МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Дорогин Николай Антонович**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **80**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	10	15	10	15	15	0

Задача 1

$$A=\frac{\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[6]{3+1+2\sqrt{3}}\,\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[6]{(\sqrt{3})^2+1+2\sqrt{3}}\,\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}}=$$

$$=\frac{\sqrt[6]{(\sqrt{3}+1)^2}\,\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}}{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{\frac{3-1}{2}}=1$$

$B=\frac{3}{(1\cdot 2)^2}+\frac{5}{(2\cdot 3)^2}+\ldots+\frac{79}{(39\cdot 40)^2}$; представим число B в общем виде:

$B=\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\frac{(n+1)^2-n^2}{n^2(n+1)^2}=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}$; тогда послед. будет выглядеть:

$B=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{39^2}-\frac{1}{40^2}=1-\frac{1}{40^2}$;

Тогда

$1>1-\frac{1}{40^2}$

$A>B$ Ответ: число A больше

На 23 делятся числа: 23; 46; 69; 92
На 19 делятся числа: 19; 38; 57; 76; 95
Первая цифра → 4; тогда 2я точно 6; 3я точно 9; а 4я может быть или 2 или 5. НО! 2 не возможна т.к. след. пос. будет 38, а с 8 никакое число начинаться не может ⇒ 4я цифра → 5, после 7; после 6; а за 6 идет 9, значит получился цикл.
469576957... Всего цифр 2022 в нашем числе;
Цикл длиной 4; тогда искомая цифра место; это остаток от 2022-2 при делении на 4 ⇒ остаток = 0;
Значит искомая цифра = 6

Ответ: 6

Задача 3

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[9]{1-x^9}}$$

$$f(f(x))=\frac{1}{\sqrt[9]{1-\frac{1}{1-x^9}}}=\frac{\sqrt[9]{1-x^9}}{-x}$$

$$f(f(f(x)))=\frac{1}{\sqrt[9]{1+\frac{1-x^9}{-x}}}=x$$

Наша функция применяется 1305 раз;

$1305 \vdots 3$ и $f(f\ldots(x))=x$; тогда

$$f(f(f(f(\ldots f(2022)))))=2022$$

Ответ: 2022

Задача 4

Дано:

[redacted]

конус

центр – D;

центр 1го шара – O_1

радиус шара $r=2$

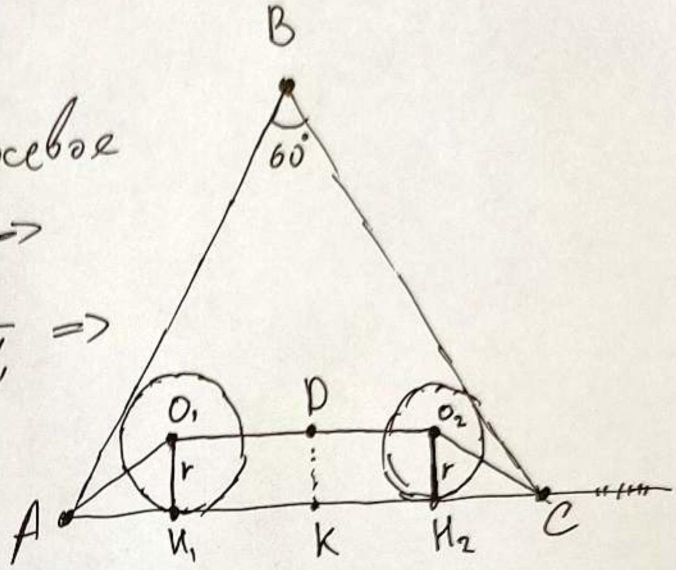
Решение:

