



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Зенкин Вячеслав Николаевич**

Класс: **10 класс**

Технический балл: **70**

Дата проведения: **12 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	10	15	15	0	15	15	0

$$\sqrt{1N} = 22 \cdot 38 + 2 = 838$$

$$N_{\text{min}} = 838$$

NUM 2
NUM 2

Числовик мммм

$$\sqrt{5} \quad t^3 + 4t^2 + 4t + a = 0 \quad x < y < z$$

$$A = x^3 - 4y^2 - 4z^2 - 4y - 4z + 32$$

м.к. x корень, то

$$x^3 = -4x^2 - 4x - a$$

$$A = -4x^2 - 4x - a - 4y^2 - 4z^2 - 4y - 4z + 32 =$$

$$= -4(x^2 + y^2 + z^2) - 4(x + y + z) + 32 - a =$$

$$= -4((x+y+z)^2 - 2(xy+xz+yz)) - 4(x+y+z) + 32 - a =$$

$$= -4(x+y+z)^2 + 8(xy+xz+yz) - 4(x+y+z) + 32 - a$$

по м. Бамена

$$\begin{cases} x+y+z = -4 \\ xy+xz+yz = 4 \\ xyz = -a \end{cases}$$

$$A = -4 \cdot 16 + 8 \cdot 4 - 4 \cdot (-4) + 32 - a =$$

$$= -64 + 32 + 16 + 32 - a = 16 - a$$

Найдем значение a, чтобы все было верно
действительно.

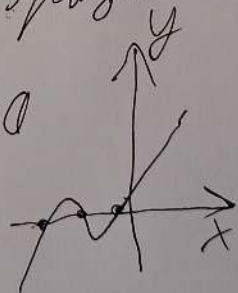
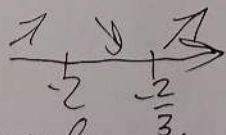
Вампонным $y = t^3 + 4t^2 + 4t + a$

$$y' = 3t^2 + 8t + 4$$

$$y' = 0 \quad 3t^2 + 8t + 4 = 0$$

$$\begin{cases} t = -2 \\ t = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

негативни в уравнение



$\sqrt{5} \quad t = -2$ минимум $-8 + 16 - 8 + a = 0 \quad a = 0$ минимум

$t = -\frac{2}{3}$ $-\frac{8}{27} + \frac{16}{9} - \frac{8}{3} + a = 0 \quad a = \frac{32}{27}$

при $a < 0; a > \frac{32}{27}$ будет один корень

при $a = 0$ и $a = \frac{32}{27}$ ~~корней нет~~

2 разл корня

при $a \in (0; \frac{32}{27})$ будет 3 разл действ корня

$A = 16 - 0$

$0 < a < \frac{32}{27} \quad \frac{32}{27} = 1 + \frac{5}{27}$

$16 - \frac{32}{27} < 16 - a < 16 \quad 14\frac{22}{27} < A < 16$

$(14\frac{22}{27}; 16)$

№6

Умножим

умно

$$\begin{cases} y = 2x^2 - 1 \\ x = 4y^2 - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y = 4x^2 - 2 \\ x = 4y^2 - 2 \end{cases}$$

вычтем

$$x + 2y = 4x^2 - 2 + 4y^2 - 2$$

$$4x^2 + 4y^2 - x - 2y - 4 = 0$$

$$x^2 + y^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}y - 1 = 0$$

$$\left(x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{64}\right) - \frac{1}{64} + \left(y^2 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{16}\right) - \frac{1}{16} - 1 = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{8}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{69}{64}$$

точки пересечения парабол
находятся на окружности
с центром в $\left(\frac{1}{8}; \frac{1}{4}\right)$ и $R = \frac{\sqrt{69}}{8}$

Точка, равноудалена от этих точек
пересечения — это центр окруж., такая
точка одна

Ответ: $\left(\frac{1}{8}; \frac{1}{4}\right)$

Минусик Минус
№4 Размножить случай с 3 пакетами
у нас выбор или класть 2 пакета с 2 пакетами
полностью, или убрать внешний (2)
(в 2 раза больше чем с 2 пакетами)

(4 у нас выбор или класть 3 пакетами с
3 пакетами полностью или убрать
внешний (3)

