МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Громак Дмитрий Алексеевич**

Класс: **10 класс**

Технический балл: **55**

Дата проведения: **12 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	10	15	15	15	0	0	0

№1 Чистовик

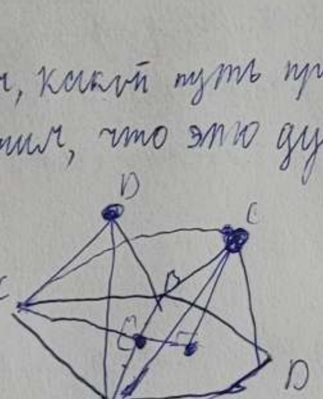
Заметим, что наше число представимо в виде $20a+k$ и $21b+k+1$

$20a+k=21b+k+1$

$20a=21b+1$ => наше число больше либо равно числу, которое делится на 20 и даёт при делении на 21 остаток 1, причём больше его на ~~больше~~ меньше, чем на 20, т.к. $k<20$.
Посмотрим на числа делящиеся на 20. $20x=(21-1)\cdot x=21x-x$ => что x должен давать остаток 20 при делении на 21. Первое ~~от~~ такое нат. число — 20. Но среди чисел от 400 до 419 нет чисел, делящихся на 22 с остатком 2. Среди Следующее такое x это 41. Заметим, что среди чисел от 820 до 839 только 1 число нам подходит — 838 => это наименьшее

№2

Посмотрим, какой путь проходит ~~каждая~~ какая-то неподвижная вершина пирамиды при перекате через ребро. Заметим, что это дуга окружности с центром в AB и радиусом CM, т.к.



пирамида правильная и вращение происходит относительно прямой AB. Посмотрим, чему равна градусная мера дуги. Она равна $180^\circ-\angle(ABC, ABD)=$ $=180^\circ-\arccos\frac{1}{3}$, т.к. пирамида правильная. =>

ответ это $2CM\cdot\pi\cdot\dfrac{180^\circ-\arccos\frac{1}{3}}{360^\circ}=2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot 6\text{см}\cdot\dfrac{\pi-\arccos\frac{1}{3}}{2}=\sqrt{3}\cdot 3\cdot(\pi-\arccos\frac{1}{3})$ см

Заметим, что по ~~каждому~~ каждая вершина пройдёт 4 таких дуг, т.к. она остаётся неподвижной при перекате ровно по 1 ребру, а каждый раз есть возможность перекати по 2-м ребрам, но по одному нельзя => по каждому ребру перекатим 2 раза.
=> ответ $\sqrt{3}\cdot 12\cdot(\pi-\arccos\frac{1}{3})$

№3

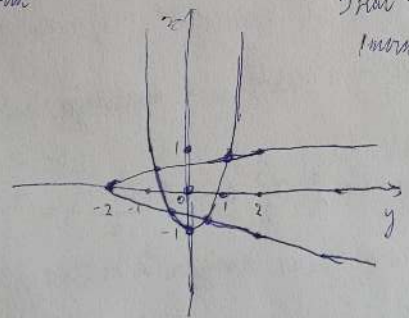
$10^{2022}-9^{2022}=\cancel{1000}\cdot 10^{2022}-(10-1)^{2022}=10^{2022}-(1000(10^{2019}\cdot\frac{2022\cdot 2021}{2}\cdot 10^{2019}\cdot 1+\ldots$
$+C_{2022}^{2019}\cdot 1)+C_{2022}^{2020}\cdot 100+C_{2022}^{2021}\cdot 10\cdot 1+C_{2022}^{2022}\cdot 1)=10^{2023}$ Заметим, что часть, которая делится на 1000 не влияет на последние 3 цифры. $C_{2022}^{2020}=x\cdot 1000+1$, $C_{2022}^{2021}=y\cdot 100+22$. Нас интересует $1000-x\cdot 1000-1\cdot 100+y\cdot 1000+22\cdot 10-1=$
$=1119$ => последние 3 цифры 119.

№4

Выигрывает 2-й. Стратегия: после первого хода складываем 2 единицы так, чтобы получилась такая картинка: 100: 1 2 1 :100 1 4 1 Далее будем ходить ~~точно~~ ~~так~~ зеркально симметрично в другую половину, или если можем получить четвёрку получаем. Посмотрим, почему мы всегда выигрываем. Заметим, что если две 2 стоят рядом, то побеждает следующий ходящий. Теперь заметим, что если получилась тройка, то тоже выигрывает следующий ходящий, т.к. для того чтобы получить тройку надо сложить 2 и 1, но рядом с 2 должны стоять две 1 => следующим ходом можно сложить 3 и 1 и получить 4 => 2 никогда не складываются до нескольких ходов до конца игры. => складываются единицы, но если соперник может сложить единицы, ~~то~~ чтобы следующим ходом не проиграть, то и мы можем, но игра закончится, т.к. каждый раз единицы кол-во единиц уменьшается => когда-то получится выиграть. Мы не можем получить числа больше 4, т.к. если образуется 3, то мы сразу выигрываем.