центральное осевое сечение ABC =>

$ctg(30^\circ) = \sqrt{3} = \frac{AH_1}{O_1H_1}$ =>

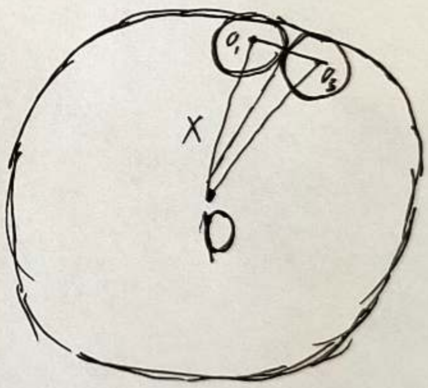
$(OH_1 = r = 2)$

=> $AH_1 = 2\sqrt{3}$



R – искомый радиус = $R = AK = AH_1 + H_1K = 2\sqrt{3} + KH_1$

у нас 17 шаров, а значит у нас образуется правильный 17 угольник



Пусть $DO_1 = x$; тогда

$H_1K = O_1D = x$

$\alpha = \angle O_2DO_3 = \frac{360}{17} = \frac{2\pi}{17}$ =>

$\frac{\alpha}{2} = \angle O_1DH = \frac{\pi}{17}$; $\sin\left(\frac{\pi}{17}\right) = \frac{2}{x}$ => $x = \frac{2}{\sin\left(\frac{\pi}{17}\right)}$

Но $R = 2\sqrt{3} + H_1K$ => $R = \frac{2}{\sin\frac{\pi}{17}} + 2\sqrt{3}$

Ответ: $\frac{2}{\sin\frac{\pi}{17}} + 2\sqrt{3}$

Задача 5 Лист 5 Чистовик №5

$a = t^3 - 121t$

$b = 2^t - 32$

$c = \sin(t) - \frac{\sqrt{3}}{2}$

Ответ: $(-11; \frac{2\pi}{3} - 4\pi) \cup (\frac{\pi}{3} - 2\pi; \frac{2\pi}{3} - 2\pi) \cup (\frac{\pi}{3} + 2\pi; \frac{2\pi}{3} + 2\pi) \cup$
$\cup (11; +\infty)$

$t^3 - 121t > 0; t(t^2 - 11^2) > 0; t(t-11)(t+11) > 0 \Leftrightarrow t \in (-11; 0) \cup (11; +\infty)$

$2^t - 32 > 0 \Leftrightarrow 2^t > 32 \Leftrightarrow t \in (5; +\infty)$

$\sin(t) - \frac{\sqrt{3}}{2} > 0 \Leftrightarrow \sin(t) > \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow t \in (\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n)$ где $n \in \mathbb{Z}$

1) рассмотри случай при $t > 11$:

число $a > 0$
число $b > 0$ $\Bigg\}$ $\Rightarrow$ вариант при $t > 11$ подходит

2) в других случаях нас может удовлет. только когда число "b" и число "c" больше 0, или когда число "a" и число "c" больше 0, т.е. пересеч. $t \in (\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n)$ и $11 > t > 5$ и объединить с пересеч $t \in (\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n)$ и $t \in (-11; 0)$

т.к. $\frac{\pi}{3} - 4\pi < -11 < \frac{2\pi}{3} - 4\pi$ т.к. $\pi \approx 3{,}141592 \Rightarrow 3{,}1 < \pi < 3{,}2$ нам подходят промежутки $(-11; \frac{2\pi}{3} - 4\pi)$ и $(\frac{\pi}{3} - 2\pi; \frac{2\pi}{3} - 2\pi)$ аналогично для др. вариантов $\Rightarrow (\frac{\pi}{3} + 2\pi; \frac{2\pi}{3} + 2\pi)$ т.к. $\frac{2\pi}{3} < 5$, а $11 < \frac{13\pi}{3}$; тогда объединение даст ответ:

Ответ: $(11; +\infty) \cup (-11; \frac{2\pi}{3} - 4\pi) \cup (\frac{\pi}{3} - 2\pi; \frac{2\pi}{3} - 2\pi) \cup (\frac{\pi}{3} + 2\pi; \frac{2\pi}{3} + 2\pi)$

Задача № 6

$a\cdot ctg^3(x)+(2a^2-a-2)ctg^2(x)+(2-4a-2a^2)ctg(x)+4a=0$

по теореме Виета и угадав корни, а это числа: 1; $\frac{2}{a}$; $-2a$. Тогда мы сможем разложить множ.

