МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Злотникова Таисия Сергеевна**

Класс: **9 класс**

Технический балл: **55**

Дата проведения: **12 марта 2022 г.**

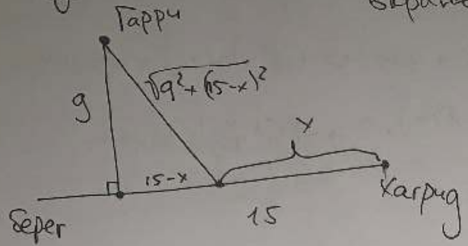
Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	10	15	15	0	15	0	0

Задача 4

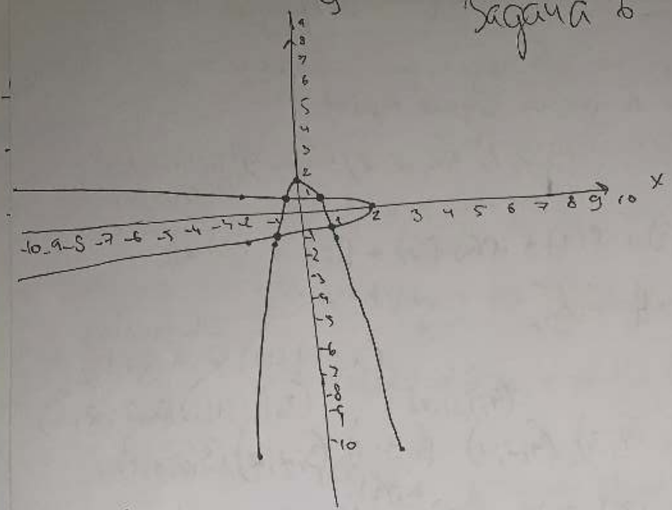
Нам надо найти минимальное значение выражения $\frac{x}{50} + \frac{\sqrt{81+(15-x)^2}}{40}$

время по берегу — время над морем



$$\frac{x}{50} + \frac{\sqrt{81+(15-x)^2}}{40} = \frac{4x + 5\sqrt{306-30x+x^2}}{200}$$

Задача 6 страница 6 из 7



$$\begin{cases} y = -3x^2 + 2 \\ x = -4y^2 + 2 \end{cases}$$

$x_1\ y_1$ $\quad$ $x_0\ y_0$

$x_2\ y_2$

$x_3\ y_3$

$x_4\ y_4$

$$(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 = (x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2 = (x_3 - x_0)^2 + (y_3 - y_0)^2 = (x_4 - x_0)^2 + (y_4 - y_0)^2$$

Задача 7 Продолжение 2

$f(9) = f(8) + f(7) + f(6)\cdot 2 + f(5)\cdot f(2) + f(5)\cdot 2 + f(4)\cdot f(3) + f(4)\cdot f(2) +$

$+ f(4)\cdot 3 + f(3)\cdot f(3) + f(3)\cdot f(2)\cdot 2 + f(3)\cdot 3 + f(2)\cdot f(2)\cdot f(2) +$

$+ f(2)\cdot f(2)\cdot 2 + f(2)\cdot 4 + f(1)\cdot 5 =$

$= 280 + 110 + 45\cdot 2 + 19\cdot 2 + 19\cdot 2 + 8\cdot 4 + 8\cdot 2 + 8\cdot 3 + 4\cdot 4 +$

$+ 4\cdot 2\cdot 2 + 4\cdot 3 + 2\cdot 2\cdot 2 + 2\cdot 2\cdot 2 + 2\cdot 4 + 5 =$

$= 390 + 90 + 19\cdot 4 + 8\cdot 9 + 16\cdot 2 + 12 + 8\cdot 3 + 5 =$

$= 480 + 76 + 72 + 32 + 12 + 24 + 5 =$

$480 + 148 + 32 + 36 + 5 = 480 + 180 + 41 = 660 + 41 = 701$

Ответ: 701 вариант.

Задача 7 Продолжение

$f(6)$ Разбиваю всего на 6 групп, но разрешим пустые группы, если число меньше, чем 6, значит группы пустые.