№6

Нарисуем график:



У нас 4 точки пересечения => нам подходит только 1 точка или никакие.

Черновик 3

$xyz = a$

$x + y + z = 4$

$-xy$

$x + y + z = -4$

$xy + yz + xz = 4$

$xyz = -a$

$x = (-4 - y - z)^3$

$-256 - y^3 - z^3 + 4$

$-(256 + y^3 + z^3 + 4y^2 + 4z^2 + y^2z + z^2y + 16y + 16z + 4$

$-4yz$

$-((4 + x + y) \cdot \frac{4 - yz}{y + z} \cdot \frac{a}{yz}$

$4\left(\frac{(4 - yz)a}{(y+z) \cdot yz}\right) + \frac{(4 - yz)a}{yz}\Big) = 4\Big(\frac{(4 - yz)a}{(y+z)y^2} +$

$\frac{4a}{y+z} \cdot \frac{4a}{yz} - a$

$(4 + y + z)^2 \cdot \frac{-a}{yz}$

16 A

1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	2	3	3	4	4	5	5
1	2	3	4	5	7			
1	2	3	5	6				
							2	

1 · 2

3 = 3 · 3

27

2 00

1 1

210

111

2 · 300

3 + 3 + 3

1 +

400

310

220

211

4000

3100

2200

2110

1111

50000

500

410

320

311

2210

2111

600

510

420

411

321

330

3111

2211

2220

1

2 1

3 2

4 2 + 1 = 3

5 4 + 3 + 2 = 9

6 9 + 4 + 2 + 2

17

7 17 + 9 +

+ 4 + 3 +

Черновик 4

$22x+2$

$2x^2 = 32y^4 - 16y^2 + 8 = y+1$

$20a+k = 216+k+1$

$20a = 216+1$

20 40 60 420

400 399

$(((())()))$

$\begin{cases} y = 2x^2 - 1 \\ x = 4y^2 - 2 \end{cases}$

$(10-2)(10 \ldots 10^2$

$\begin{cases} 4y^2 = 16x^4 - 16x^2 + 4 \\ x = 4y^2 - 2 \end{cases}$

820

$x^3 + 4x^2$

22 $820 : 22 = 37$, -66, 160, -154, 6

$22 \cdot 37 = 814$

$814 : 22$

$\boxed{838}$

81

$16x^4 - 16x^2 - x + 4 - 2 = 0$

$(10-1)^3$

$16x$

$300 + 30 + 1$

$C_3^2 \cdot 10^2$

$2\sqrt{3}a$

$\frac{\sqrt{3}}{3}a$

$(10-1)^{2022}$

$\frac{2022 \cdot 2021 - 2 \cdot 2022 + 2}{2}$

$100 - 2022 \cdot 10$

$10^{2022} - \ldots + C_{2022}^2 \cdot 10^2 \cdot 1^{2020}$

$2022 \cdot 2019 \cdot 780$

$- C_{2022}^1 \cdot 10 \cdot 1 + 1$

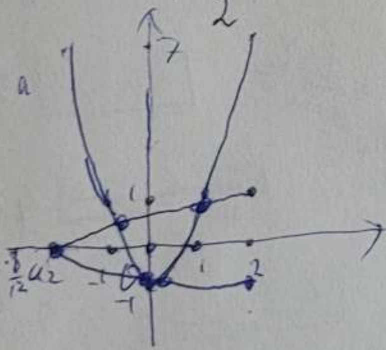
$1011 \cdot 2019 + 1$

781

$3\frac{1}{3}a$

$\sqrt{\frac{2}{3}}a$

$\frac{2}{3}a + \frac{1}{12}a^2$



2018

2020

$1011 \cdot 2022$

$20442420 - 2022 + 1$

$2019 \cdot 1011 = 2041209$

$\boxed{210}$

790

$16x^4 - 16x^2 + 4 - 2 - x = 0$

$16x^4 - 16x^2 - x + 2 = 0$

$8x^4 - 8x^2 + 2 + \ldots + x(8x^3 - 1)$

$(\sqrt{2} \cdot 2x - \sqrt{2})^2$

$(2x-1)(4x^2 + 2x + 1)$

$2\sqrt{2}(2x-1)$