МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Зорин Денис Игоревич**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **90**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	15	15	15	0

Чистовик

1

Задача 1.

$$A = \frac{\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}}, \quad B = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \ldots + \frac{77}{(38\cdot 39)^2} + \frac{79}{(39\cdot 40)^2}$$

Заметим, что $4+2\sqrt{3} = 3+2\sqrt{3}+1 = (\sqrt{3}+1)^2 \Rightarrow A = \frac{\sqrt[6]{(\sqrt{3}+1)^2} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}} =$

$$= \frac{\sqrt[3]{\sqrt{3}+1} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = 1$$

Теперь посмотрим на B. Заметим, что ~~n член~~ сумма первых n членов B равна $1 - \frac{1}{(n+1)^2}$. Будем доказывать по индукции.

База $n=1$. $B = \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4}$ (И) Переход индукции. Пусть до n члена сумма первых i членов равна $1-\frac{1}{(i+1)^2}$ ($i \in [1; n]$). Докажем для $n+1$. Заметим, что Σ первых n членов равна $1-\frac{1}{(n+1)^2}$. И для суммы первых $n+1$ членов нам к этому надо прибавить $\frac{2(n+2)-1}{(n+1)^2(n+2)^2} = \frac{2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2}$ Т.е Σ равна

$$1 - \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{(2n+3)}{(n+1)^2(n+2)^2} = 1 + \frac{-(n+2)^2 + (2n+3)}{(n+1)^2(n+2)^2} = 1 + \frac{-n^2-4n-4+2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2} =$$

$$= 1 + \frac{-n^2-2n-1}{(n+1)^2(n+2)^2} = 1 - \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2(n+2)^2} = 1 - \frac{1}{(n+2)^2}$$ ~~Т.к.д.~~

Значит, индукция доказана $\Rightarrow \Sigma$ чисел в $B = 1 - \frac{1}{(40)^2} < 1$

А это меньше A т.к $A = 1$; $\Rightarrow$ A больше.

Ответ: A больше

чистовик

Задача 2. (2)

Посмотрим какие числа могут стоять справа от какой-либо цифры

1 – 9
2 – 3
3 – 8
4 – 6
5 – 7
6 – 9
7 – 6
8 –
9 – 2 или 9 – 5.

Заметим, что рядом с 8 ничего не стоит т.к нет двузначного числа :19 или :23 которое начинается с 8. И заметим, что неоднозначность у нас возникает только в 9. Но заметим, что если после 9 пойдет 2, после нее 3, после нее 8, после неё ничего стоять не может, поэтому если у нас возникает 9 хотя бы за 4 цифры до конца (т.е раньше 2019 знака), то выбор однозначный – 5. Посмотрим на наше число, оно будет строиться так: 46957 6957 И будет повторяться 6957 По крайней мере до 2018 знака. На нем будет стоять 6 т.к период у нас из 4 знаков и 6 стоит на месте сравнимым с 2 по mod 4, а $2018 \equiv_4 2$ После 6 идет однозначно 9, ~~но~~, а после неё либо 2 либо 5. Если 2, то дальше однозначно 3 и 8. Т.е число заканчивается на 8. Если 5, то дальше однозначно 7 и 6. т.е число оканчивается на 6

Ответ: на 8 или в 6.

Чистовик

3

Задача 3.

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[9]{1-x^9}}.\quad f(f(x))=\frac{1}{\sqrt[9]{1-\left(\frac{1}{\sqrt[9]{1-x^9}}\right)^9}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt[9]{1-\frac{1}{1-x^9}}}=\frac{1}{\sqrt[9]{\frac{1-x^9-1}{1-x^9}}}=\frac{\sqrt[9]{1-x^9}}{-x}$$

$$f(f(f(x)))=\frac{1}{\sqrt[9]{1-\left(\frac{\sqrt[9]{1-x^9}}{-x}\right)^9}}=\frac{1}{\sqrt[9]{1+\frac{1-x^9}{x^9}}}=$$

