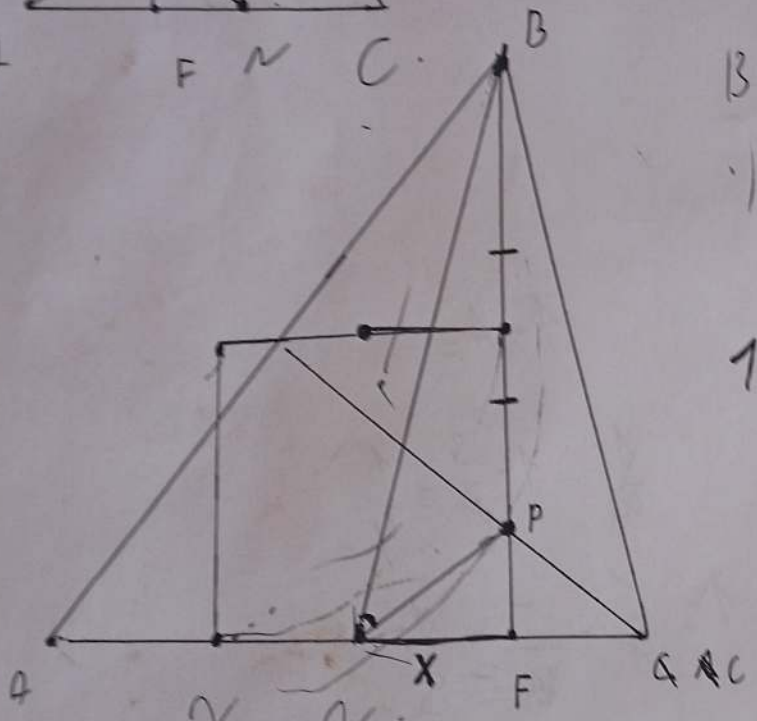
$$a(ctg\,x-1)(ctg\,x+a)\left(ctg\,x-\frac{3}{a}\right)=0$$

$(a\,ctg\,x-3)$ $\quad$ $(a\,ctg\,x-3)(ctg^2 x+ctg\,x\,a-ctg\,x\,\cancel{-}-a)$

$a\,ctg^2 x -$

мерилн. 5 из 8.





$BF = 11.$

1

x

19

$B = 4 - 2\sqrt{3}$

$B = \frac{\sqrt[6]{(4-2\sqrt{3})} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} =$

$\sqrt[3]{(\sqrt{3}-1)} \sqrt{\ }$

4

черновик 8 из 8

черновик. 6 из 8.

$$\frac{3}{(1\cdot 2)^2}+\frac{5}{2\cdot 3}.$$

$$\frac{n+1}{\cancel{((n-1)\cdot(n+1))^2}}+\frac{n+2}{\cancel{((n+1)\cdot(n+3))^2}}$$

$$\frac{n+1}{((n-1)n)^2}+\frac{n+3}{(n\cdot(n+1))^2}.$$

$$\frac{n+1}{(n^2-n)^2}+\frac{n+3}{n^2+n}.$$

$$\frac{(n+1)(n+1)^2+(n+3)(n^2)}{\cancel{(n-1)}^2 n(n+1)^2}$$

$$\frac{(n+1)^3+n^3+3n^2}{((n-1))^2 n(n+1)^2}=$$

$$=\frac{n^3+3n^2+3n+1+n^3+3n^2}{(n^2-1)^2 n^2}$$

4

черновик 8 из 8

черновик · 7 из 8

$$\frac{3}{(1\cdot 2)^2}+\frac{5}{(2\cdot 3)^2}$$

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{3}$$

$$\frac{3}{2^2}+\frac{5}{6^2}+\frac{7}{12^2}+\frac{9}{20^2}+\frac{11}{30^2}.$$

4. 5 $\frac{n}{(n-1)^2}+\frac{n+2}{(n+3)^2}+\frac{n+4}{(n+9)^2}+\frac{n+6}{(n+17)^2}$.