(6) (5;1) (4;2) (4;1;1) (3;3) (3;2;1) (2;2;2) (2;2;1;1) (2;1;1;1;1) (1;1;1;1;1;1)

$f(6) = f(5) + f(4) + f(3) + f(3) + f(2)\cdot f(2) + f(2) + f(1)\cdot 4$

$= 19 + 8 + 4 + 4 + 4 + 2 + 4 = 45$

$f(7)$

(7) (6;1) (5;2) (5;1;1) (4;3) (4;2;1) (4;1;1;1) (3;3;1) (3;2;2) (3;2;1;1) (3;1;1;1;1) (2;2;2;1) (2;2;1;1;1) (2;1;1;1;1;1) (1111111)

$f(7) = f(6) + f(5) + f(4) + f(4) + f(3)\cdot f(2) + f(3) + f(3) + f(2)\cdot f(2) + f(2)\cdot 3 + f(1)\cdot 4$

$= 45 + 19 + 8 + 8 + 8 + 4 + 4 + 4 + 2\cdot 3 + 4 = 10 + 20 + 4 + 12 + 19 + 45 = 110$

$f(8)$

(8) (7;1) (6;2) (6;1;1) (5;3) (5;2;1) (5;1;1;1) (4;4) (4;3;1) (4;2;2) (4;2;1;1) (4;1;1;1;1) (3 3 2) (3 3 1 1) (3 2 2 1) (3 2 1 1 1) (3 11111) (2 2 2 2) (2 2 2 1 1) (2 2 1111) (2 111111) (11111111) =

$f(8) = f(7) + f(6) + f(5)\cdot 2 + f(4)\cdot f(2) + f(4)\cdot 2 + f(3)\cdot f(3) + f(3)\cdot f(2) + f(3)\cdot 3 + f(2)\cdot f(2)\cdot 2 + f(2)\cdot 3 + f(1)\cdot 5 =$

$= 110 + 45 + 19\cdot 2 + 8\cdot 2 + 8\cdot 2 + 4\cdot 4 + 4\cdot 2 + 4\cdot 3 + 2\cdot 2 + 2\cdot 3 + 5 =$

$= 50 + 110 + 16\cdot 3 + 8\cdot 2 + 12 + 6 + 19\cdot 2 = 160 + 48 + 16 + 18 + 38 =$

$= 224 + 56 = 280$

$f(9)$

(9) (8;1) (7;2) (7;1;1) (6;3) (6;2;1) (6;1;1;1) (5 4) (5 3 1) (5 2 2) (5 2 1 1) (5 1 1 1 1) (4 4 1) (4 3 2) (4 3 1 1) (4 2 2 1) (4 2 1 1 1) (4 11111) (3 3 3) (3 3 2 1) (3 3 1 1 1) (3 2 2 2) (3 2 2 1 1) (3 2 1111) (3 111111) (2 2 2 2;1) (2 2 2 111) (2 2 11111) (2 1111111) (111111111)

Задача 7

Пусть $f(x)$ - кол-во вариантов расположить X пакетов, при этом не образуя быть пакет пакетов.

$f(0)=1$

$f(1)=1$ ()

$f(2)=2$ (()) ()()

$f(3)=4$ ((())) (()()) (())() ()()()

$f(4)=8$

$f(5)=19$

$f(6)=45$

$f(7)=110$

$f(8)=280$

~~$f(x)$~~ Заметим, что любой вариант разбивается на одну или несколько групп „пакет пакетов", но при этом сами не образуют их являясь.

Значит, $f(x)$ будет состоять из способов разбить X пакетов на группы „пакетов пакетов"

(Назовем пакет пакетов „хорошей" группой)

Тогда ~~$f(x)$~~ = вывести и записать рекуррентную формулу в общем виде непросто, поэтому буду на конкретных числах.

Найдем $f(4)$ это либо 1 хорошая группа 1) из 4 пакетов.

либо 2 хорошие группы: 1) из 1 и 3

2) из 2 и 2

3 хорошие группы 1) из 1; 1; 2 пакета

4 хорошие группы 1) 1; 1; 1; 1 пакет.