1) $(ctg(x)-1)(ctg(x)+2a)(ctg(x)-\frac{2}{a})=0$ при усл., что $a\neq0$

2) $(ctg(x)-1)(ctg(x))=0$, при усл, что $a=0$

Для 2го корнями будут являтся числа $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{4}$; а значит макс. разность для (2) будет равна $\frac{\pi}{4}$

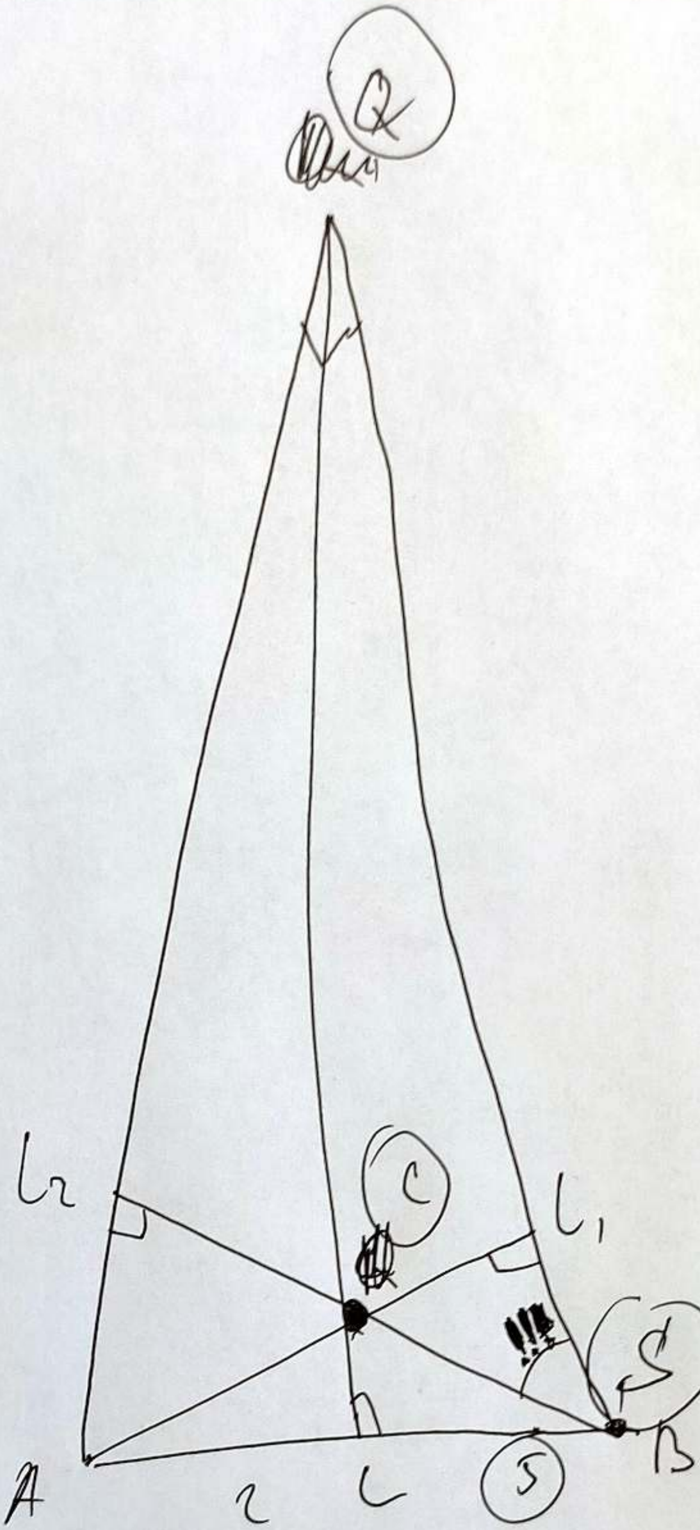
Для 1го есть корни $2a$, $-\frac{1}{a}$, то один из них точно <0, т.к. они разных знаков. Если мы приравняем к отриц. $ctg(x)$, то получим корень на промежутке от $\frac{\pi}{2}$ до π. А тогда разность с корнем $\frac{\pi}{4}$ будет больше $\frac{\pi}{4}$; нас у нас просят min и есть пример для $\frac{\pi}{4}$; значит $a\neq0$ не подходит =>