$\frac{n}{\quad}$

$2+4+6+8\cdots 1$

$a_1=\frac{n}{(n\mp 1)^2}.$

a_0-

$a_0\cdot i$

$a_i=\frac{n+2i-1}{n}$

$b_1=-\cancel{1}3+2$

$b_2=-1+2\cancel{4}$

$-1;\ 3;\ 9$

$b_i=b_{i-1}+2i$

$b_{\cancel{n}}=-1$

$b_i.$ $\quad b_3=-1+4+$

$b_i=\cancel{b_{i-1}}\ b_{i-1}+2i$

$b_3=-1+2+4+6-\cdot$

черновик 8 из 8.

$$f(x) = \left(\frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}\right)^5 = \frac{1}{1-x^5}$$

$$\frac{1}{\sqrt[5]{1-\frac{1}{1-x^5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{\frac{1-x^5-1}{1-x^5}}} = \frac{1}{-x\sqrt[5]{\frac{1}{1-x^5}}}$$

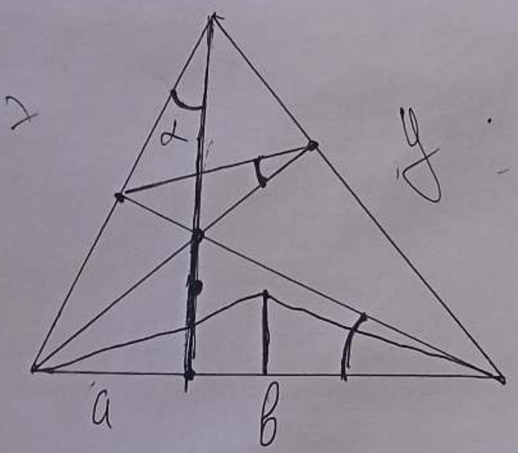
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}$$

$$f^2(x) = \frac{\sqrt[5]{1-x^5}}{-x}$$

$$f^3(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{1+\frac{1-x^5}{x^5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{\frac{1}{x^5}}} = x$$

Уровень.. 5 из 8

$FT^2 = FP \cdot BF$



$h = \frac{a}{\sin\alpha}$

$l = b \cdot tg\, \alpha$

$h \cdot l =$

$tg\, \beta = \frac{l}{b}$

$l =$

чр черновик. ч. Щ.8

19	19	38	57	76	95.
23	23	66	89		

19576666

19	19	38	57	76	95
23	23	46	69	92.	

195769

19238

$+\,^{69}_{23}$

$\overline{89}+3$

$1-A=$

$\cancel{\frac{1}{4}}\quad 1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}.$

$1-\frac{1}{4}-\frac{5}{36}=\frac{1}{9}$

$\cancel{\frac{1}{n^2}}\quad \frac{1}{n^2}-\frac{2n+1}{n^2(n^2+1)}=\frac{1}{n}$

№6.
подставь x вместо
ctg x−1
или −a.
будет 0.
(ctg x−1)(ctg x+a)

№1

Чистовик лист 1 из. 9

Пусть $~~A_n~~ = A_1 = \frac{3}{(1\cdot2)^2}$.

$A_2 = \frac{3}{(1\cdot2)^2} + \frac{5}{(2\cdot3)^2}$.

⋮

Докажем, что

$$1 - A_n = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

База:

$A_1 = \frac{3}{4}$; $1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4}$ (+)

~~Шаг:~~ $\cancel{A_n = \frac{1}{(n+1)^2}}$ $\cancel{A_{n-1} = \frac{1}{}}$ ~~Шаг.~~ $\cancel{1 - \frac{1}{A_{n-1}} = \frac{1}{n}}$

Шаг:

$1 - A_{n-1} = \frac{1}{n^2}$ ← предположение индукции.

Докажем:

$$1 - A_n = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

$$1 - A_n = 1 - A_{n-1} - \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} =$$

$$= \frac{n^2+2n+1-2n-1}{n^2(n+1)^2} = \frac{n^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{(n+1)^2}$$; шаг доказан.

$\cancel{1 - A_{n9} = 1 -}$ $\cancel{1 - A_{49} = 1 - A_{50}}$

→

след. стр.

Чистовик лист 2 из 9

$1 - A_{ug} = 1 - A = \frac{1}{50^2}. \Rightarrow A = \frac{\cancel{24}\,2499}{2500}$

$$B = \frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}\,\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = 1.$$

$$A = \frac{\cancel{2499}\;2499}{2500} < 1 = B$$

Ответ: B.

Чистовик Лист 3 Ц.9

№2.

выпишем двузначные числа делящиеся на 19 и 23

19	19	38	57	76	95.
23	23	46	69	892	

I случай. Заметим, что если n-цифра не 9, и не 8, то-мы однозначно можем определить. n+1.

Если n цифра 8, то продолжить мы не можем.

Если n цифра 9 то есть два вариант.

I: $\underset{n}{9}\ \underset{n+1}{5}\ \underset{n+2}{7}\ \underset{n+3}{6}\ \underset{n+4}{9}$.

II $\underset{n}{9}\ \underset{n+1}{2}\ \underset{n+2}{3}\ \underset{n+3}{8}\ \_\ldots$

То есть после n+3 нет цифр. ⇒

⇒ пока мы не подошли к концу. только I вариант.

