МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Дзюба Георгий Дмитриевич**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **90**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	0	15	15	15

Лист 1.

Задача 1.

Дано:

$$A = \frac{\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}};$$

$$B = \frac{3}{(1\cdot 2)^2}+\frac{5}{(2\cdot 3)^2}+\dots+\frac{117}{(58\cdot 59)^2}+\frac{119}{(59\cdot 60)^2}$$

Найти: какое из чисел A или B больше?

Решение.

$$A = \frac{\sqrt[6]{(1+\sqrt{3})^2}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{3-1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = 1$$

разберём число B:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{3}{(1\cdot 2)^2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{4} = \frac{3}{1\cdot 4}\\
&\frac{5}{(2\cdot 3)^2} = \frac{5}{4\cdot 9}\\
&\frac{7}{(3\cdot 4)^2} = \frac{7}{9\cdot 16}\\
&\frac{119}{(59\cdot 60)^2} = \frac{1}{59^2} - \frac{1}{60^2} = \frac{119}{59^2\cdot 60^2}
\end{aligned}\right\} + \Rightarrow B = 1 - \frac{1}{60^2} < 1$$

Ответ: A больше, чем B

Задача 2.

Дано:

Загадано число 2022-значное, кратное 19, кратное 23

число начинается с 4

Найти: последнюю цифру 2022-знач. числа

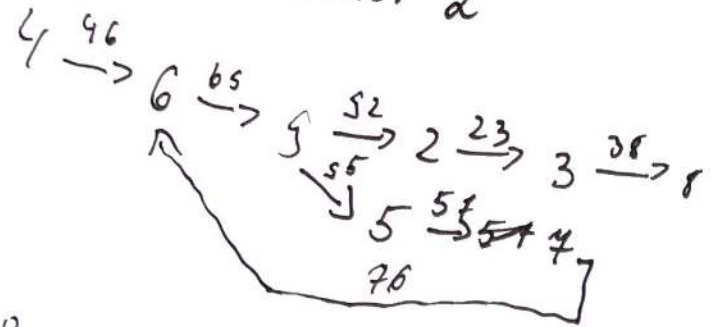
Решение.

если число кратно 19, то кратно: 38, 57, 76, 95...

если число кратно 23, то оно кратно: 23, 46, 69, 92

Начиная с 4 возможна следующая схема переходов от цифры к цифре:

Лисі 2



Видно, что цепочка... 9238 не продолжается ~~так как нет чисел, понинающихся 8~~.
Таким образом, 2022-значное число можно постриить так

1) 46 $\underbrace{9576\ 9576 \dots 9576}_{505\ раз}$; Последняя - 6

2) 46 $\underbrace{9576\ 9576 \dots 9578}_{504\ раза}$; Последняя - 8

Оівеі: 6 или 8

Задача 4.

Дано

$\angle$ пра вер. конуса в ос. сеч. $= 60^\circ$

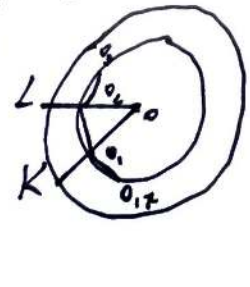
17 шаров.

$R = 2$

R-осн. кон - ?

Решение.

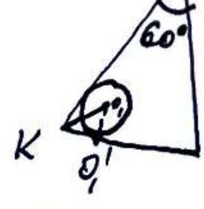
Вид сверху.

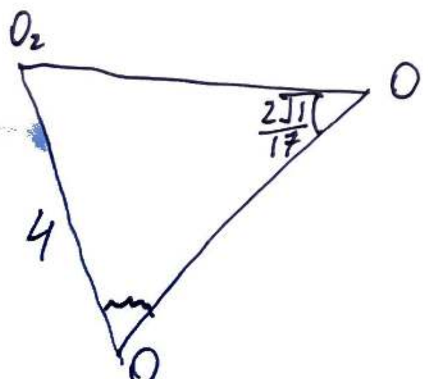


$O_1'; O_2' \dots O_{17}'$ - правильный 17и угольник, где O_K' - проекция O_K на пл-ть основ.

Осевое сечение.

$KO_1' = 2 \cdot ctg 30 = 2\sqrt{3}$





$\angle OO_1O_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{17} = \frac{15\pi}{34}$

$OO_1 = \frac{2}{\cos\frac{15\pi}{34}}$

Оівеі: $R_{осн.} = \frac{2}{\cos\frac{15\pi}{17}} + 2\sqrt{3}$

Лист 3.

2
Задача 3.

Дано:
$f(x) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}}$

Вычислить.
$f(f(f(f(f(\dots f(2022)))))\dots))$, где f применяется 1304 раза

Решение.

1) Пусть $\frac{1}{\sqrt[7]{1-x^7}} = t$.