(в 2 раза больше чем с 3 пакетами)
так и со следующими случаями \Rightarrow

\Rightarrow 10 пакетами случаев будет $2^8 = 256$

(повторю еще будет т.к. мы из разных
случаев делаем разные)

Ответ: 256

№3 на Числовик мума

$$10^{2022} - 9^{2022}$$

Задача на $9^{2022} \pmod{1000}$

$$(9, 1000) = 1$$

$$9^{\varphi(1000)} \pmod{1000} \equiv 1$$

$$\varphi(1000) = 400$$

$$9^{400} \pmod{1000} \equiv 1$$

$$9^{2022} = (9^{400})^5 \cdot 9^{22}$$

$$9^{2022} \pmod{1000} \equiv 9^{22} \pmod{1000}$$

$$9^{22} = (10-1)^{22} = (1-10)^{22} = 1 - 22 \cdot 10^1 + 231 \cdot 10^2 - 1540 \cdot 10^3 + \dots$$

Туману Хуанова

галса ↑

унелелло

Телел 3

$$9^{22} \pmod{1000} \equiv (1 - 22 \cdot 10 + 231 \cdot 10^2 - \dots) \pmod{1000} =$$

$$= 22881 \pmod{1000} = 881$$

$$10^{2022} - 9^{2022} \pmod{1000} = 1000 - 881 = 119$$

Onbeim 199

Чертков

$$\begin{array}{r} 2022 \mid 2 \\ 1011 \mid 3 \\ \hline 334 \end{array}$$

МММ1

$$10^{2022} \approx 10000$$

$$\sqrt[2022]{10}$$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	4	8	16	32	64	128	256	
1	2	3	4	2 ²	2 ³	2 ⁴	2 ⁵	2 ⁶	2 ⁷	2 ⁸
(1)	(1)				(1)	(1)	(1)	(1)	(1)	(1)

$$a = 4 \cdot 10^{20} \approx 10^{20}$$

$$a \equiv 6 \pmod{20}$$

$$a \equiv b+1 \pmod{21}$$

$$a \equiv 2 \pmod{22}$$

$$a = 21n + b + 1$$

$$n \neq 2$$

$$a, b, n \in \mathbb{Z} \geq 0$$

$$b \equiv 2$$

$$a \equiv 2$$

$$\begin{array}{r} 22 \times 18 \\ \hline 36 \\ \hline 396 \end{array}$$

$$a = 20n + b + 1 + n$$

$$19$$

$$400 \equiv 4 \pmod{22}$$

$$b = 20$$

$$a = 380 + 399 + b + 1 = 400 + b$$

Мернобук

$$\begin{aligned} 838 &\equiv 18 \\ a &\equiv b \\ 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 838 &\equiv 19 \\ a &\equiv b+1 \\ 21 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 838 &\equiv 2 \\ a &\equiv 2 \\ 22 \end{aligned}$$

$$d = 21n + b + 1$$

$$20n + b + 1 + n$$

$$a = 400 + b$$

$$d = 819 + b$$

$$\begin{aligned} 400 &\equiv 4 \\ 22 \end{aligned}$$

$$819 \equiv 5$$

$$\begin{aligned} 400 + b &\equiv 4 + b \equiv 2 \\ 22 \quad 22 \end{aligned}$$

$$838 \quad 819 + b \equiv 5 + b \equiv 2$$

$$5 + b = 24$$

$$b = 19$$

МММ2

$$\begin{array}{r} 619 \\ - 660 \\ \hline 159 \\ n=19 \quad - 110 \\ \hline 49 \\ 20 \quad - 40 \\ \hline 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 20 \\ \hline 480 \end{array}$$

819

$$\begin{aligned} 1001 \\ 819 &= 729^{334} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} \times 81 \\ 9 \\ \hline 9 \\ 72 \\ \hline 729 \end{array}$$