$\underset{1}{1}\ \underset{2}{9}\ \underset{3}{5}\ \underset{4}{7}\underset{5}{6}\ \underset{6}{9}\ldots\ldots\underset{2018}{9}\ \underset{2019}{5}\ \underset{2020}{7}\ \underset{2021}{6}$. I вариант:

$\underset{1}{1}\ \underset{2}{9}\ \underset{3}{5}\ \underset{4}{7}\ \underset{5}{6}\ \underset{6}{9}\ldots\ \underset{2018}{9}\ \underset{2019}{2}\ \underset{2020}{3}\ \underset{2021}{8}$ II вариант

n+3 (2018+3 - последн)

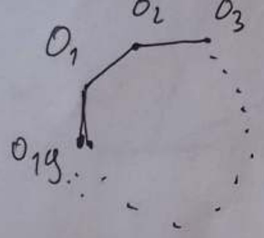
Ответ: 6 или 8

Чистовик Лист 4 Из 9

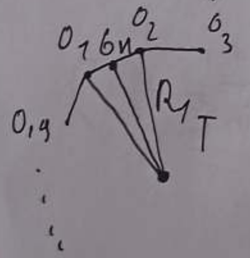
№4.

Так как все шары внутри конуса, касаются основания и имеют одинаковые r $\Rightarrow$ Если обозначим $O_1; O_2 \dots O_{19}$ - центры шаров, то а за α плоскость основания, то $\rho(O_i; \alpha) = 3 \Rightarrow$ все $O_i \in \beta$; $\beta \parallel \alpha$; $\rho(\beta; \alpha) = 3$, а также в сечен конус.

Рассмотрим. Многоугольник. $O_1 O_2 \dots O_{19}$ - это мн. (в силу касания) правильный 19 угольник со стороной $= 2r = 6$



Тогда найдём R_1 - радиус окружности описанной вокруг 19 угольника. ~~Эта окружность, также является~~



$\angle O_1 T O_2 = \frac{2\pi}{19}$

$\triangle$ TH - медиана, высота, бисс.

$O_1 H = 3$

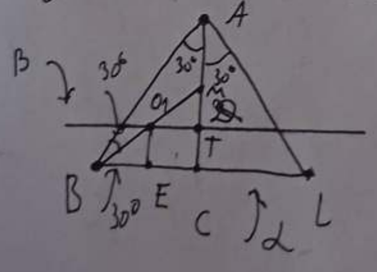
$TO_1 = R_1$

$\angle HTO_1 = \frac{\pi}{19} = \varphi$

Тогда.

$R_1 = \frac{O_1 H}{\sin\varphi} = \frac{3}{\sin\varphi} = TO_1$.

Нарисуем осевое сечение.



$\angle BAT = \frac{1}{2} \angle BAL = \frac{1}{2} 60^\circ = 30^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ABC = 60^\circ$ ~~(вписан.)~~

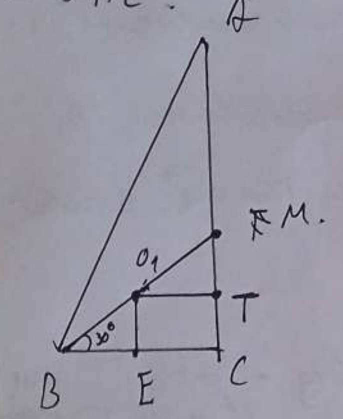
O_1 - лежит на бисс $\angle ABC \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle O_1 BC = 30^\circ$ (т.к. касается AB и BC)

Чистовик лист 5 из 9

Перерисуем.

$\triangle BAC$.



$\cancel{\triangle B}$

Пусть $BC = x$, тогда из тригонометр.

$\cancel{AC}$ $AC = \sqrt{3}\,x$.

По свойству бисс.

$$\frac{CM}{MA} = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{2}.$$

$$\Downarrow$$

$$MC = \frac{1}{3} \cdot AC = \frac{1}{\sqrt{3}}x$$

Из тригонометрии в $\triangle BO_1E \Rightarrow BE = O_1E \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$.

Из тригонометрии в $\triangle O_1MT \Rightarrow MT = \frac{O_1T}{\sqrt{3}}$

$$\underset{\underset{\frac{1}{\sqrt{3}}x}{\parallel}}{MC} = TC + MT = \frac{O_1T}{\sqrt{3}} + 3 \;;\; x = O_1T + 3\sqrt{3} = 3\left(\frac{1}{\sin\frac{\pi}{19}} + \sqrt{3}\right)$$

Ответ: радиус основания конуса $= 3\left(\frac{1}{\sin\frac{\pi}{19}} + \sqrt{3}\right)$

№3

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}$$

$$f(f(x))=\frac{1}{\sqrt[5]{1-\frac{1}{1-x^5}}}=\frac{1}{-x\sqrt[5]{\frac{1}{1-x^5}}}=\frac{\sqrt[5]{1-x^5}}{-x}$$

$$f(f(f(x)))=\frac{1}{\sqrt[5]{1+\frac{1-x^5}{x^5}}}=x$$

То есть 3 раза повторяя f мы получим x.