$=\frac{1}{\sqrt[9]{\frac{1}{x^9}}}=x \Rightarrow f(f(f(f(x))))=f(x) \Rightarrow$ если мы применяем функцию ~~...~~ несколько раз и это число $\vdots\, 3$ то мы получаем X. $1305 \vdots 3 \Rightarrow f(f\ldots(f(2022))\ldots)=2022$

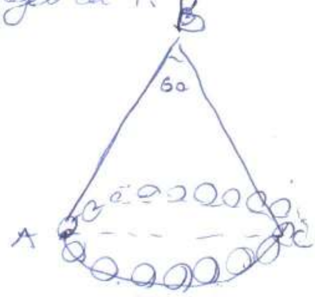
т.к мы можем заменить $f(f(f(x)))$ на x

~~Ответ: 2022~~ то мы каждый раз „убираем" 3 f и значит в конце останется только X (т.е 2022)

Ответ: 2022.

Чистовик

Задача 4.



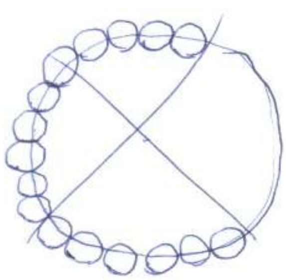
Посмотрим на 1 шар

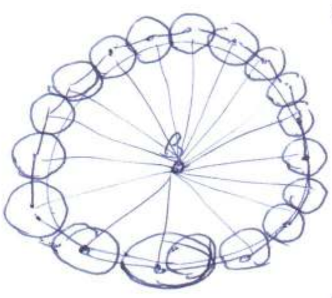
Т.к образующие конуса равны, ~~то ∠ между~~ в основании осевого сечения будет $\frac{180-60}{2}=60$

$\Rightarrow \angle XZY = 180-60 = 120°$ $XL = LY = 2$ по условию

$LX \perp XZ$ и $LY \perp ZY$ по св-ву касательных.

$\Rightarrow$ $LXZY$ - вписанный. $\angle LZX = \frac{120}{2} = 60°$, $\Rightarrow XZ = \frac{2}{\sqrt{3}}$ по $\triangle 30;60;90$ ($\triangle LXZ$). Посмотрим на вид сверху:

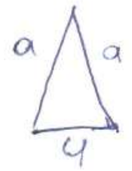




Сделаем проекцию точек B и центров окружностей на пл-ть основания. Заметим, что ~~по~~ св-ву окружностей 2 центра и ~~по~~ общая точка касания лежит на одной прямой

и $NM = r_1 + r_2 = 2+2 = 4$. Расстояния от проекции B до проекции центров одинаково (т.к основание конуса - окружность и проекция центра окружности на пл-ть основания отстоит от основания на равное количество $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$)

$\Rightarrow$ по т. cos. $a^2 + a^2 - 2a^2 \cos\frac{360}{17} = 4^2$



$2a^2 - 2a^2\cos\frac{360°}{17} = 16$ $\quad a = \sqrt{\frac{8}{1-\cos\frac{360°}{17}}}$

А значит радиус основания равен $a - \frac{2}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{8}{1-\cos\frac{360}{17}}} - \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Ответ: $\sqrt{\frac{8}{1-\cos\frac{360}{17}}} - \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Чистовик.

Задача 6.

$a = t^3 - 121t = t(t^2-121) = t(t-11)(t+11)$

$b = 2^t - 32$,

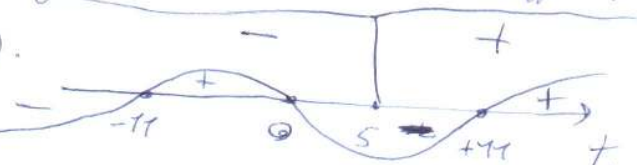
$c = \sin t - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Заметим, что когда хотя бы 2 числа положительны, то среднее тоже положительно. Посмотрим, когда $a>0$.

$a>0$ при ~~$a\in$~~ $t \in (-11;0) \cup (11;+\infty)$

$b>0 \Rightarrow 2^t - 32 > 0 \Rightarrow 2^t > 32 \Rightarrow t>5 \Rightarrow b>0$ при $t \in (5;+\infty)$

Так же заметим, что если у нас 2 неположительных числа, то среднее тоже ≤ 0.



