МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Дмитренко Андрей Игоревич**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **80**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	10	15	10	15	15	0

Чистовик (2 лист)

Задача 3

$$f(x)=\left(\frac{1}{1-x^{11}}\right)^{\frac{1}{11}};\ f(f(x))=\left(\frac{1}{1-\frac{1}{1-x^{11}}}\right)^{\frac{1}{11}}=\left(\frac{x^{11}-1}{x^{11}}\right)^{\frac{1}{11}};\ f(f(f(x)))=\left(\frac{1}{1-\frac{x^{11}-1}{x^{11}}}\right)^{\frac{1}{11}}=x\Rightarrow$$

$\Rightarrow f(f(f(f(x))))=f(x)\Rightarrow f(x)=f(f(f\ldots(f(x))\ldots)$, где f применяется $1+3k$ раза, где $k\in N$; где $f(x)$ — уже одно применение функции f, тогда аналогично $f(f(x))=f(f(\ldots(f(x))\ldots)$, где f примен. $2+3k$ раза, а т.к. $1306=1305+1=435\cdot3+1\Rightarrow$ $\Rightarrow$ функция прим. для $x=2022$; $435\cdot3+1$ раза $\Rightarrow f(\underset{435\cdot 3+1}{f_{\ldots}}(f(2022)\ldots)=2022$,

Ответ: 2022

Задача 6

$$a\,tg^3x+tg^2x(2-a-a^2)+(a^2-2a-2)\,tgx+2a=0$$

ОДЗ: $\cos x\neq0$, $x=\frac{\pi}{2}+\pi t;\ t\in Z$,

$$(tgx-a)(a\,tg^2x+(2-a)\,tgx-2)=0$$

$$\left(\left[\begin{array}{l} tgx=a\\ a\,tg^2x+(2-a)\,tgx-2=0\Leftrightarrow(tgx-1)(a\,tgx+2)=0\end{array}\right.\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\left[\begin{array}{l} tgx=a\\ tgx=1\\ a\cdot tgx+2=0\end{array}\right.\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+\pi n;\ n\in Z\\ x=arctg(a)+\pi k;\ k\in Z,\\ a\,tgx+2=0\end{array}\right.$$

1) $a=0$: тогда вот решения $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+\pi n_0\\ x=\pi k_0\end{array}\right.$ $n_0,k_0\in Z$, ; т.к. корни $\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}\\ x=0\end{array}\right.\Rightarrow$ расстояние между корнями $\frac{\pi}{4}$

2) $a\neq0$: тогда вот решения $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+\pi n_1\\ x=arctg(a)+\pi k_1\\ x=-arctg\frac{2}{a}+\pi l_1\end{array}\right.$ $n_1,k_1;l_1\in Z$, ; т.к. корни $\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}\\ x=arctg\,a\\ x=-arctg\frac{2}{a}\end{array}\right.$; расстояния между корнями: 1) $\left|\frac{\pi}{4}-arctg\,a\right|$ 2) $\left|\frac{\pi}{4}+arctg\frac{2}{a}\right|$ 3) $\left|arctg\,a+arctg\frac{2}{a}\right|$

Чистовик (1 лист)

Задача 1

$A^3 = \frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}\,(\sqrt{3}-1)}{2}$; $B = \frac{3}{(1\cdot2)^2}+\frac{5}{(2\cdot3)^2}+\dots+\frac{77}{(38\cdot39)^2}+\frac{79}{(39\cdot40)^2}$;

$B=\frac{3}{(1\cdot2)^2}+\dots+\frac{(b+1)^2-b^2}{b^2\cdot(b+1)^2}+\dots+\frac{79}{(39\cdot40)^2}$; $\frac{(b+1)^2-b^2}{b^2\cdot(b+1)^2}=\frac{(b+1-b)(2b+1)}{b^2\cdot(b+1)^2}=\frac{2b+1}{(b(b+1))^2}\Rightarrow$