$1303=434\cdot3+1$

1302 повторений f, заменим на x и получим, что выражение $f(f(\ldots f(2022)))\ldots)) = f(2022) =$
f - 1303 раз

$$=\frac{1}{\sqrt[5]{1-2022^5}}$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt[5]{1-2022^5}}$

Чистовик Лист 7 Из 9

№6

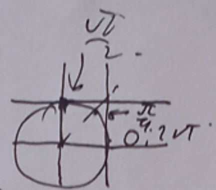
$a\,ctg^3x + (a^2-a-3)ctg^2x + (3-3a-a^2)\,ctg\,x + 3a = 0$

1) $a=0$.

$-3\,ctg^2x + 3\,ctg\,x = 0.$

$3ctg\,x(1-ctg\,x)=0$

$$\left[\begin{array}{l} ctg\,x = 0 \\ ctg\,x = 1. \end{array}\right.$$



Если $x \in (0;\pi)$, то $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{4}. \end{array}\right.$

2) $a \neq 0$.

$a\,ctg^3x + (a^2-a-3)\,ctg^2x + (3-3a-a^2)ctg\,x + 3a = 0.$

$a\left(ctg\,x - \frac{3}{a}\right)(ctg\,x-1)(ctg\,x+a)=0.$

$$\left[\begin{array}{l} ctg\,x = 1 \\ ctg\,x = -a. \\ ctg\,x = \frac{3}{a}. \end{array}\right.$$

есть корень $\frac{\pi}{4}$ и есть корень $> \frac{\pi}{2}$, т.к. либо $-a$, либо $\frac{3}{a} < 0$ (рассматриваются только $x \in (0;\pi)$.) $\Rightarrow$ max значен. больше $\frac{\pi}{4}$.

Ответ: $\frac{\pi}{4}$ при $a=0$.

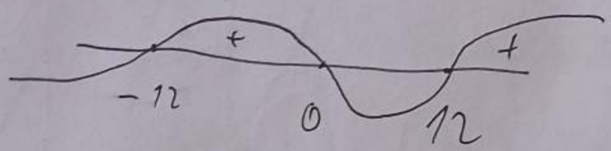
№ 5.

Чистовик лист 8 из 9.

Если среднее положительно ⟹ ⟸ 2 числа положительны.

~~a)>0.~~ $a = t^3 - 144 \cdot t > 0.$

$$t(t-12)(t+12) > 0$$



б)