$$x^3 + 4x^2 + 4x + a = 0$$

$$y^3 + 4y^2 + 4y + a = 0$$

$$z^3 + 4z^2 + 4z + a = 0$$

перемнож

MMM3

$$x^3 - 4y^2 - 4z^2 - 4y - 4z + 4z^2 = A$$

$$x^3 - 4y^2 - 4z^2 - 4y - 4z \quad | \quad -y^3 - z^3 + 4x^2 + 4x - a = 0$$

A

-A

$$A = y^3 + z^3 + 4x^2 + 4x - a = (y+z)(y^2 - yz + z^2) + 4x^2 + 4x - a = 0$$

$$(t-x)(t-y)(t-z) = 0$$

$$t^3 - (x+y+z)t^2 + (xy+xz+yz)t - xyz = 0$$

$$xyz = a$$

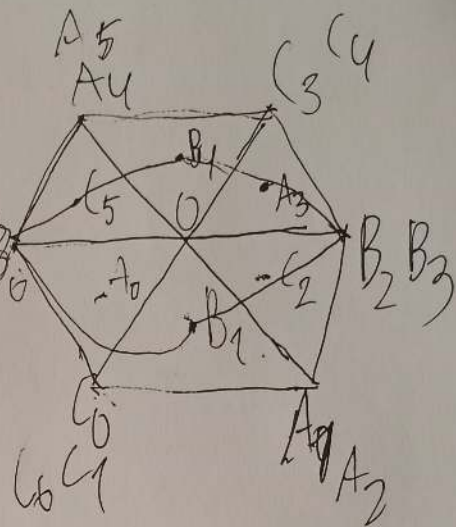
$$xy+xz+yz = 4$$

$$x+y+z = 4$$

перевик

sumy

1 2 1 2
~~1 2 1 2~~
~~1 2 1 2~~



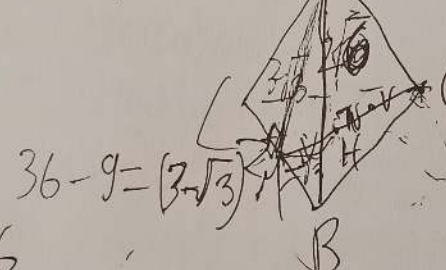
2 1 1 2
~~2 1 1 2~~

2013



2 1 2 2
~~2 1 2 2~~

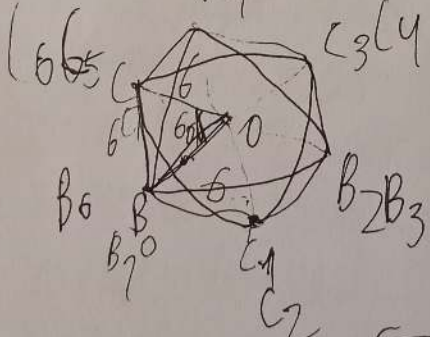
$24 = 2\sqrt{6}$
 $24 = 30$



$\sin \angle AMH = \frac{1}{3}$
 $\angle AMH = \arcsin(\frac{1}{3}) = d$

$36 - 9 = (3\sqrt{3}) \cdot d$

$(3\sqrt{3} = H) \cdot \pi \cdot 3 =$
 $= 9\sqrt{3} \cdot \pi$



$9\sqrt{3} \cdot 4 \cdot \pi \cdot \frac{180-d}{180}$

$= (6 \cdot \pi \cdot \sqrt{3}) \cdot \frac{180-d}{180} =$
 $= \frac{30 \cdot \pi \cdot \sqrt{3}}{180}$

$\pi \frac{180 - \arcsin(\frac{1}{3})}{5\sqrt{3}} \sqrt{2}$

√1 N-mululo

nummubuk
num 1

$$N = 22K + 2$$

$$\begin{cases} N \bmod 20 = a \\ N \bmod 21 = a+1 \end{cases} \begin{cases} (22K+2) \bmod 20 = a \\ (22K+2) \bmod 21 = a+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2K+2) \bmod 20 = a \\ (K+2) \bmod 21 = a+1 \end{cases}$$