Ответ: $a=0$; разность равна $\frac{\pi}{4}$

Черновик

Лист 7

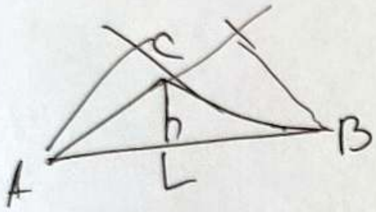
43 12

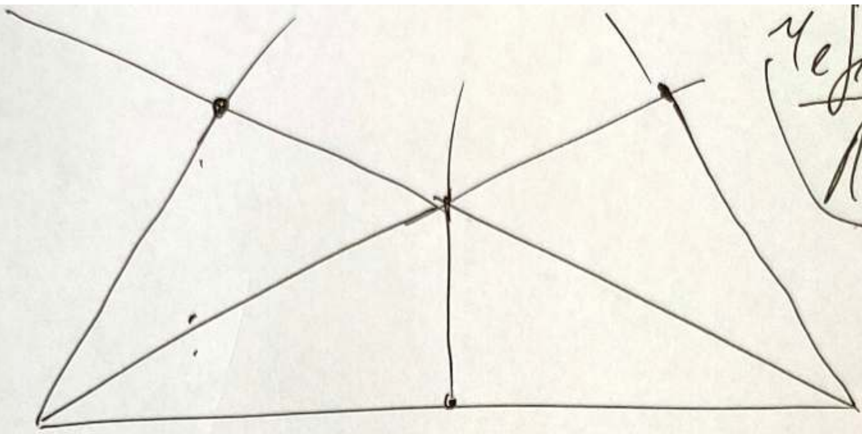


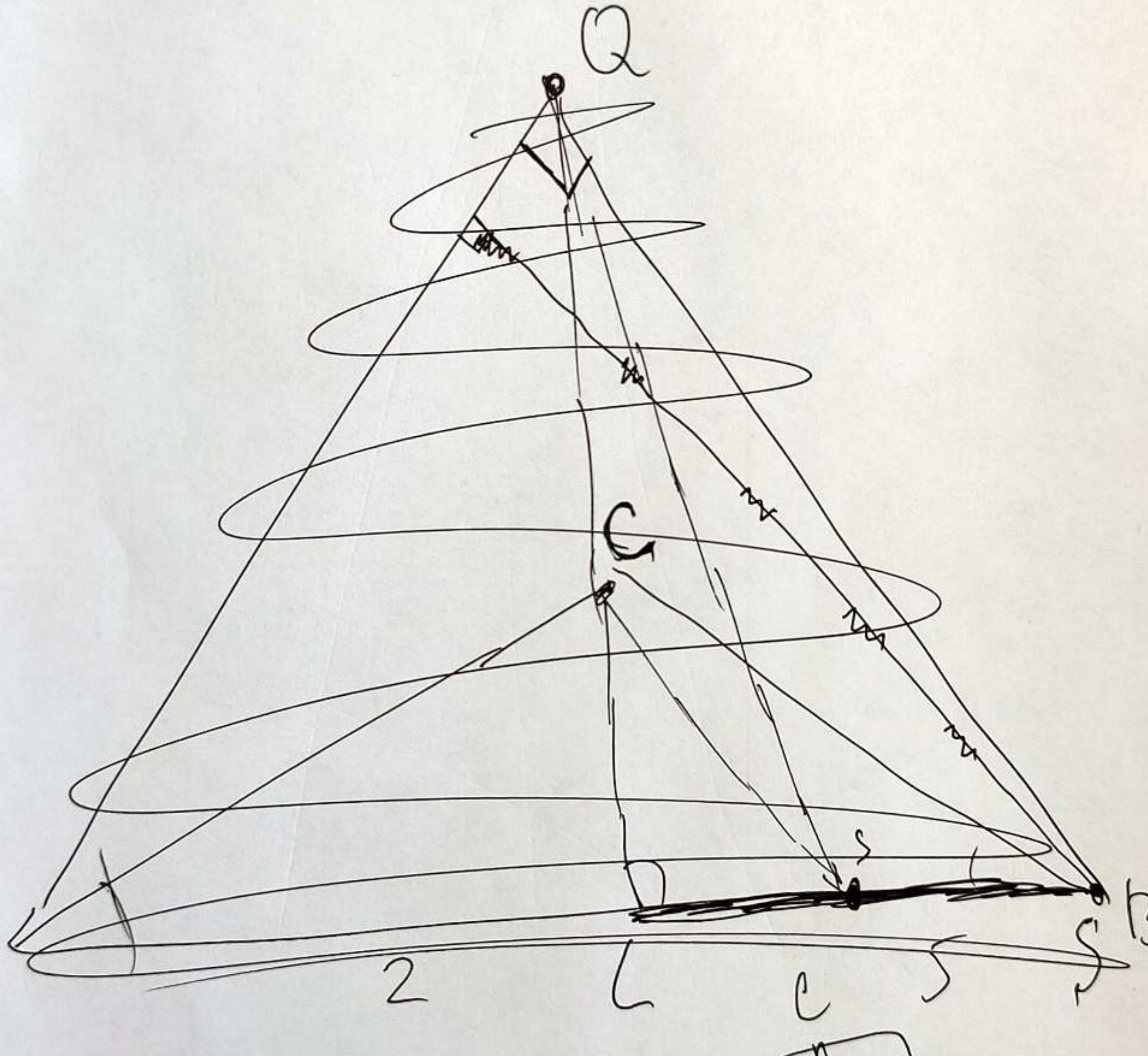
Черновик 4

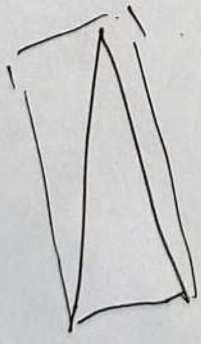
Лист 12

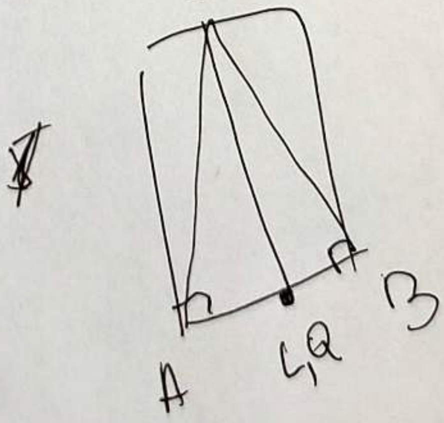
из 12









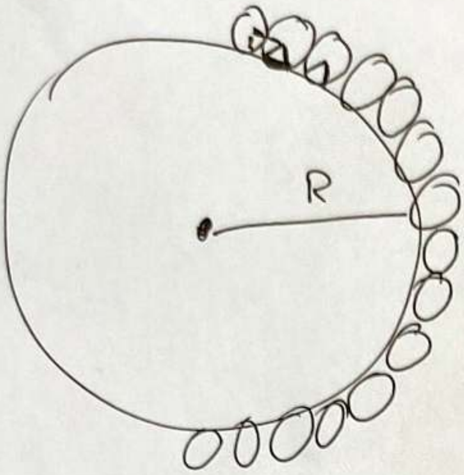


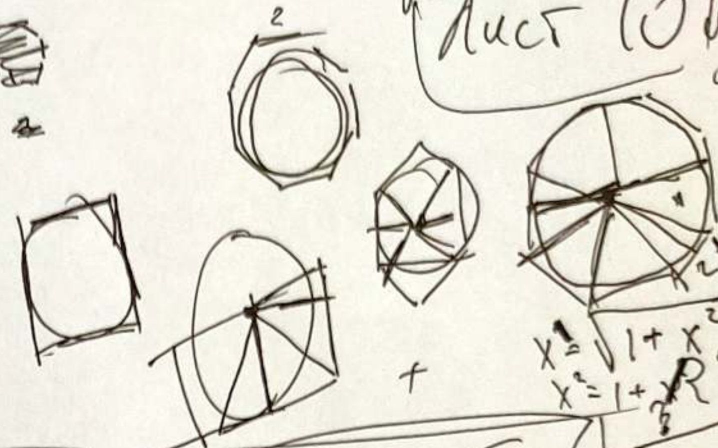
Черновик 5

Лист 11

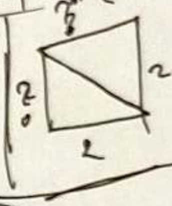
из 12

Черновик
Лист 10 из 12





$x^2 = \sqrt{1+x^2}$
$x^2 = 1+R$



$a = t^3 - 121t \le b = 2^t - 32 \le c = \sin(t) - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$[-1; 1]$

$a = t^3 - 11^2 t$

2	1
4	2
8	3
16	4
32	5

5....

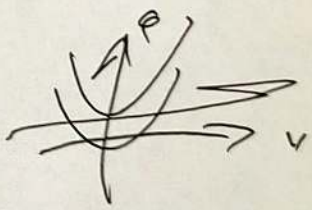