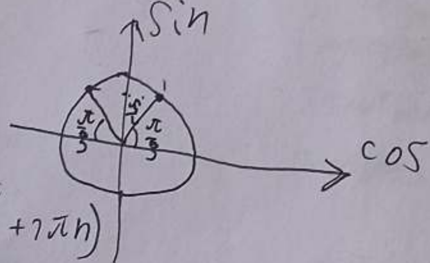
$b = 2^t - 256 > 0$

$2^t > 2^8$

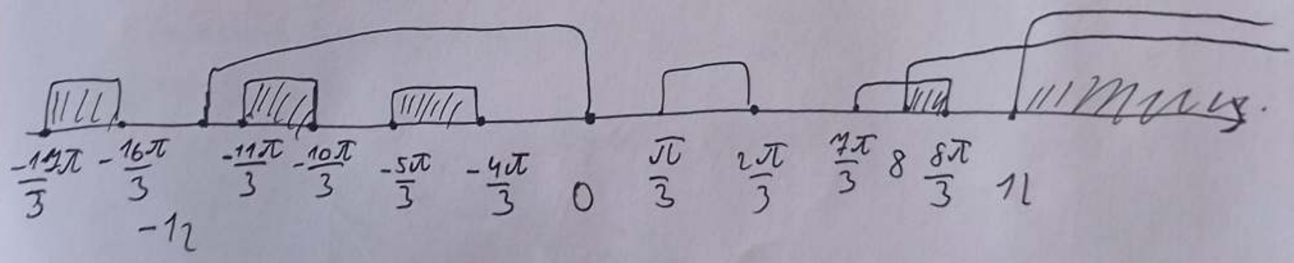
$t > 8$

$c = \sin t - \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$

$\sin t > \frac{\sqrt{3}}{2}$



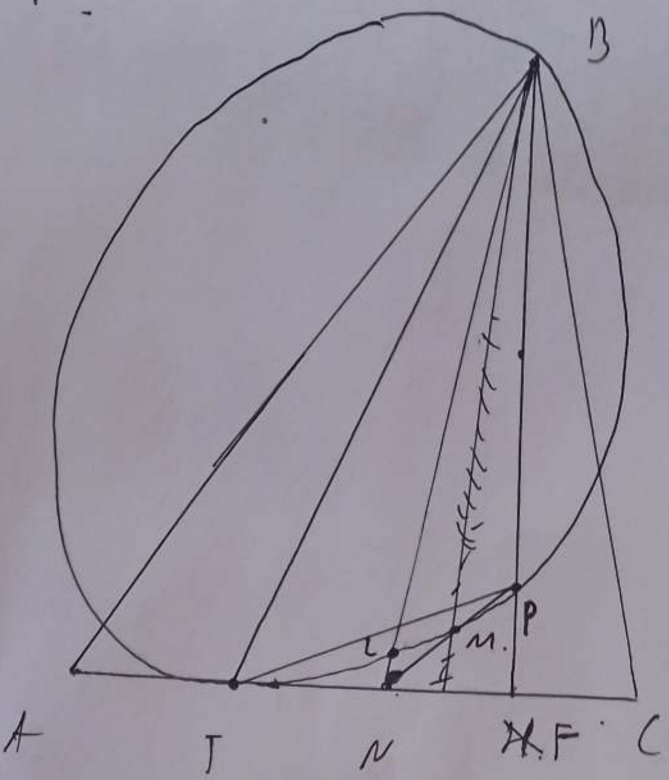
$t \in \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right)$



Ответ: $t \in \left(-\frac{11\pi}{3}; -\frac{10\pi}{3}\right) \cup \left(-\frac{5\pi}{3}; -\frac{4\pi}{3}\right) \cup \left(8; \frac{8\pi}{3}\right) \cup (12; +\infty)$

Чистовик Лист 3 из 9

№7.



Решение:

Построим окружность касающуюся прямой AC. в точке (T) и содерж. P и B. ~~(Мы стали~~

Если N = T, то $\angle BTP = \frac{1}{2} \smile BP$.

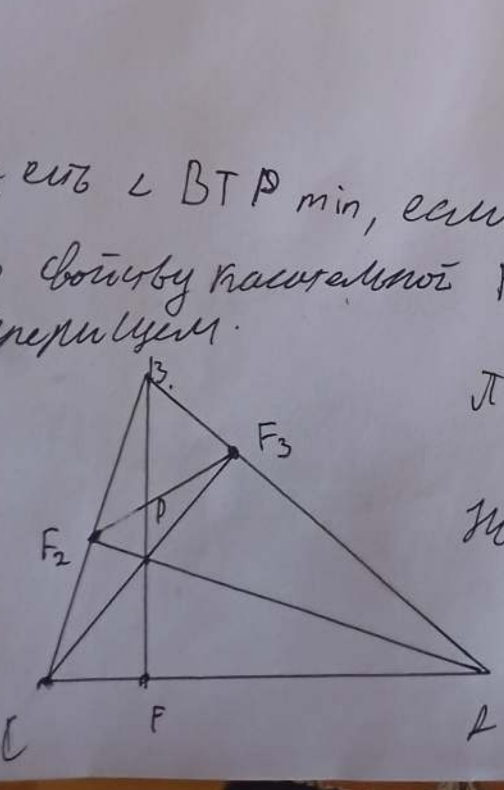
Если $N \neq T$, то $\angle BTP = \frac{1}{2} \smile BP - \frac{1}{2}$ дуги (пересеч. NB и NP) ($\smile LM$) что явно меньше чем $\frac{1}{2} \smile BP$.

Если $N \in FC$, то проводим рассужд. для симметричной окружности относительно BF

То есть $\angle BTP$ min, если N = T

По свойству касательной $FT = NT = \sqrt{FP \cdot FB}$

Перерисуем.



Пусть $\angle CBF = \alpha$, тогда $\angle F_2F_3P = \alpha$ (F_2BF_3P - вписанн)

Но тогда $\angle F_2AC = \alpha$ (F_2F_3AC - вписан)

Тогда $BF = CF \cdot ctg\,\alpha$.
$FP = AF \cdot tg\,\alpha$. $\Rightarrow \sqrt{FP \cdot FB} = \sqrt{CF \cdot AF} = \sqrt{14}$.

$\boxed{\text{Ответ: } FN = \sqrt{14}}$