$\Rightarrow$ если $a_1=\frac{3}{(1\cdot2)^2}$; $a_2=\frac{5}{(2\cdot3)^2}\dots$; $a_n=\frac{2n+1}{(n(n+1))^2}$; то $a_n=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{(n+1)^2-n^2}{(n(n+1))^2}=\frac{2n+1}{(n(n+1))^2}\Rightarrow$

$\Rightarrow B=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\dots+\frac{1}{39^2}-\frac{1}{40^2}=1-\frac{1}{40^2}=\frac{40^2-1}{40^2}=\frac{39\cdot41}{40^2}$

$A^6=\frac{(4+2\sqrt{3})(3-2\sqrt{3}+1)}{4}=\frac{4^2-(2\sqrt{3})^2}{4}=\frac{16-12}{4}=1\Rightarrow A=1$; т.к. $A>0$;

$A \vee B$

$1 \vee \frac{39\cdot41}{40^2}=1-\frac{1}{40^2}\Rightarrow A>B$ Ответ: $A>B$

Задача 2

$\overline{4a_2a_3\dots a_{2021}}\in N$; по усл: $\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\overline{4a_2}\,\vdots\,19\\ \overline{4a_2}\,\vdots\,23\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}\overline{a_2a_3}\,\vdots\,19\\ \overline{a_2a_3}\,\vdots\,23\end{array}\right.\\ \vdots\\ \left[\begin{array}{l}\overline{a_{2020}a_{2021}}\,\vdots\,19\\ \overline{a_{2020}a_{2021}}\,\vdots\,23\end{array}\right.\end{array}\right.$

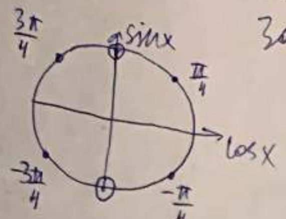
Все числа $\vdots\,19$ или $\vdots\,23$ двузначные: 19, 23, 38, 46, 57, 69, 76, 92, 95 $\Rightarrow$ если двузн. число начинается на 8, то $\varnothing$, если двузн. число начинается на 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7, то оно определяется единств. образом, а если на 9, то $\overline{9a_n}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a_n=2\\ a_n=5\end{array}\right.$

$\overline{4a_2}\Rightarrow a_2=6\Rightarrow a_3=9\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a_4=2\Rightarrow a_5=3\Rightarrow a_6=8\Rightarrow\varnothing\\ a_4=5\Rightarrow a_5=7\Rightarrow a_6=6\Rightarrow a_7=9;\ a_3=a_7 \text{ и } a_2=a_6\end{array}\right.$

$\Rightarrow a_k=a_{k+4}$; при $k\geq2$; $\Downarrow$ если есть число $\overline{9a_t}$, то $a_t=5$;

$\Downarrow$ $\left[\begin{array}{l}a_2=a_{2+4(x_1-1)}\\ a_3=a_{3+4(x_2-1)}\\ a_4=a_{4+4(x_3-1)}\\ a_5=a_{5+4(x_4-1)}\end{array}\right.$ где $x_1;x_2;x_3;x_4\in N$; $x_1;x_2;x_3;x_4\geq1\Rightarrow$ $\Rightarrow$ т.к. $a_{2021}=a_{5+4\cdot504}=a_5=7\Rightarrow$ Ответ: 7

Чистовик (3 лист)



Задача 6

I если $0 \le \operatorname{arctg} a \le \frac{\pi}{4}$, то 1) $\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} a$
2) $\frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg}\frac{2}{a}$
3) $\operatorname{arctg} a + \operatorname{arctg}\frac{2}{a}$

II если $\frac{\pi}{4} < \operatorname{arctg} a < \frac{\pi}{2}$, то 1) $\operatorname{arctg} a - \frac{\pi}{4}$
2) $\frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg}\frac{2}{a}$
3) $\operatorname{arctg} a + \operatorname{arctg}\frac{2}{a}$