Тогда всего вариантов $f(3) + f(0)\cdot f(2) + f(1)\cdot f(1) + f(0)^4 =$

$= 4+2+1+1=8$

$f(5)$

$n=5$

Кол-во групп k	Варианты групп	C_n^k вариантов.
1	(5)	
2	(1;4) (2;3)	
3	(1;1;3) (1;2;2)	
4	(1;1;1;2)	
5	(1;1;1;1;1)	

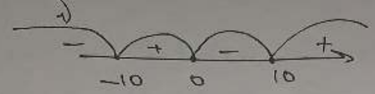
$f(5)=f(4)+f(0)\cdot f(3)+f(1)\cdot f(2)+f(0)\cdot f(0)\cdot f(2)+f(0)\cdot f(1)\cdot f(1)+f(0)^3\cdot f(1)+f(0)^5=8+4+2+2+1+1+1=19$

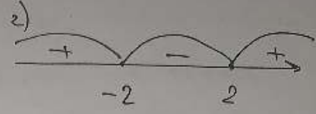
Задача 5

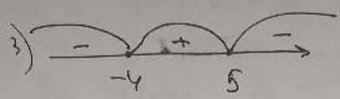
1) $a = x^3 - 100x$

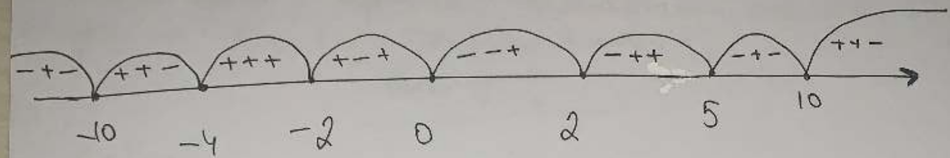
2) $b = x^4 - 16$

3) $c = x + 20 - x^2$









Решаем методом интервалов. На каждом интервале знаками показаны знаки значений a; b; c соответственно. Нам подходят интервалы, где есть хотя бы 2+. Ведь тогда среднее >0.

(+ положительное
− отрицательное)

Нам подойдут $(-10; -4) \cup (-4; -2) \cup (-2; 0) \cup (2; 5) \cup (10; +\infty)$

Так же надо рассмотреть отдельно точки, где одно из чисел принимает значение 0.

-10 $a=0$ $b>0$ $c<0$

-4 $a>0$ $b>0$ $c=0$ подходит

-2 $a>0$ $b=0$ $c>0$ подходит

0 $a=0$ $b<0$ $c>0$

2 $a<0$ $b=0$ $c>2$

5 $a<0$ $b>0$ $c=0$

10 $a=0$ $b>0$ $c<0$

Ответ: $x \in (-10; 0) \cup (2; 5) \cup (10; +\infty)$

При перемножении 5 чисел из набора 1;2;3;4;5;6 произведение будет $\vdots 16$ только если будут присутствовать все четные числа из этого набора. Потому что степень вхождения 2 в произведение всех 6 равна $0+1+0+2+0+1=4$ $16=2^4$. То есть пусть все четные. А кубик равно вероятно упадет на все грани, хорошими вариантами являются, когда он падает на 1;3;5. Это ровно половина.

Ответ: 50%

Задача 2

Первая арифм.пр. это числа $\equiv 1 \bmod 2$.
Таких чисел от 1 до 2022 ровно $\frac{2022}{2}=1011$
Вторая арифм.пр. это числа $\equiv 1 \bmod 3$
Таких чисел от 1 до 2022 ровно $\frac{2022}{3}=674$
Но числа $\equiv 1 \bmod 6$ встречаются в обеих наборах, их мы посчитали 2 раза. Таких чисел от 1 до 2022 ровно $\frac{2022}{6}=337$ Значит ответ будет $2022-1011-674+337=$ $=674$ Ответ: 674

Задача 3

$НОД(9;1000)=1 \to 9^k$ при $0\le k<1000$ пройдет все остатки по модулю 1000. $\to 9^{k+1000} \underset{1000}{\equiv} 9^k \to 9^{2022} \underset{1000}{\equiv} 9^{22}$