Заметим, что при $t>11$, a ~~и~~ $b>0 \Rightarrow t \in (11;+\infty)$ - подходит.

Заметим, что при $t \in [0;5]$ $a<0$, $b<0 \Rightarrow t \in [0;5]$ - не подходит

Так же при $t \in (-\infty;-11]$ $a<0$ и $b<0 \Rightarrow$ при $t \in (-\infty;-11]$ - не подходит

Остались промежутки $(-11;0)$ и $(5;11]$ а ~~Если на них~~

~~$c>0$, то~~ $\sin t - \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$ когда $t \in (\frac{\pi}{3}+2\pi n; \frac{2}{3}\pi + 2\pi n)$, где $n \in \mathbb{Z}$

если $n=-2$, то $t \in (-3\frac{2}{3}\pi; -3\frac{1}{3}\pi)$ Заметим, что

$-3\frac{1}{3}\pi > -11$ т.к $\frac{10}{3}\pi < 11$ т.к $\pi < 3{,}3$, а $-3\frac{2}{3}\pi < -11$

т.к $-11\pi < 33$ т.к $\pi > 3$. $\Rightarrow$ ~~при~~ на промежутке $t \in (-11; -3\frac{1}{3}\pi)$

среднее положительно. Если $n<-2$, ~~то~~ т.е max -3, то $-5\pi + \frac{2}{3}\pi < -11$

~~5~~ т.к далее $-5\pi < -11$ т.к $\pi > \frac{11}{5}$ $(2{,}2)$

Если $n=-1$, то $t \in (-1\frac{2}{3}\pi; -1\frac{1}{3}\pi)$ - подходит.

Теперь если $n=1$, то $t \in (2\frac{1}{3}\pi; 2\frac{2}{3}\pi)$ $2\frac{1}{3}\pi > 5$, а $2\frac{2}{3}\pi < 11$

т.к $8\pi < 33$ т.е тоже подходит

Задача 5 - чистовик

Если $n=2$, то $4\frac{1}{3}\pi$ уже больше чем 11, т.к. $4\pi > 11$

$\Rightarrow$ ответ: $z \in (-11; -3\frac{1}{3}\pi) \cup (-1\frac{2}{3}\pi; -1\frac{1}{3}\pi) \cup (2\frac{1}{3}\pi; 2\frac{2}{3}\pi) \cup (11; +\infty)$

Чистовик

Задача 6.

Пусть $ctg\,x = b$. $b \in (-\infty; +\infty)$

$ab^3 + b^2(2a^2 - a - 2) + (2 - 4a - 2a^2)b + 4a = 0$

$\Leftrightarrow$

$a^2(2b^2 - 2b) + a(b^3 - b^2 - 4b + 4) - 2b^2 + 2b = 0$

$D = (b^3 - b^2 - 4b + 4)^2 + 4(2b^2 - 2b)^2 =$

$= b^6 - 2b^5 + 9b^4 - 16b^3 + 24b^2 - 32b + 16 = (b^3 - b^2 + 4b - 4)^2$

$\Rightarrow a_1 = \dfrac{b^3 - b^2 + 4b - 4 - b^3 + b^2 + 4b - 4}{2(2b^2 - 2b)} = \dfrac{8b - 8}{2 \cdot 2b(b-1)} = \dfrac{4b - 4}{2b(b-1)} = \dfrac{4}{2b} = \dfrac{2}{b}$

$a_2 = \dfrac{-b^3 + b^2 - 4b + 4 - b^3 + b^2 + 4b - 4}{2(2b^2 - 2b)} = \dfrac{-2b^3 + 2b^2}{4(b^2 - b)} = \dfrac{-2b(b^2 - b)}{4(b^2 - b)} =$

$= -\dfrac{b}{2}$

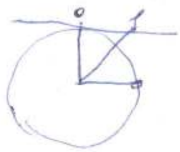
$\Rightarrow$ первое выражение раскладывается как $(2b^2 - 2b)\left(a + \dfrac{b}{2}\right)\left(a - \dfrac{2}{b}\right) = 0$

$b(b-1)\left(a + \dfrac{b}{2}\right)\left(a - \dfrac{2}{b}\right) = 0$ $\quad b \neq 0$.

