МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Григорян Ани Игоревна**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **85**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	10	15	10	15	5	15

① Чистовик

Задача №1.

$$A = \frac{\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}}$$

$$\Updownarrow$$

$$A^3 = \frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}} \cdot (\sqrt{3}-1)}{2} = \frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}{2} = \frac{3-1}{2} = 1$$

$$B = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \dots + \frac{77}{(38\cdot 39)^2} + \frac{79}{(39\cdot 40^2)} =$$

$$= \frac{(2n+1)}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{(n+1-n)(n+1+n)}{n^2(n+1)^2} =$$

$$= \sum_{n=1}^{39}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{39^2} - \frac{1}{40^2} =$$

$$= 1 - \frac{1}{40^2} = \frac{39\cdot 41}{40^2} < 1$$

$$\Downarrow$$

$$B < A$$

Ответ: число A больше.

Задача №2.

Любые подряд идущие 2 цифры могут быть

$$\text{делящиеся на 19}\begin{cases}19\\38\\57\\76\\95\end{cases} \quad \text{и} \quad \left.\begin{matrix}23\\46\\69\\92\end{matrix}\right\}\text{делящиеся на 23}$$

Начало числа 469..., потом 2 возможности: 2 или 5.

2 не подойдёт: 469238... продолжить нельзя,

Значит, искомое число $\underline{469}\ \underline{5769}\ \underline{5769}\dots 576$

② Чистовик

Значит, искомое число $\underbrace{469}_{3\text{ числа}}\underbrace{5769\ 5769\ \ldots}_{2016\text{ чисел}},\ \underbrace{57\underline{6}}$

Ответ: 6

Задача №7.

Угол CSQ – острый, т.к. L на отрезке AB лежит вне круга, построенного на CQ как на диаметре.

Пусть R – радиус окружности, описанной около CSQ.

По теореме синусов $\Rightarrow 2R \cdot \sin\varphi = CQ$, поэтому угол $\varphi = CSQ$ принимает max значение, если R – минимально.

Это значит, что описанная окружность радиуса касается стороны AB.

По теореме о касательной и секущей: $LS^2 = LQ \cdot LC$

Пусть $QAL = x \Rightarrow$

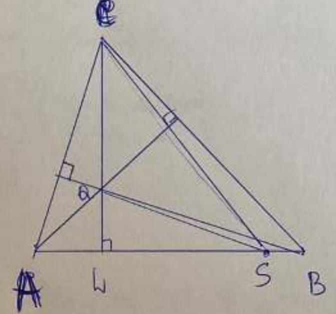
$AL \cdot tg\,x = 2tg\,x$

$BCL = x \Rightarrow$

$CL = \frac{LB}{tg\,x} = \frac{5}{tg\,x}$

$\Rightarrow LS^2 = 10$

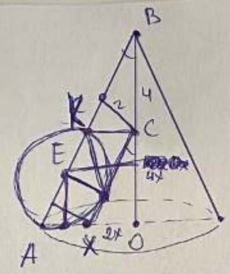
$LS = \sqrt{10}$



Ответ: $\sqrt{10}$

③ Чистовик

Задача №4.

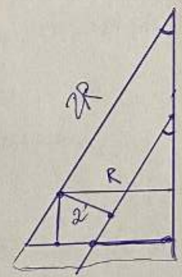


$$OX = AO - AX$$

$$AO = \frac{1}{2} AB$$

$$AB = AE + EB$$

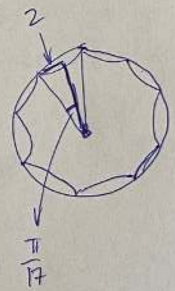
$$AE = \frac{2}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$



$$EB = \frac{4}{\cos\frac{\pi}{17}}$$

$$\Rightarrow \quad AB = \frac{4}{\sqrt{3}} + \frac{4}{\cos\frac{\pi}{17}}$$

$$AX = CK = \frac{4}{\sqrt{3}}$$



$$AO = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{\sqrt{3}} + \frac{4}{\cos\frac{\pi}{17}}\right) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\cos\frac{\pi}{17}}$$

$$OX = AO - AX =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\cos\frac{\pi}{17}} - \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\cos\frac{\pi}{17}} - \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Ответ: $\frac{2}{\cos\frac{\pi}{17}} - \frac{2}{\sqrt{3}}$

④ Чистовик

Задача №6.