$f(f(x)) = f(t) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-t^7}} =$

$= \frac{1}{\sqrt[7]{1-\frac{1}{1-x^7}}} = \sqrt[7]{\frac{x^7-1}{x^7}} = \sqrt[7]{1-\frac{1}{x^7}} = u$

2) $f(f(fx)) = f(u) = \frac{1}{\sqrt[7]{1-u^7}} = \frac{1}{\sqrt[7]{1-\left(1-\frac{1}{x^7}\right)}} = \sqrt[7]{\frac{1}{\frac{1}{x^7}}} = X$

3) Число 1304 при делении на 3 даёт остаток 2.
То есть это означает, что в ответе будет значение
$u = \sqrt[7]{1-\frac{1}{x^7}}$

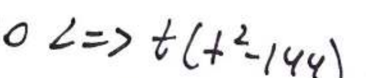
Ответ: $\sqrt[7]{1-\frac{1}{2022^7}}$

Задача 5.

Дано:
числа $a; b; c$
упорядочили так, что
$x_1 \le x_2 \le x_3$
Найти: все значения t, при
$a = t^3 - 144t$; $b = 2^t - 256$; $c = \sin t - \frac{\sqrt{3}}{2}$

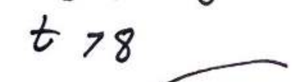
Решение.

1) $a > 0 \iff t(t^2-144) > 0$



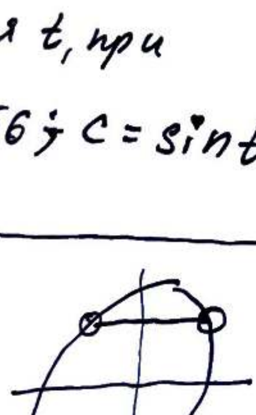
$t \in (-12; 0) \cup (12; +\infty)$

2) $b > 0 \iff 2^t > 256$
$t > 8$

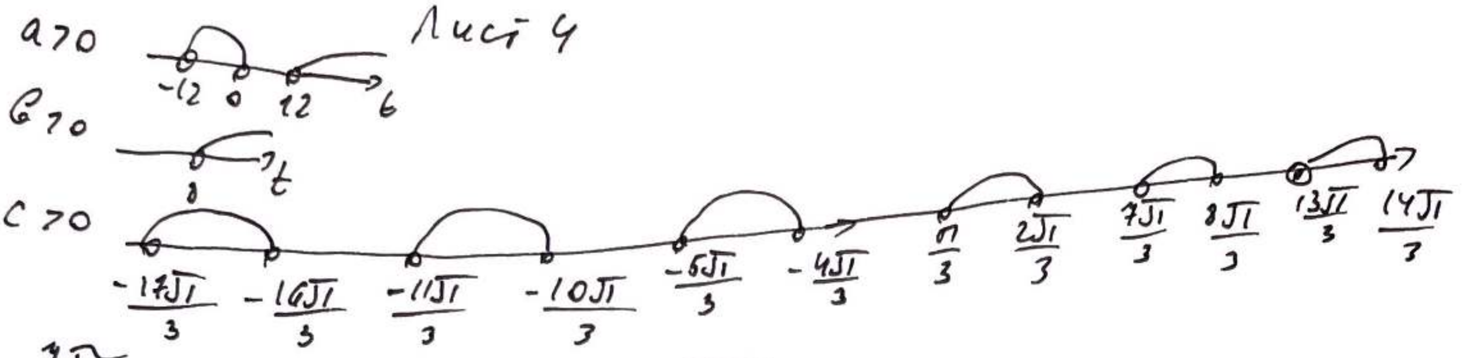


$t \in (8; +\infty)$

3) $c > 0 \iff \sin t > \frac{\sqrt{3}}{2} \iff$ ~~$t \in U$~~
$\iff t \in \cup\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right)$ $k \in Z$



Лист 4



$\frac{7\pi}{3} < \frac{3{,}2\cdot 7}{3} < 8$ $\qquad$ $\frac{13\pi}{3} > \frac{13\cdot 3}{3} > 12$, тогда

$\frac{8\pi}{3} > \frac{8\cdot 3{,}1}{3} > 8$

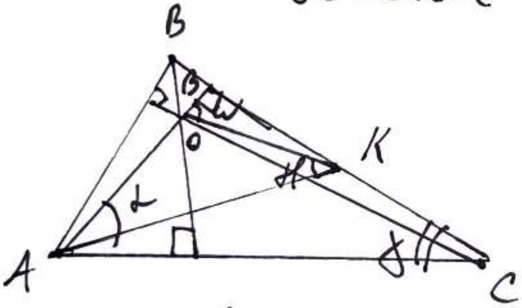
$-\frac{11\pi}{3} > \frac{-11\cdot 3{,}2}{3} > -12$

$-\frac{16\pi}{3} < \frac{-16\cdot 3}{3} = 16 < 12$

Ответ: $t \in \left(-\frac{11\pi}{3}; -\frac{10\pi}{3}\right) \cup \left(-\frac{5\pi}{3}; -\frac{4\pi}{3}\right) \cup$
$\cup \left(8; \frac{8\pi}{3}\right) \cup (12; +\infty)$

Задача 7. $\qquad$ Решение

Дано
$\triangle ABC$
AM - высот.
точка O
если AKO - MAX.
BM = 5
MC = 3
Найти MK



1) $\omega = \alpha + H$
$H = \omega - \alpha$ $\quad \Rightarrow \operatorname{tg} H$ max.

