# МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
## имени М.В. ЛОМОНОСОВА

# ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Денисов Максим Иванович**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **85**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

**Результаты проверки:**

| № | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Оценка | 15 | 15 | 15 | 15 | 10 | 0 | 15 |

Черновик.

$= \sqrt[3]{\frac{(3-1)}{2}} = 1 \Rightarrow A < B$, т.к. $\underline{A<1}$, а $\underline{B=1}$

~~Отв~~

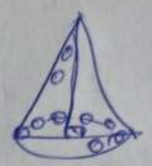
№3

✓ ?

①②34567

Дана функция

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}$$



$$f(f(f(f\ldots f(2022))))\ldots))))$$

где $f$ применяется 1303 раза.

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}=\frac{1}{\sqrt[5]{(1-x^3)(1+x^3)}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt[5]{(1-x)(1+x)(1+x-x^2)(1+x+x^2)}}>0=$$

$$=\frac{1}{\sqrt[5]{(1-x^2)\left(x-\frac{1+\sqrt5}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt5}{2}\right)(1+x+x^2)}}=$$

$$=\cancel{(1+x)(1+x+x+x^2)}$$

$$(1+x)(1+x)(1+x)=$$

$D_1 = 1-4<0$

$D_2 = 1+4=5 \to \left[\begin{array}{l} x=\frac{-1+\sqrt5}{-2}=\frac{1-\sqrt5}{2} \\ x=\frac{-1-\sqrt5}{-2}=\frac{1+\sqrt5}{2}\end{array}\right.$

$\to (1-x)(1-x)(1-x) = \cancel{(1-x)(1-x-x+x^2)} = \cancel{(1-x)(1-2x+x^2)}$

$$=\frac{1}{\sqrt[5]{(1-x^2)(1+x+\cancel{x^2}+x+x^2+\cancel{x^3}-\cancel{x^2}-\cancel{x^3}-x^4)}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt[5]{(1-x^2)(1+2x+x^2-x^4)}}$$

Черновик

$$\frac{1}{-\sqrt[5]{(1-x^2)(x^2-x-1-x+2+x-2)}\,(x^2+2x+1-x)}$$

$$\cancel{(1-x^2)((x-1)^2+(x-2))((x+1)^2-x}$$

$$1-x^3=(1-x)(1+x+x^2)=$$

$$=1+\cancel{x}+\cancel{x^2}-\cancel{x}-\cancel{x^2}-x^3=1-x^3$$

$$1+x^3=(1+x)(1-x+x^2)=$$

$$\cancel{=1+x-x^2+x+x^2-x^3}$$

$$=1-\cancel{x}+\cancel{x^2}+\cancel{x}-\cancel{x^2}+x^3=1+x^3$$

$$(1-x^2)(1-x+x^2)(1+x+x^2)=$$

$$=(1-x^2)\left((1-x)^2+x\right)\left((1+x)^2-x\right)=$$

$$=(1-x^2)\left((1-x)^4-x^2\right)=$$

$$=(1-x^2)\left((1-2x+x^2)(1-2x+x^2)-x^2\right)=$$

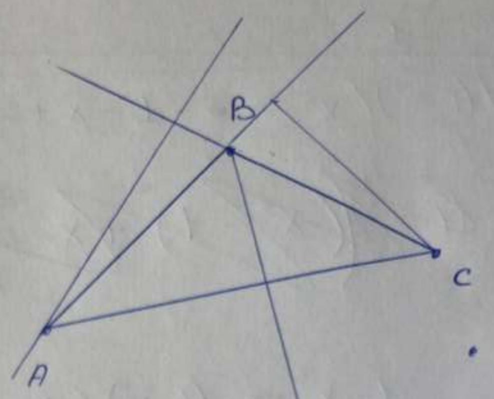
$$=(1-x^2)(1-2x+\cancel{x^2}-2x+4x^2-2x^3+x^2-2x^3+x^4-\cancel{x^2})=$$