$\Rightarrow (b-1)\left(a + \dfrac{b}{2}\right)\left(a - \dfrac{2}{b}\right) = 0 \Rightarrow b = 1$ - корень.

$a = -\dfrac{b}{2}$, $a = \dfrac{2}{b}$ $\quad b = -2a$, $b = \dfrac{2}{a}$ - корни если $a \neq 0$

если $a = 0$, то $b = 1$ - корень $b = 0$ - корень, тогда разница корней $\dfrac{\pi}{4}$.



Если $a \neq 0$, и больше 0, то

$b = \dfrac{2}{a}$ $-2a$ - отрицательное $\Rightarrow$ $x > \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow$ разница между x и $\dfrac{\pi}{4} > \dfrac{\pi}{4}$. Если $a < 0$, то $\dfrac{2}{a}$ отрицательное и аналогично разница между x и $\dfrac{\pi}{4} > \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow$ наименьшее когда $a = 0$ и оно равно $\dfrac{\pi}{4}$

Ответ: при $a = 0$, расстояние $\dfrac{\pi}{4}$.

Черновик

(1)

17 20 21 22
1 2 3 8

38 19 3: 57

46

46+23 = 69

8 · 15 = 70+

(19.

57+19 = 76

23 1(12345)(6

69+23 = 92

38

46

76+19 = 95

(19·5)

57

69

76

92 95

11:15+3

2022

2018

19 20 21 22
9 5 7 6 1
9 2 3 8

14 15 16 17 18 19

$f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt[9]{1-\frac{1}{\sqrt[9]{1-x^9}}}}$

$\sqrt[9]{\frac{\sqrt[9]{1-x^9}-1}{\sqrt[9]{1-x^9}}}$

$1-\frac{1}{n^2}+\frac{2n+1}{n(n+1)}$

$\frac{2n+1}{n(n+1)}-\frac{1}{n^2}=$

$=\frac{2n^2+n-n-1}{n^2(n+1)}=\frac{2n^2-1}{n^2(n+1)}=\frac{1}{n^2(n+1)/(2n^2-1)}$

$=1-\frac{1}{(n+1)^2}$

$\frac{3}{4}+\frac{5}{36}+\frac{7}{16\cdot 9}$

$\frac{32}{36}+\frac{7}{16\cdot 9}$

$\frac{32\cdot 4+7}{16\cdot 9}$

$\frac{135}{144}$

$\frac{9}{144}=\frac{1}{16}$

№3.

$f(x)=\frac{1}{\sqrt[9]{1-x^9}}$

$f(f(f(\ldots(f(2022))\ldots)))$

1305/9

$\frac{2x-1}{(x-1)^2x^2}=\frac{2}{(x-1)^2x}-\frac{1}{(x-1)^2x^2}$

$\frac{5}{23}$ $\frac{7}{34}$

$\sqrt[3]{\frac{2}{2}}=1$

$\frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt{3})}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[3]{2}}=$