Пусть $y = ctg\,x$, получаем

$$ay^3 + (2a^2 - a - 2)y^2 + (2 - 4a - 2a^2)y + 4a = 0$$

выделяем множитель $(y-1)$

$\Rightarrow$ получаем квадратный трёхчлен

$$(y-1)(ay^2 - 2y + 2a^2y - 4a) = 0$$

по теореме Виета получаем корни и раскладываем на множители:

$$(y-1)(y+2a)(ay-2) = 0$$

пусть $a = 0 \Rightarrow$ ~~...~~

$$(y-1)\cdot y\cdot(-2) = -2y(y-1) = 0$$

$$\Rightarrow y = 0 \quad y = 1$$

Корнями относительно x на интервале $(0;\pi)$ будут $x = \frac{\pi}{2}$; $x = \frac{\pi}{4}$

Расстояние между ними равно

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Ответ: $\frac{\pi}{4}$

⑤ Чистовик

Задача №3

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[9]{1-x^9}}$$

$$(f(x))^9=\frac{1}{1-x^9}$$

$$(f(f(x)))^9=\frac{1}{1-(f(x))^9}=\frac{1}{1-\frac{1}{1-x^9}}$$

$$(f(f(f(x))))^9=\frac{1}{1-(f(f(x)))^9}=\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{1-x^9}}}=$$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{1-x^9}}}=\frac{1}{1-\frac{1}{\frac{-x^9}{1-x^9}}}=\frac{1}{1+\frac{1-x^9}{x^9}}=x^9$$

$$(f(f(f(x))))^9=x^9 \Rightarrow f(f(f(x)))=x$$

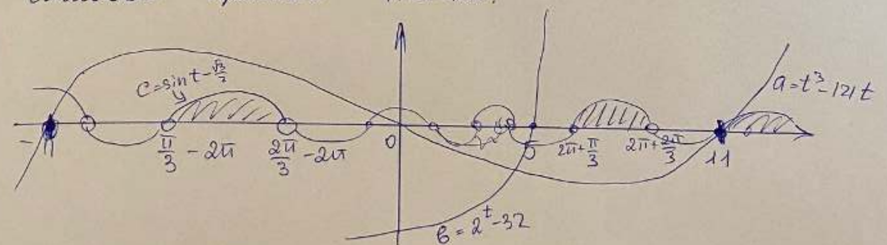
значит 3-е, 6-е и каждое кратное 3, даёт x.

$1305 \vdots 3 \Rightarrow$ ответ 2022

Ответ: 2022

Задача №5.

Построим графики и расположим на числовой прямой точки:



⑥ Чистовик

Ответ: $\left(-11;\ \frac{2\pi}{3}-4\pi\right)\cup\left(\frac{\pi}{3}-2\pi;\ \frac{2\pi}{3}-2\pi\right)\cup$

$\cup\left(2\pi+\frac{\pi}{3};\ 2\pi+\frac{2\pi}{3}\right)\cup\left(11;\ +\infty\right)$

Задача 1.

$$A = \frac{\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{(4+2\sqrt{3})^{\frac{1}{6}} \cdot (\sqrt{3}-1)^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}} = \frac{(4 \cdot 2 \cdot 3^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{6}} \cdot (3^{\frac{1}{2}}-1)^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}} =$$

$$= \frac{(2^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}\cdot 2} \cdot 3^{2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}})^{\frac{1}{6}} \cdot (3^{\frac{1}{2}}-1)^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}} = \frac{(2 \cdot \sqrt{2} \cdot 3^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}} \cdot (\sqrt{3}-1)^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}} =$$

$$= \frac{\cancel{2^{\frac{1}{3}}} \cdot (2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} \cdot (3^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}} \cdot (3^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} \cdot 1^{\frac{1}{3}}}{\cancel{2^{\frac{1}{3}}}} = \frac{2^{\frac{1}{6}} \cdot 2^0 \cdot 3^{\frac{1}{12}} \cdot 3^{\frac{1}{6}}}{1} = \frac{2^{\frac{1}{6}} \cdot 3^{\frac{1}{4}}}{1} =$$

$$= 2^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = (\sqrt[3]{2})^{\frac{1}{2}} \cdot (\sqrt{3})^{\frac{1}{2}} = (2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = (3^{\log_3 2^{\frac{1}{3}}} \cdot 3^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} =$$

$$(3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\log_3 2})^{\frac{1}{2}}$$