III если $-\frac{\pi}{4} \le \operatorname{arctg} a \le 0$, то 1) $\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} a$
2) $\frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg}\frac{2}{a}$
3) $-(\operatorname{arctg} a + \operatorname{arctg}\frac{2}{a})$

IV если $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} a \le -\frac{\pi}{4}$, то 1) $\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} a$
2) $-(\frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg}\frac{2}{a})$
3) $-(\operatorname{arctg} a + \operatorname{arctg}\frac{2}{a})$

в I: $2\pi k_4 \le a \le 1 + 2\pi k_4$; 1) $\max(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} a) = \frac{\pi}{4}$
2) $\max(\frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg}\frac{2}{a}) \le \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

во II: $1 + 2\pi k_5 < a$

$k_4; k_5; k_6; k_7 \in Z$ 3) $\max(\underbrace{\operatorname{arctg} a}_{<\frac{\pi}{2}} + \underbrace{\operatorname{arctg}\frac{2}{a}}_{\le\frac{\pi}{4}}) \le \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$, т.к.

во III: $-1 + 2\pi k_6 \le a < 2\pi k_6$

во II: 1) $\max(\operatorname{arctg} a - \frac{\pi}{4}) \le \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$

в IV: $a < -1 + 2\pi k_7$

2) $\max(\frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg}\frac{2}{a}) = \frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg} 2$
3) $\max(\underbrace{\operatorname{arctg} a}_{<\frac{\pi}{2}} + \underbrace{\operatorname{arctg}\frac{2}{a}}_{\le \operatorname{arctg} 2}) < \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} 2$

в III: $\max 1) = \frac{\pi}{4}$
$\max 2) \le \frac{\pi}{4}$
$\max 3) = \frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg} 2$

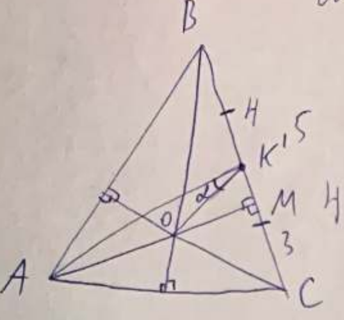
в IV: $\max 1) \le \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}$
$\max 2) = \operatorname{arctg} 2 - \frac{\pi}{4}$
$\max 3) < \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} 2$; $\operatorname{arctg} 2 > \operatorname{arctg} 1 \Rightarrow$ в I: $\max = \frac{3\pi}{4}$

во II $\frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg} 2 \le \max < \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} 2$

в III: $\max = \frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg} 2$; в IV: $\max = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} 2 \Rightarrow \min(\max) = \frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg} 2$

и достиг. при $-1 + 2\pi k \le a \le 2\pi k_6$ Ответ: $-1 + 2\pi k_6 \le a \le 2\pi k_6$; $k_6 \in Z$

чистовик (4 лист)

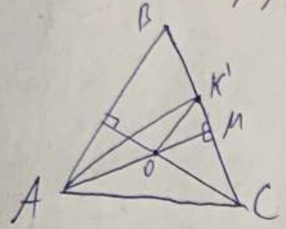


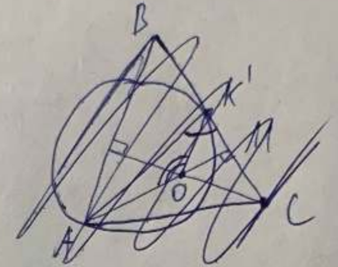
K' – середина BC; если K = K', то ∠ максимален