$\sqrt[3]{1+2\sqrt{3}+3}$

Черновик

2

$$\frac{1}{\sqrt[9]{1-x^9}} = \frac{\sqrt[9]{(1-x^9)^8}}{1-x^9} \quad f(x)$$

$180:9=20$

40

$$\sqrt[9]{\frac{1}{1-2022^9}} \qquad \frac{1}{\quad}$$

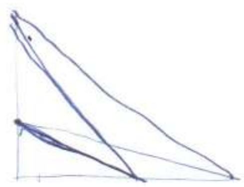
$$\frac{1}{(1-x^9)^{\frac{1}{9}}}$$

$(1-2022^3)(1^2+2022^3+2022^6)$

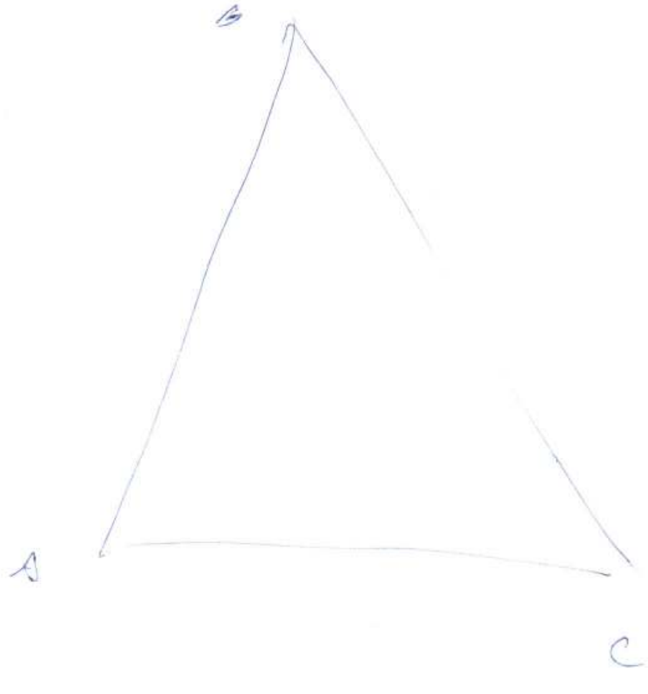
$(1-2022)(1+2022+2022^2)(1+2022^3+2022^6)$

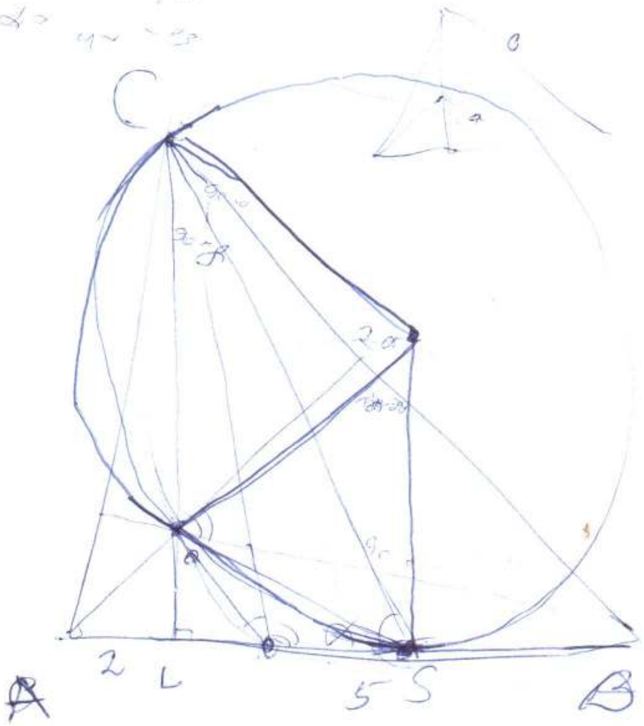
$a^2+b^2-2ab\cos\alpha$

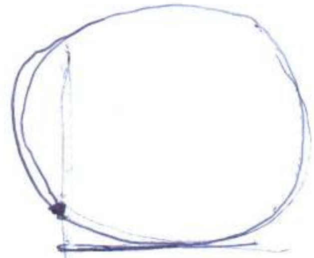
$\sqrt{-2021\cdot(1+2022+2022^2)(1+2022^3+2022^6)}$



№7.







Черновик

$$\frac{1}{\sqrt[9]{1-x^9}}$$ $f(f(\ldots(f(2022))),\ldots))$

3

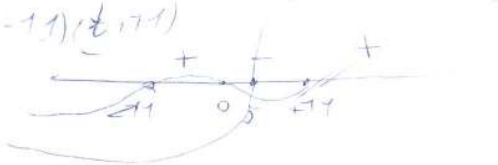
2022

$4\pi = $

№5.

$a = t^3 - 121t,\ b = 2^t - 32,\ c = \sin t - \frac{\sqrt{3}}{2}$

при $t>$. $t(t-11)(t+11)$



$2^t - 32$ при $t>5$ при $t>5$ полож., при t от $-\infty$ до $-11]$ и ... нет при $t \in$ от 0 до 5 положит

осталось при $t \in$ от -11 до 0, чтобы другие отриц.