$$=(1-x^2)(1-4x+5x^2-4x^3+x^4)=$$

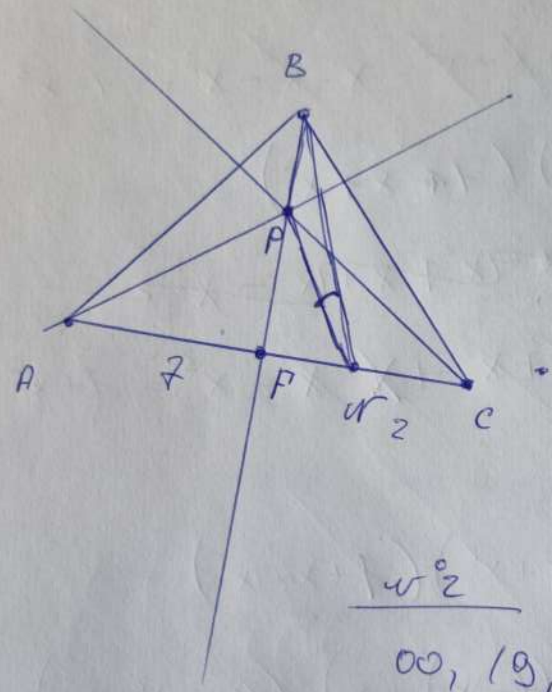
$$=$$

Gp. 3

Черновик




$\sqrt[3]{|1-\sqrt{3}|} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}$




FN - ?

✓ AF = 7

✓ FC = 2

№2

00, 19, 38, 23, 38, 46, 57 ...

... 69, 76, 92, 95.

$a_k = 0, \quad a_{k+1} = 0.$

$a \in \mathbb{R}$

$a\,ctg^3 x + (a^2 - a - 3)\,ctg^2 x +$

$+ (3 - 3a - a^2)\,ctg\,x + 3a = 0$

$x = (0; \pi)$

$x_{min}$ - ? $a = ?$

По th sin-ов:

$\frac{\sin\alpha}{BR} = 2R$

Стр. 4

Чистовик

№2

$n = \overline{a_0 \dots a_{2020}}$ - число.

$a_0 = 1$

Подходящие числа: 00, 19, 23, 38, 46, 57, 69, 76, 92, 95.

Число 00 нельзя встретить, т.к. найдётся $a_k$ и $a_{k+1}$ такое, что либо $a_k = 0$, либо $a_{k+1} = 0$, а подходящих таких чисел нет.

92, 23, 36 - могут использоваться только в конце числа, т.к. после 92 однозначно 23, а после 38 подходящих чисел, начинающихся с 8-ми — нет.

Число 19 встретится только вначале, т.к. нет подход. оканчивающихся на единицу.

Если оно оканчивается на цифры 9238, тогда всё, что было до определяется однозначно:

... 695769238

↑
повтор

Чистовик

Число 46 не используется, т.к. нет числа, оканчивающегося на 4. => получается число

$n = 1\underbrace{9576}\underbrace{9576}\ldots\underbrace{9576}9238$

идёт повторение

$4 \cdot 505 + 1 = 2021 \longrightarrow$ 2021-значное число =>
=> подходит.

Окончание на 8.

Если не заканчивается на 9238:

Тогда числа 92, 23, 38 - не используются =>

=> Ост.: 57, 69, 76, 95 =>

=> Число строится однозначно:

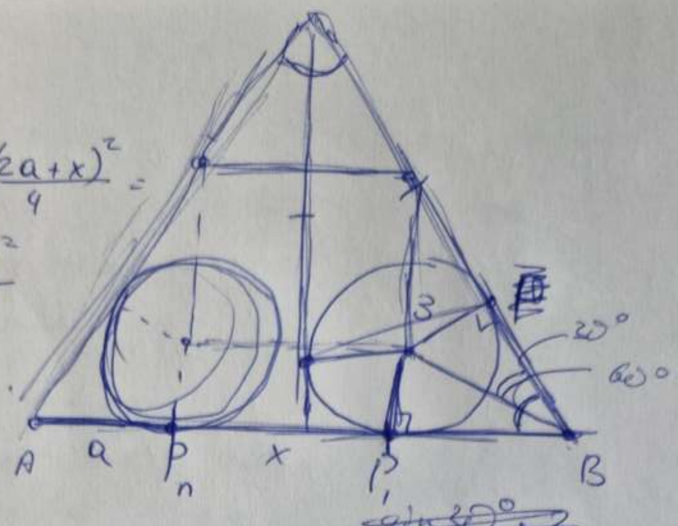
$1\underbrace{9576}\underbrace{9576}\ldots\underbrace{9576}$ => оканчивается на 6

Ответ: 6, 8 - 2 варианта.