2) $\angle AKO$ - MAX; $AO = y$
$OM = x$
$MK = z$, то

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{z}{x+y}$; $\operatorname{tg}\omega = \frac{z}{x}$

$\operatorname{tg} H = \operatorname{tg}(\omega - \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\omega - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\omega\cdot\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\frac{z}{x} - \frac{z}{x+y}}{1 + \frac{z^2}{x(x+y)}} = \frac{z(x+y) - zx}{x^2 + xy + z^2}$

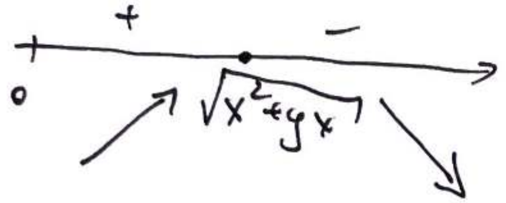
Лист 5.

3) $tg H = F(z)$,

Возьмём производную по z

$$F'_z = \frac{y(x^2+xy+z^2-zy\cdot z\cdot 2)}{(x^2+xy+z^2)^2} = \frac{y(x^2-xy-z^2)}{(x^2+xy+z^2)^2} = 0 \Rightarrow z^2 = x^2+xy$$

$$z = \sqrt{x(x+y)}$$



В этой точке достигается максимум тангенса, а значит и ~~тангенс~~ максимум острого угла H.

Отсюда вывод: $MK^2 = OM\cdot AM$

$OM = 5\cdot tg\beta$; $AM = 3tg\gamma$.

т.к. $\beta+\gamma = 90^\circ \Rightarrow tg\alpha = ctg\beta$; тогда

$tg\beta\cdot tg\gamma = 1 \Rightarrow MK^2 = 5\cdot tg\beta\cdot 3tg\gamma \,| \Rightarrow$

$| \Rightarrow MK^2 = 15$

$MK = \left[\begin{array}{l}\sqrt{15}\\ -\sqrt{15} \text{ − не подходит}\end{array}\right.$

Ответ: $\sqrt{15}$

Задача 6.

Дано:

$$\alpha ctg^3x + (2\alpha^2-\alpha-2)ctg^2x + (2-4\alpha-2\alpha^2)ctg x + 4\alpha = 0$$

Найти:

значение пар-а $\alpha \in R$, при которых наибольшее рас-ие между корнями при $[0; \pi]$ принимает наименьшее знач.

Лист 6.

Решение.

Замена перемен

$ctg\,x = t \qquad x \in (0;\pi)$

$at^3 + (2a^2 - a - 2)t^2 + (2 - 4a - 3a^2)t + 4a = 0$

Рас-им множество пер-ых a:

можно доказать, что $t = 1$ - корень, тогда

точка падения

$at^3 + (2a^2 - a - 2)t^2 + (2 - 4a - 2a^2)t + 4a\,(t - 1at - a + 2)$

$\cancel{2a^2}$

$-4a + 4a$

$(t - 1)(at^2 + 2(a^2 - 1)t - 4a) = 0$

$\left[\begin{array}{l} a = 0 \\ at = 0 \end{array}\right.$

$t^2 + 2(a - \frac{1}{a})t - 4 = 0$

$t_1 = -2a;\ t_2 = \frac{2}{a}$

То есть, при $a = 0$ два корня $t = 1;\ t = 0$

$x = \frac{\pi}{4}$ и $x = \frac{\pi}{2}$

Если $a \neq 0$

(1) $ctg\,x = \frac{2}{a}$ (2) $ctg\,x = -2a$

Т.к. урав-ие (1) и (2) имеют корни в разных четвертях, и т.к. ~~произведение~~ произведение $ctg < 0$

$(-2a \cdot \frac{2}{a} = -4 < 0)$, то

максимальные рас-ния больше, чем $\frac{\pi}{4}$

Ответ: $a = 0$

Черновик.   лист 1

$\cancel{\frac{1}{(1+\sqrt{3})}}$

$\frac{3}{1\cdot 4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$

$\frac{119}{(55\cdot 60)} = \frac{1}{59^2} - \frac{1}{69^2} \cdot 2 \cdot \frac{119}{59^2\cdot 69^2}$

$\cancel{tg\,w = \frac{z}{x}}$

$\frac{tg\,w - tg\,L}{1 + tg\,w \cdot tg\,L} = \frac{\frac{z}{b} - \frac{z}{x+y}}{1 + \frac{z^2}{t(x+y)}}$ - верно!

$\cancel{1}$ $\cancel{2}$ $\cancel{3}$ $\cancel{4}$ 5 6 $\cancel{7}$