$\sin t - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin t \geq \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$ при $t \in \left[\frac{\pi}{3}+2\pi n; \frac{2}{3}\pi + 2\pi n\right]$

$\left(-4\pi + \frac{\pi}{3}; -4\pi + \frac{2}{3}\pi\right)$

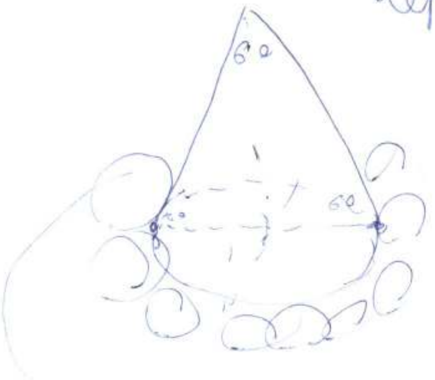
$\left(-3\frac{2}{3}\pi; -3\frac{1}{3}\pi\right)$ $\frac{10}{3}\pi < \vee 5\ 11$

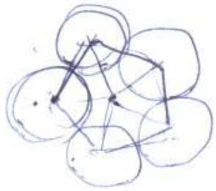
$10\pi < 33$

-5π

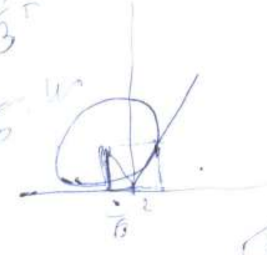
Черновик

4

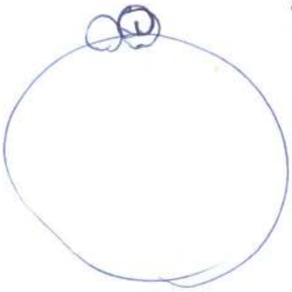


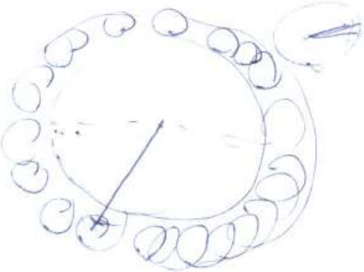


$\frac{4}{3}r$ $4=\frac{16}{3}$

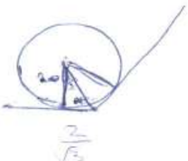


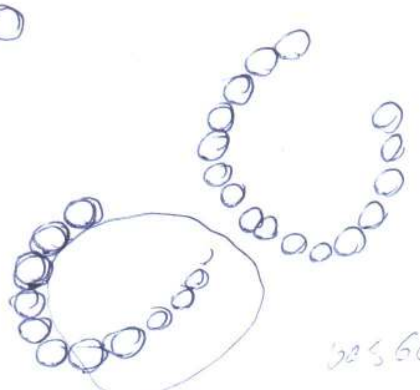
15+25=40





$\frac{360}{17}$



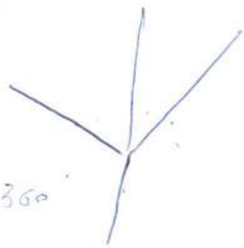


$\cos 60 = \frac{1}{2}$

$a^2-2a^2\cos\frac{360}{17}=4$

$a^2(1-2\cos\frac{360}{17})=4$

$a=\frac{2}{\sqrt{1-2\cos\frac{360}{17}}}$

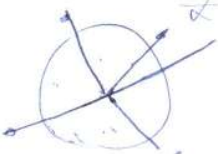


180:8 360

90:4

45:2

2—2



$2-\frac{1}{2}x=1$

$1305 : 3 = 435 : 3 = 145 \cdot 9 = 29 \cdot 5 \cdot 9$

(5)

Черновик

$f(x) = \frac{1}{\sqrt[9]{1-x^9}}$ $\quad x = f(x) = \frac{1}{\sqrt[9]{1-x^9}} = \frac{1}{1-x^9}$

$f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt[9]{1-\frac{1}{1-x^9}}}$

$\frac{1}{\sqrt[9]{1-\frac{1}{\sqrt[9]{1-x^9}}}}$

$f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt[9]{1-\frac{1}{\sqrt[9]{1-x^9}}}}$