$$(2K+2) \bmod 20 + 1 = (K+2) \bmod 21$$

$$2 \mid (K+1) \bmod 20 = (K+1) \bmod 21$$

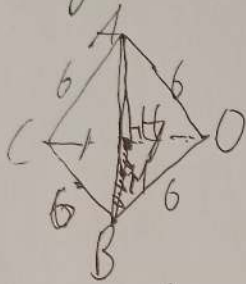
K=0	2 mod 20 ≠ 1 mod 21	K=19	40 mod 20 ≠ 20 mod 21
K=1	4 mod 20 ≠ 2 mod 21	K=20	42 mod 20 ≠ 21 mod 21
K=2	6 mod 20 ≠ 3 mod 21	K=21	44 mod 20 ≠ 22 mod 21
K=3	8 mod 20 ≠ 4 mod 21	K=22	46 mod 20 ≠ 23 mod 21
K=4	10 mod 20 ≠ 5 mod 21	K=23	48 mod 20 ≠ 24 mod 21
K=5	12 mod 20 ≠ 6 mod 21	K=24	50 mod 20 ≠ 25 mod 21
K=6	14 mod 20 ≠ 7 mod 21	K=25	52 mod 20 ≠ 26 mod 21
K=7	16 mod 20 ≠ 8 mod 21	K=26	54 mod 20 ≠ 27 mod 21
K=8	18 mod 20 ≠ 9 mod 21	K=27	56 mod 20 ≠ 28 mod 21
K=9	20 mod 20 ≠ 10 mod 21	K=28	58 mod 20 ≠ 29 mod 21
K=10	22 mod 20 ≠ 11 mod 21	K=29	60 mod 20 ≠ 30 mod 21
K=11	24 mod 20 ≠ 12 mod 21	K=30	62 mod 20 ≠ 31 mod 21
K=12	26 mod 20 ≠ 13 mod 21	K=31	64 mod 20 ≠ 32 mod 21
K=13	28 mod 20 ≠ 14 mod 21	K=32	66 mod 20 ≠ 33 mod 21
K=14	30 mod 20 ≠ 15 mod 21	K=33	68 mod 20 ≠ 34 mod 21
K=15	32 mod 20 ≠ 16 mod 21	K=34	70 mod 20 ≠ 35 mod 21
K=16	34 mod 20 ≠ 17 mod 21	K=35	72 mod 20 ≠ 36 mod 21
K=17	36 mod 20 ≠ 18 mod 21	K=36	74 mod 20 ≠ 37 mod 21
K=18	38 mod 20 ≠ 19 mod 21	K=37	76 mod 20 ≠ 38 mod 21
		K=38	78 mod 20 ≠ 39 mod 21 18 = 18

1/2

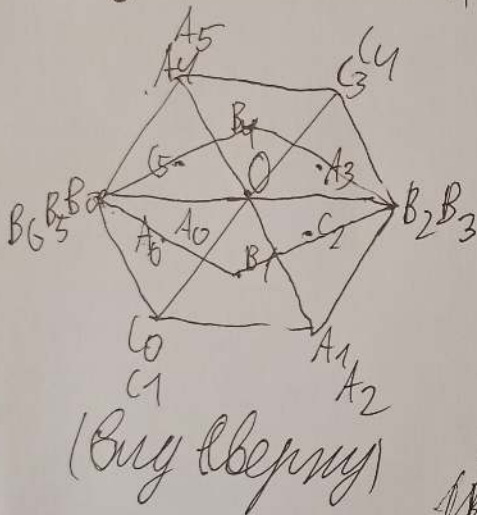
читовик мтт 3

т.к. одна вершина замширована,
то мы можем перевернуть и пообали,
а позже только одини.

пусть замшированная вершина O



H середина CO
и т.к. все ребра равны \Rightarrow все равнобедрен
 $AH \perp CO, BH \perp CO$



Размещаем две точки
вершины B

CO по 1 положение
она передвигается и её
траектория была частью
окружности с центром H

и остальные действия такие же

$$\Rightarrow \ell_T = 4 \cdot BH \cdot \pi \cdot \frac{180 - \alpha}{180}$$

α - угол между плоскостями (AO) и (BCO)
и он равен $\angle BHA$ т.к. $AH \perp CO, BH \perp CO$ $\angle MHA = \angle BHA$

и $AM \perp (BCO)$, также M пересечение медиан в

$$\Delta BCO \Rightarrow BM : MH = 2 : 1$$

$$BH = 3\sqrt{3} \quad MH = \sqrt{3}$$

$$AH = BH = 3\sqrt{3}$$

$$\cos(\angle MHA) = \frac{MH}{BH} = \frac{1}{3}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$$

Ответ: $\ell_T = 4 \cdot 3\sqrt{3} \cdot \pi \cdot \frac{180 - \arccos\left(\frac{1}{3}\right)}{180} = 9\pi \frac{180 - \arccos\left(\frac{1}{3}\right)}{5\sqrt{3}}$