$t \in [\ ; \frac{\pi}{2}]$

$t \in (5; +\infty)$ $t \in [-1{,}5...; 1{,}5]$ $\frac{3{,}14}{2} = \frac{314}{200}$

$314 : 200 = 1{,}5...$

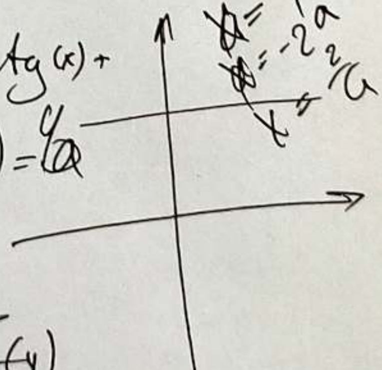
невозможно!

$a \cdot ctg^3(x) + (2a^2 a - 2)ctg^2(x) + (2 - 4a - 2a^2)ctg(x) + 4a = 0$



$ctg(x)\,(a \cdot ctg^2(x) + (2a^2 + a - 2)ctg(x) + (-2a^2 - 4a + 2)) = 4a$

$a = 1$
$a = -2$
$\frac{a}{2}$



$360 : 17 = 27{,}0$ $\approx 27°$ ≈ 54

~~$actg^2(x) + 2a^2 + a - 2\,ctg(x)$~~

$t(at^2 + 2a^2 t + at - 2t - 2a^2 - 4a + 2)$

Черновик 2

$t(2a^2 t + at^2 + at - 2t - 2a^2 - 4a + 2)$

$$\frac{\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}}=$$

$$\frac{3}{(2!)^2}+\frac{5}{(3!)^2}+\frac{7\cdot 2}{(4!)^2}+\frac{11\cdot 2\cdot 3}{(5!)