$9^{22} \underset{1000}{\equiv} (9^{11})^2$ Посчитаем $9^{11} \bmod 1000$

$9^0\equiv 1$	$9^6\equiv 441$
$9^1\equiv 9$	$9^7\equiv 969$
$9^2\equiv 81$	$9^8\equiv 721$
$9^3\equiv 729$	$9^9\equiv 489$
$9^4\equiv 561$	$9^{10}\equiv 401$
$9^5\equiv 49$	$9^{11}\equiv 609$

$9^{11}\underset{1000}{\equiv} 609 \to 9^{22}\underset{1000}{\equiv} 609\cdot 609 = 370881 \underset{1000}{\equiv} 881$

$10^{2022}-9^{2022} \underset{1000}{\equiv} -9^{2022} \equiv -881 \equiv 119$

Ответ: последние 3 цифры 119

$2022 \equiv (2 \text{ mod } 1000)$

Черновик

$\begin{array}{r} 490 \\ -49 \\ \hline 441 \end{array}$

46 α

вероятн. что будет ... 3 или 3 или 5.

$\begin{array}{r} 4410 \\ -441 \\ \hline 969 \end{array}$ $\begin{array}{r} 7290 \\ -729 \\ \hline 561 \end{array}$ $\begin{array}{r} 9690 \\ -969 \\ \hline 7221 \end{array}$ $\begin{array}{r} 7210 \\ -721 \\ \hline 489 \end{array}$ $\begin{array}{r} 9690 \\ -969 \\ \hline 7210 \\ -721 \\ \hline 4890 \\ -489 \\ \hline 401 \end{array}$

$\begin{array}{r} 4890 \\ -489 \\ \hline 401 \end{array}$ $\begin{array}{r} 810 \\ -81 \\ \hline 729 \end{array}$ $81 \cdot 9 =$ $\begin{array}{r} 810 \\ -81 \\ \hline 729 \end{array}$

$9 \perp 1000$

$\begin{array}{r} 5610 \\ -561 \\ \hline 49 \end{array}$ $\begin{array}{r} 1090 \\ -89 \\ \hline 119 \end{array}$ $\begin{array}{r} 7290 \\ -729 \\ \hline 6561 \end{array}$ $\begin{array}{r} 4010 \\ -401 \\ \hline 6090 \\ -609 \\ \hline 4810 \\ 481 \\ \hline 3290 \\ 329 \\ \hline 9610 \\ 961 \end{array}$

9 разных

()(()) ()(()())

$\begin{array}{r} 4010 \\ -401 \\ \hline 609 \end{array}$ $\begin{array}{r} 5610 \\ -561 \\ \hline 49 \end{array}$ $\begin{array}{r} 490 \\ -49 \\ \hline 441 \end{array}$ $\begin{array}{r} 4410 \\ -441 \\ \hline 969 \end{array}$

$\frac{\sqrt{81+(15-x)^2}}{40}$ min

$(10-9)(10^{2021} + 10 \cdot 9^{20}$

$\begin{array}{r} 609 \\ \times 609 \\ \hline 5481 \\ 3654 \\ \hline 370881 \end{array}$ $\begin{array}{r} 225 \\ +81 \\ \hline 306 \end{array}$

$10^{2022} - 9^{2022}$

009 081 729 561

$306 - 30x$

$x^2 - 30x + 306$

$x^2 - 30x + 306 = 0$

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

370881

$10^{2022} - 9^{2022} = 10^{2021} + 10 \cdot 9^{2020} + 10^{2019} \cdot 9^2 + \dots + 10^3 \cdot 9^{2018} + 10^2 \cdot 9^{2019} + 10 \cdot 9^{2020} + 9^{2021}$

$\frac{4x + 5\sqrt{81+225-30x+x^2}}{200}$ ((()))

((())) ()() ()()() (()())

$\begin{array}{r} 609 \\ \times 609 \\ \hline 5481 \\ 4 \\ \hline 881 \end{array}$

$f(1) = 1$ ()

$f(2) = 2$ (())

$f(3) = f(2) \cdot 2$

$f(4) = f(3) \cdot 2$

$f(9) = 2^8$

=1, 2, 4, 8

$x(x^2-100) > 0$

$x \geq 100$ $x(x-10)(x+10)$

$x^3 - 100x > 0$

− + − + ; −10, 0, 10