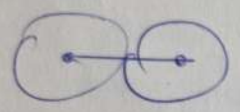
Черновик

$S = \pi R^2 = \pi \frac{(2a+x)^2}{4} =$

$= \pi \frac{(6\sqrt{3}+x)^2}{4}$



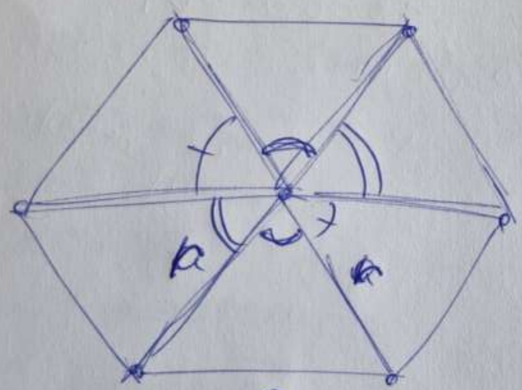

~~sin 30°~~



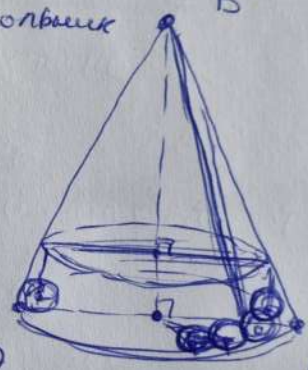
$AP_n = BP_1 = a$

$ctg\, 30° \cdot 3 = \frac{\cos 30°}{\sin 30°} \cdot 3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 3\sqrt{3}.$

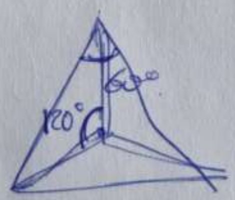
Узнаем, какой n-угольник




6




$n = 180° -$




$\frac{180° - 60° \cdot (a - \cancel{2})}{2} =$

~~= 180° 180° = 0~~

~~180°~~ / ~~(n-1)~~

$180° -$

~~180° - 180°~~

$60° \cdot 2$

Стр. 7

Чистовик

## №1

$$B = \frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}$$

✓ $$B = \frac{\sqrt[3]{|1-\sqrt{3}|}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}}{\sqrt[3]{2}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{3-1}{2}} = 1$$

$$A = \frac{3}{(1\cdot2)^2} + \frac{5}{(2\cdot3)^2} + \dots + \frac{97}{(48\cdot49)^2} + \frac{99}{(49\cdot50)^2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Заметим, что числа вида: $\frac{2\alpha+1}{\alpha^2(\alpha+1)^2}$

раскладывается как $\frac{1}{\alpha^2\cdot 1} - \frac{1}{(\alpha+1)^2} = \frac{(\alpha+1)^2-\alpha^2}{\alpha^2(\alpha+1)^2} =$

$= \frac{2\alpha+1}{\alpha^2(\alpha+1)} \Rightarrow A = 1 - \cancel{\frac{1}{4}} + \cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{9}} + \cancel{\frac{1}{9}} \dots$

$\dots + \frac{1}{49^2} - \frac{1}{50^2}$ ; $\underline{A = 1 - \frac{1}{50^2} < B}$

Ответ: $B > A$. ▲

Чистовик.

Возьмём одно из осевых сечений, который делит один из шаров на две равные по объёму части.