Черновик 1

Черновик 2

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{1+2}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$$B = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \dots + \frac{77}{(38\cdot 39)^2} + \frac{79}{(39\cdot 40)^2} =$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \frac{7}{144} + \dots + \frac{75}{(37\cdot 38)^2} + \frac{77}{(38\cdot 39)^2} + \frac{79}{(39\cdot 40)^2} =$$

$$= \frac{(2n+1)}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{39^2} - \frac{1}{40^2} =$$

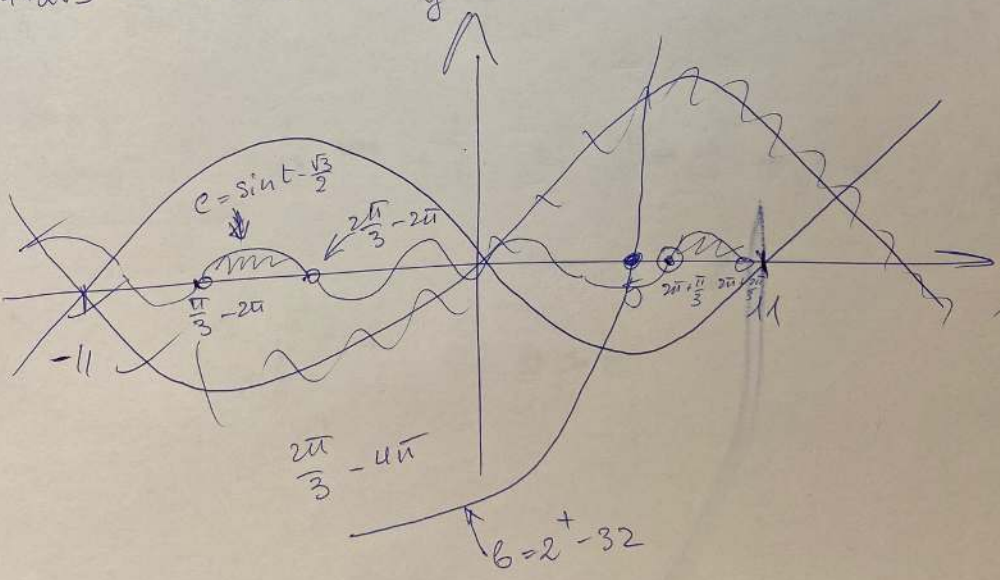
$$= 1 - \frac{1}{40^2} < 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B < 1 \end{cases} \Rightarrow A > B$$

Черновик 3

$$A^3 = \frac{\left(4+2\sqrt{3}\right)^{\frac{3}{6}} \cdot \left(\sqrt{3}-1\right)^{\frac{3}{3}}}{2^{\frac{3}{3}}} = \frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}} \cdot \left(\sqrt{3}-1\right)}{2} = \frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}{2} = \frac{3-1}{2} = 1$$

$$4+2\sqrt{3} = 2(2+\sqrt{3})$$



Черновик (4)

$39 \times 40 = 1560$

156×156: $936 + 780 + 156 = 24336$

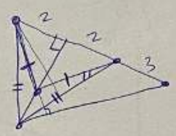
$79 \times 3 = 237$ $79 \times 4 = 316$ $79 \times 7 = 553$