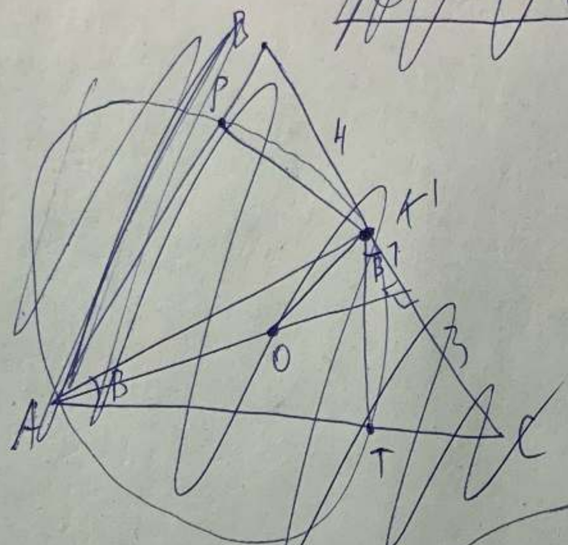
⇒ Ответ: 4

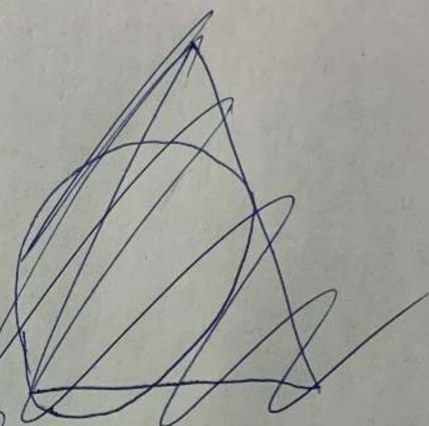
док-во: если окр. описать около △ AK'O, то она коснётся BC ⇒ любой другой угол меньше, т.к. он равен меньшая дуга $\frac{AO}{2} - \frac{X}{2}$; где X – вторая дуга, которую отсекает этот угол.

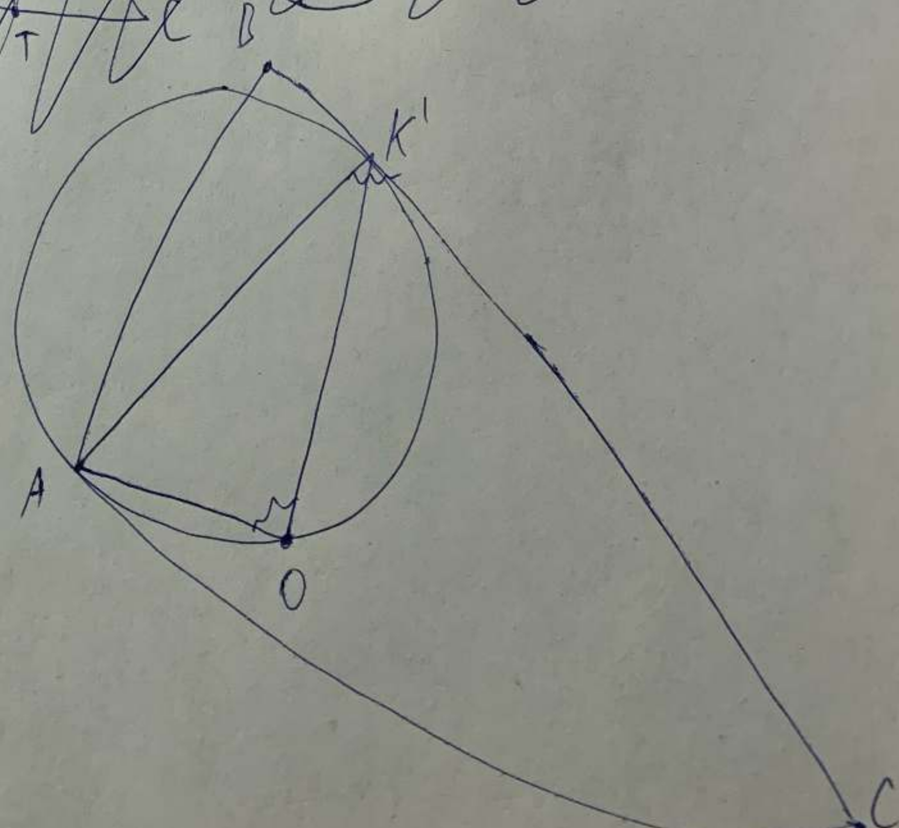
докажем, что окружн. опис. около △ AOK' касается BC:











черновик

$$\frac{a+2}{(b\cdot(b+1))^2} = \frac{a+2}{(b^2+b)^2} = \frac{a+2}{b^4+2b^3+b^2} = \frac{a+2}{b^2(b+1)^2};$$

$a_1 = 3 \quad \frac{3}{4} = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} = 1 - \frac{1}{4}$

$a_2 = 5 \quad \frac{5}{36} = \frac{5}{(2\cdot 3)^2} = \frac{1}{4} + x \Rightarrow x = -\frac{1}{9}$

$$\frac{77}{(38\cdot 39)^2} = \frac{1}{38^2} - \frac{1}{39^2} = \frac{39^2-38^2}{(38\cdot 39)^2} = \frac{(39-38)(77)}{(38\cdot 39)^2}$$

$\overline{a_1 a_2 \ldots a_{2021}} \in N$

$\overline{4 a_2 a_3 \ldots a_{2021}}$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \overline{4a_2} \vdots 19 \\ \overline{4a_2} \vdots 23 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \overline{a_2 a_3} \vdots 19 \\ \overline{a_2 a_3} \vdots 23 \end{array}\right. \\ \vdots \\ \left[\begin{array}{l} \overline{a_{2020} a_{2021}} \vdots 19 \\ \overline{a_{2020} a_{2021}} \vdots 23 \end{array}\right. \end{cases}$$

a_{2021} - ?

все двузн. $\vdots 19$: 19, 38, 57, 76, 95; все двузн. : 23 — 23, 46, 69, 92 $\Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{a_2 = 6}$

$\overline{6a_3} \Rightarrow \boxed{a_3 = 9}$

$\overline{9a_4} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a_4 = 2 \Rightarrow \overline{2a_5} \Rightarrow \boxed{a_5 = 3} \Rightarrow a_6 = 8 \Rightarrow \\ a_4 = 5 \Rightarrow \overline{5a_5} \Rightarrow \boxed{a_5 = 7} \Rightarrow a_6 = 6 \end{array}\right.$

$\Rightarrow a_7 = 0$

$\Rightarrow a_7 = 9 \Rightarrow \ldots$

2020 | 4; 20; 20; 505

$505 \times 4 = 2020$

$2016 + 5$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}} = \frac{1}{(1-x^4)^{\frac{1}{4}}} = \frac{(1-x^4)^{\frac{10}{4}}}{1-x^4}$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{1-x^4}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{1+x^4}{1-x^{22}}\right)^{\frac{1}{4}};$$

~~$f(x) = (1+x^4)(1+x^{22})(1+x^{44})\ldots(1+x$~~

$$f(x) = \left(\frac{1}{1-x^{11}}\right)^{\frac{1}{11}} \nearrow f(f(x)) = \left(\frac{1}{1-\frac{1}{1-x^{11}}}\right)^{\frac{1}{11}} \nearrow f(f(f(x))) = \left(\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{1-x^4}}}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$f(f(x)) = \left(\frac{1}{\frac{-x^4}{1-x^4}}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{x^4-1}{x^4}\right)^{\frac{1}{4}} \quad f(f(f(x))) = \left(\frac{1}{1-\frac{x^4-1}{x^4}}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{\frac{1}{x^4}}\right)^{\frac{1}{4}} = (x^4)^{\frac{1}{4}} = x$$

$a_1 = a_4 =$

1305 | 3; 12; 10; 9; 15; 435

$$a^4 + 2a^2 - a^3 - a^4 + a^3 - 2a^2 - 2a + 2a = 0$$

$$tg^3 x + \left(\frac{2}{a} - 1 - a\right) tg^2 x + \left(a - 2 - \frac{2}{a}\right) tg x + 2 = 0$$

$$(tg x - a)\left(tg^2 x + \left(\frac{2}{a} - 1\right) tg^2 x\right.$$