$\frac{1}{\sqrt[9]{\frac{1-x^9-1}{1-x^9}}} = \frac{-x}{\sqrt[9]{1}}$

$-\frac{\sqrt[9]{1-x^9}}{x}$

$f(f(f(f(f(f(f(f(f(x)))))))))$

$1 + \frac{1}{x}$

$$\frac{1}{\sqrt[9]{1-\frac{1}{\sqrt[9]{1-\frac{1}{\sqrt[9]{1-x^9}}}}}}$$

$1 - \frac{1}{\sqrt[9]{\frac{x-1}{x}}}$

$f(f(f(f(f(f(x))))))$

$f(f(f(x))) = x$

$\frac{1}{\sqrt[9]{1+\frac{1-x^9}{x^9}}} = \frac{1}{}$

$1 - \frac{x^9}{\sqrt[9]{x^9+1}}$

$\sqrt[9]{1+\frac{1}{x^9}}$

$1-(x^9+1) =$

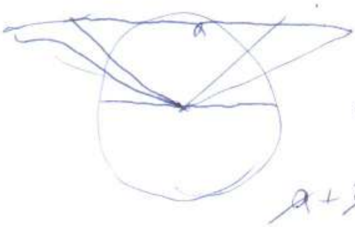
$2002^9 = x^9+1$

$1 + \frac{1}{x^9} = \frac{x^9+1}{x^9}$

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$

№ 6.   Черновик   6

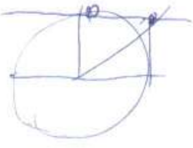
$a\,ctg^3x + (2a^2 - a - 2)ctg^2x + (2 - 4a - 2a^2)\,ctg\,x + 4a = 0$



$b^6 + b^4 + 16b^2 + 16 - 2b^5 + 8b^4 - 8b^3 - 8b^3 + 8b^2 - 32b$

$a + 2a^2 - a - 2 + 2 - 4a - 2a^2 + 4a$

$\frac{48}{2} = 6 \quad (b^3 - b^2 + 4b + 4)^2$



$a^2(2ctg^2x) - 2a^2$

$8\,4b \quad 16b^2 + 2a\,8$

$a\,ctg^3x + 2a^2ctg^2x - a\,ctg^2x - 2ctg^2x + 2ctgx - 4a\,ctgx - 2a^2ctgx + 4a = 0$

$a^2(2ctg^2x - 2ctgx) + a(ctg^3x - ctg^2x - 4ctgx + 4) + 2ctgx - 2ctg^2x = 0$

$D = ctg^6x + ctg^4x + 16ctg^2x + 16 - 2ctg^5x - 8ctg^4x - \cancel{8ctg^3x} + \cancel{8ctg^3x} - 8ctg^2x$
$- 32\,ctg\,x$

$ctg^6x - 2ctg^5x - 7ctg^4x + 8ctg^2x - 32ctgx + 16 - 4(2ctgx - 2ctg^2x)(2ctg^2x$

$\cancel{(ctg^3x - ctg^2x - 4ctgx + 4)^2} - 4(2ctgx - 2ctg^2x)$

$+ 4(4ctg^2x + 4ctg^4x - 8ctg^3x$

$a = -b \qquad 2a^2 + b^2 = ab^4$

$a = -2b$

$2b^4 - 2a^3$

$-2b^6$

$ab^3 + (2a^2 - a - 2)b^2 + (2 - 4a - 2a^2)b + 4a = 0$

$ab^3 + 2a^2b^2 - ab^2 - 2b^2 + 2b - 4ab - 2a^2b + 4a = 0 \quad -2b \quad 2^4a = 8$

$a^2(2b^2 - 2b) + a(b^3 - b^2 - 4b + 4) - 2b^2 + 2b = 0$

$D = b^6 + b^4 + 16b^2 + 16 - 2b^5 - 8b^4 + 8b^3 - 8b^3 + 8b^2 - 32b$

$+ 16b^4 + 16b^2 - 32b^3 = b^6 - 2b^5 + 9b^4 - 16b^3 + 24b^2 - 32b + 16 = 0$

Черновик