^2}+\dots$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[9]{1-x^9}}=\frac{1}{\sqrt[9]{1^9-x^9}}=\frac{1}{\sqrt[9]{1^{2\cdot 4,5}-x^{2\cdot 4,5}}}$$

$$f(2022)=\frac{1}{\sqrt[9]{1-2022^9}}=\frac{1}{\sqrt[9]{(1-2022^{4,5})(1+2022^{4,5})}}$$

$$\frac{1}{\sqrt[9]{1-\left(\frac{1}{\sqrt[9]{1-2022^9}}\right)^9}}=\boxed{\frac{1}{\sqrt[9]{1-\frac{1}{1-2022^9}}}}$$

$$\frac{1}{\sqrt[9]{1-\frac{1}{\sqrt[9]{1-\frac{1}{1-2022^9}}}}}$$

Черновик Лист 1

Черновик $\boxed{\text{Лист 9}}$ из 12

2022 изми числа

$\overline{abc\dots n}$

$\overline{ab}:19$

$\overline{bc}:23$

$a=4$

$n-?$

$19\cdot 2=38$, $19\cdot 3=57$, $19\cdot 2=38$, $19\cdot 4=76$, $19\cdot 5=95$, $23\cdot 4=92$

$c=9$

$d=2/5$

46 "a 6"

$b=6$
$c=9$

23
46
69
92

1409

2 не возможно → 38 искать!