$17 + 6 = 23$

$24336 : 79 = 308$; -237, 636, -632, 40

$79 \times 8 = 632$

$X_1 \le X_2 \le X_3$



$56 + 7 = 63$

$ctg^3 x = ctg^2 x \cdot ctg x =$

$=$

$a_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$

$2a^2 - a - 2 = 0$

$D = 1 + 16 = 17$

$a^2 + 2a - 1 = 0$

$\frac{D}{4} = 1 + 1 = 2$

$a_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$

$(0; \pi)$ принимает наименьшие значение

$a \cdot ctg^3 x + (2a^2 - a - 2) \cdot ctg^2 x + (2 - 4a - 2a^2) \cdot ctg x + 4a = 0$

Пусть $ctg^3 x = t$, тогда

$at^3 + (2a^2 - a - 2)t^2 + 2(1 - 2a - a^2) \cdot t + 4a = 0$

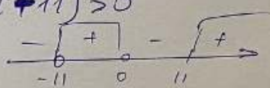
$at^3 + (2a^2 - a - 2)t^2 - 2(a^2 + 2a - 1)t + 4a = 0$

$t(at^2 + (2a^2 - a - 2)t - 2(a^2 + 2a - 1)) + 4a = 0$

$t \in (-11; 0) \cup (11; +\infty)$

$x_1 \le x_2 \le x_3$

$a = t^3 - 121t = t(t^2 - 121) = t(t-11)(t+11) = (t-11)t(t+11) > 0$

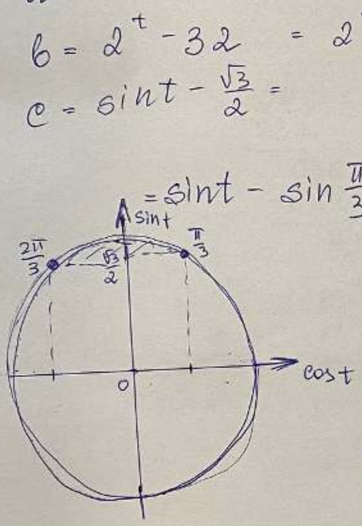


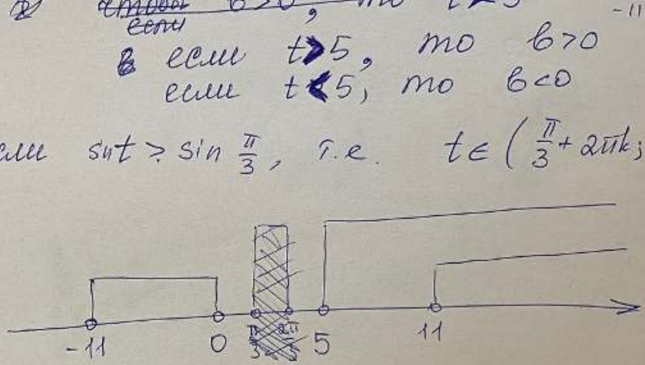
$b = 2^t - 32 = 2^t - 2^5$ ~~чтобы~~ если $b > 0$, то $t > 5$

если $t > 5$, то $b > 0$

если $t < 5$, то $b < 0$

$c = \sin t - \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin t - \sin\frac{\pi}{3} > 0$ если $\sin t > \sin\frac{\pi}{3}$, т.е. $t \in \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right)$





если x_2 - положительно, то x_3 - такие

$at^3 + (2a^2 - a - 2)t^2 + (2 - 4a - 2a^2)t + 4a = 0$

$at^3 + (2a^2 - a - 2)t^2 - 2(a^2 + 2a - 1)t + 4a = 0$

$t^2(a + 2a^2 - a - 2) - 2(a^2 + 2a - 1 - 2a) = 0$

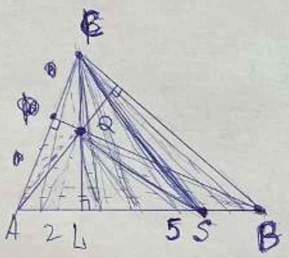
$t^2(2a^2 - 1) - 2(a^2 - 1) = 0$

$t^2(a\sqrt{2} - 1)(a\sqrt{2} + 1) - 2(a-1)(a+1) = 0$

Черновик 5

Черновик 6

$AB = 7$ $(AL=2;\ BL=5)$



$\angle CSQ =$

1. ~~S — середина BL~~

$\Rightarrow$