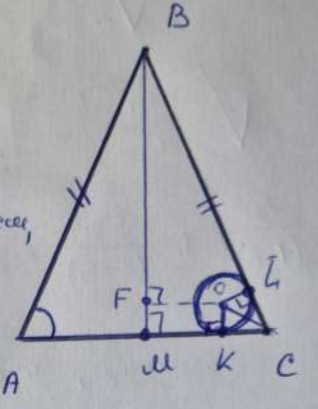
OK = OL = r - радиус

B - вершина конуса

ABC - сечение, K - точка касания шара с основанием,

L - точка кас-я шара с боковой стороной,

O - центр шара, M - центр осн-я конуса, MC - искомый R (радиус)




$\angle BCA = \dfrac{180° - 60°}{2} = 60°$

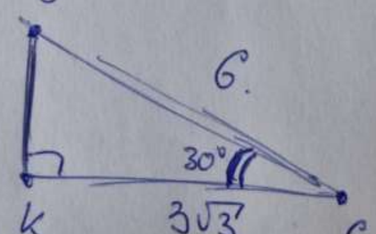
$KO = OL = r = 3$ (по условию) $\angle KCO = \angle LCO = 30°$, т.к. $CK$ и $CL$ - касат. из одной точки.

$\angle OKC = 90°$, т.к. $CK$ - кас. Тогда $OC = 6$, т.к. гипотенуза в $\triangle 30° - 60° - 90°$ =>

=> $\underline{KC = 3\sqrt{3}}$

$FO \perp BM$ => $MC = FO + KC =$

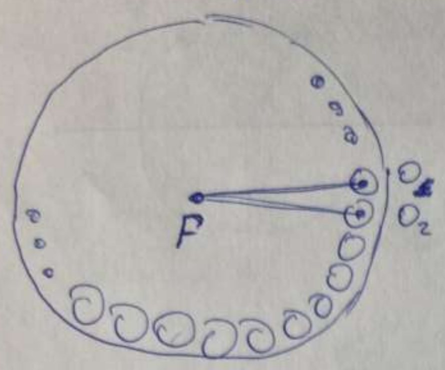
$= FO + 3\sqrt{3}$




Стр. 9

Вид сверху.

Чистовик

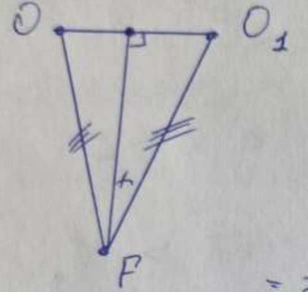



$O_1$ - центр соседнего шара

$OO_1 = 6$

$\angle OFO_1 = \frac{2\pi}{19}$

Рассмотрим $\triangle OO_1F$:




Тогда $FO = \frac{3}{\sin\frac{\pi}{19}}$

Тогда $MC = \frac{3}{\sin\frac{\pi}{19}} + 3\sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Ответ: $MC = R = \frac{3}{\sin\frac{\pi}{19}} + 3\sqrt{3}$

№5

$a = t^3 - 144t$

$b = 2^t - 256$

$c = \sin t - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$x_1 \le x_2 \le x_3$

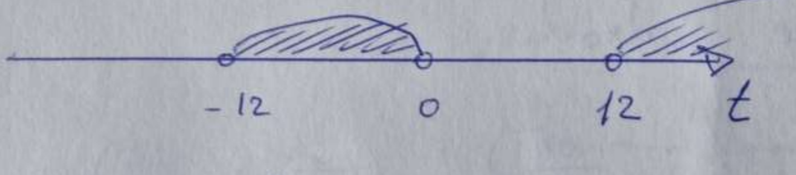
$t$ - ? (все решение)

Решение:

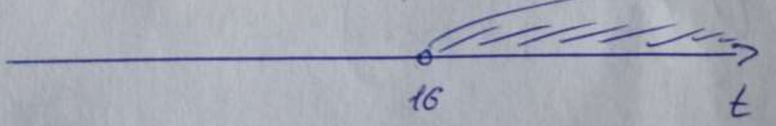
среднее положительны, если положительны хотя бы 2 числа

Рассмотрим +-ность каждого:

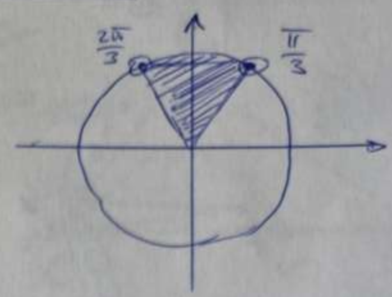
$\rightarrow a = t^3 - 144t = (t+12)(t-12)$