5 → 7695

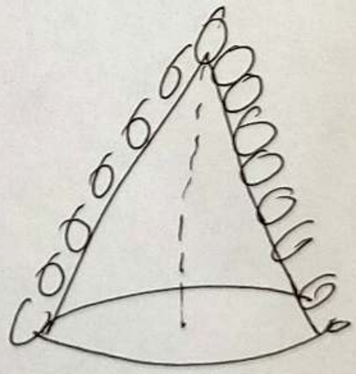
4 6 9 5 7 | 6 9 5 7 | 6 … 7 |
1 2 3 4 5 | 6 7 8 9 | 10 11 12 13 | 14 15 16 17 |

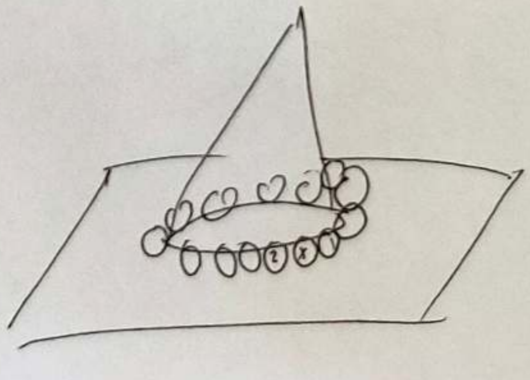
| 18 19 20 21 |

| 2021 2022 2023 2024

$n=6$

Задание 2





Черновик №3

лист 8 из 12

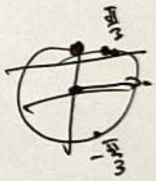
$$B = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2-n^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \Rightarrow$$

$$B = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{39^2} - \frac{1}{40^2} = 1 - \frac{1}{40^2}$$

$$A = \frac{\sqrt[6]{3+1+2\sqrt{3}}\,\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{\sqrt{3}^2+2\sqrt{3}+1}\,\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt[6]{(\sqrt{3}+1)^2}\,\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{3-1}{2}} = 1$$

$a = t^3 - 11^2 t$ $\quad b = 2^t - 32$ $\quad c = \sin(t) - \frac{\sqrt{3}}{2}$



$t \in \mathbb{R}$ $\quad t \in (5; +\infty)$ $\quad t \in [-1{,}5\dots; 1{,}5\dots]$

$t \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

$t = -\frac{\pi}{2}$ ср. < 0

$t = 0$

$a = 0$ $\quad b = -31$ $\quad c = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \underbrace{-\frac{\pi^3}{8} + 11^2 \cdot \frac{\pi}{2}}_{a=}$ $\quad \underbrace{2^{-\frac{\pi}{2}} - 32}_{b=}$ $\quad \underbrace{-1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}_{c}$

$t = \frac{\pi}{2}$

$a = \frac{\pi^3}{8} - 11^2 \frac{\pi}{2}$ $\quad b = 2^{\frac{\pi}{2}} - 32$ $\quad c = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$

< 0 $\quad < 0$ $\quad > 0$

$$\frac{\pi^3}{8} - 11^2\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi^2}{4} - 11^2\right) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 11\right)\left(\frac{\pi}{2} + 11\right) < 0$$

$t = 0$ $\quad a = t(t^2 - 11^2) = t(t-11)(t+11)$

$\boxed{b \le 0!}$

$a \ge 0$

~~при~~

$(-11; 0)$

$c > 0$ при $t \in [-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}]$

$t = 0$