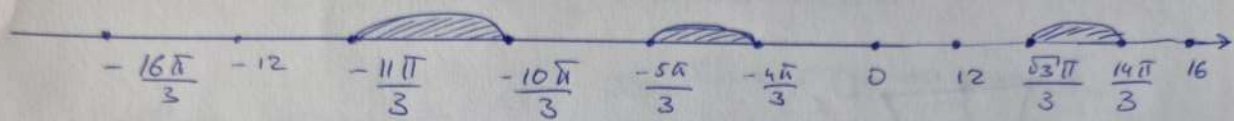



$\rightarrow b = 2^t - 256$:



$\longrightarrow c = \sin t - \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \underline{\sin t > \frac{\sqrt{3}}{2}}$ Чистовик




1) При $t > 16$ происходит: $a, b > 0$

2) При $t \in (12; 16]$: $\frac{\pi}{3} + 6\pi > 16,$

$\frac{2\pi}{3} + 2\pi < 12 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ т.к. $\frac{13\pi}{3}, \frac{14\pi}{3} \in (12; 16]$ – $\underline{t \in \left(\frac{13\pi}{3}; \frac{14\pi}{3}\right)}$

$\Rightarrow$ такие $t$ подходят.

3) $t \in (0; 12]$ – не подходит; $\underline{a, b < 0}$

$t \in (-12; 0] \Rightarrow \underline{t \in \left(-\frac{11\pi}{3}; -\frac{10\pi}{3}\right) \cup}$

$\underline{\cup \left(-\frac{5\pi}{3}; -\frac{4\pi}{3}\right)}$.

4) При $t \leq -12$ – не подходит.

$\Rightarrow$ Ответ: $t \in \left(-\frac{11\pi}{3}; -\frac{10\pi}{3}\right) \cup \left(-\frac{5\pi}{3}; -\frac{4\pi}{3}\right) \cup$

$\cup \left(\frac{13\pi}{3}; \frac{14\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{16\pi}{3}; +\infty\right)$.

Чистовик

№7

$AF = 7$

$FC = 2$

$\angle BNP$ – макс.

$FN$ – ?

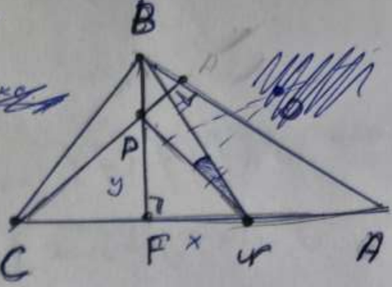
Решение:

~~∠BNP макс.~~

~~$\Rightarrow \frac{\sin\angle BNP}{BP}$ макс~~

~~$\frac{\sin\angle BNP}{BP}$~~

~~$\frac{\sin\angle BNP}{BP} = \sin\angle BPN$~~




~~Пусть O – центр окр., описанной около △BPN~~

$\angle BNP$ – макс. $\Rightarrow$ $\frac{\sin\angle BNP}{BP}$ – макс.

$$\frac{\sin\angle BNP}{BP} = \frac{\sin\angle BPN}{BN} = \frac{FN}{BN\cdot PN} -$$

– макс.

→ Пусть $FN = x$, $PF = y$, $BF = z$ $\Rightarrow$ Тогда $yz = CF\cdot FA = 14$

$\frac{BN\cdot PN}{FN}$ – должно быть также макс.

$$\frac{BN\cdot PN}{FN} = \frac{\sqrt{x^2+z^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}}{x} =$$

$$= \frac{\sqrt{x^4+x^2\cdot z^2+x^2\cdot y^2+z\cdot y^2}}{x} = \sqrt{x^2+z^2+y^2+\frac{z^2y^2}{x^2}} -$$

– $zy = const$, $\Rightarrow$ меняться может только

Стр. 13

№3 Чистовик

Дана функция:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}$$

$\rightarrow f(f(f(f(\ldots f(2022)))))\ldots))$, где $f$ (функция) применяется 1303 раза.

$$f(f(x)) = \cancel{\frac{1}{\sqrt[5]{1-\left(\frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}\right)}}} = \cancel{\frac{1}{\sqrt[5]{1-\frac{x^5}{-x}}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[5]{1-\frac{1}{1-x^5}}} = \cancel{\ldots} =$$

$$= \frac{\sqrt[5]{1-x^5}}{-x} \Rightarrow f(f(f(x))) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-\frac{1-x^5}{-x^5}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[5]{\frac{-x^5-1+x^5}{-x^5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{\frac{1}{x^5}}} = x \checkmark$$

$$f(f(f\ldots f(x)))))\ldots)) = x \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = 3k,\ k \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~1303~~ $1303 = 1 \bmod[3] \Rightarrow$

$$f_1(f_2(f_3\ldots f_{1303}(x))))\ldots)) = f(x) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}$$

$$f(2022) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-2022^5}} \Rightarrow$$

Ответ: $f(2022) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-2022^5}}$

Стр. 12

Чистовик

$$\cancel{\frac{x^2+z^2\cdot y^2}{x^2} \geq 2\cdot\sqrt{\frac{x^2\cdot y^2\cdot z^2}{x^2}}}$$

$$\frac{x^2+z^2\cdot y^2}{x^2} \geq 2\cdot\sqrt{x^2+\frac{y^2\cdot z^2}{x^2}} = 2\cdot z\cdot y = 28.$$

→ Наименьшее значение будет принимать

при рав-ве $x^2=\frac{z^2\cdot y^2}{x^2}$

$x^4=z^2\cdot y^2 \Rightarrow x=\sqrt{zy}=\sqrt{14}$

Ответ: $x=\sqrt{14}$.

№6

$a\in\mathbb{R}$ $\quad a\,ctg^3x+(a^2-a-3)\,ctg^2x+(3-3a-a^2)\,ctg\,x+$

$+3a=0.$

при $x=(0;\pi)$ принимает ... знач.

пусть $ctg\,x=1$, тогда $\cancel{a}+\cancel{a^2}-\cancel{a}-\cancel{3}+\cancel{3}-3\cancel{a}-\cancel{a^2}+\cancel{3a}=0$

$0=0$, $x_1=\frac{\pi}{4}$;

Сгруппируем $ctg\,x-1$:

$\cancel{a\cdot ctg^2x\cdot(ctg\,x-1)+a^2\,ctg\,x(ctg\,x-1)-}$

$\cancel{-3\cdot ctg\,x\,(+ctg-1)-3a\cdot(ctg\,x-1)=0.}$

$\cancel{a\cdot ctg^2x+a^2-3(ctg\,x)-3a}$

Черновик

$$A = \frac{3}{(1\cdot2)^2} + \frac{5}{(2\cdot3)^2} + \dots + \frac{97}{(48\cdot49)^2} + \frac{99}{(49\cdot50)^2} < 1$$

$$B = \frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}$$

$<1$

$(4-2\sqrt{3})^{\frac{1}{6}}$

$4 - 2\cdot 1{,}7 =$

$= 4 - 2\cdot\frac{17}{10} =$

$= \frac{20-17}{5} = \frac{3}{5} \approx$

$\approx \sqrt[6]{0{,}6} =$

$\sqrt[6]{\frac{6}{10}}$

$\frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \frac{7}{(3\cdot4)^2}$

$0{,}75$

$\frac{7}{144} \dots$

$$\begin{array}{r|l} 50 & 36 \\ -36 & 0{,}1 \\ 14 & \end{array}$$

$\cancel{\dfrac{\sqrt[2]{\sqrt[3]{(4-2\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)}}}{\sqrt[3]{2}}}$

$\sqrt{0{,}75} =$

$= \sqrt{\frac{3}{4}} =$

$3+2\sqrt{3}+1 = \frac{\sqrt{3}}{2} =$

$= \frac{1{,}7}{2}$

$\sqrt[2]{\sqrt[3]{(4-2\sqrt{3})}}\ \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}$

$\cancel{(a+b)(a^2 - ab + b^2)}$

$\cancel{(\sqrt{3}+1)(}$

$\sqrt[3]{\sqrt[2]{4-2\sqrt{3}}} \cdot \sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}+1}{2}} =$

$a^2 - 2ab + b^2$

$2 - 2\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{4}$

$2 - 2\sqrt{3}\cdot + 2$

$$= \sqrt[3]{\frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}\cdot(\sqrt{3}+1)}{2}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3-2\sqrt{3}+1}\cdot(\sqrt{3}+1)}{2}} =$$