МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Игнатьев Даниил Алексеевич**

Класс: **10 класс**

Технический балл: **95**

Дата проведения: **12 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	10	15	15	15	15	15	10

Чистовик.

№1. $n \underset{22}{\equiv} 2 \Rightarrow n = 22k+2,\ k \in \mathbb{Z}$

$22k+2 \underset{20}{\equiv} 2k+2$

$22k+2 \underset{21}{\equiv} k+2$

Переберём 39 вариантов, от 0 до 38.

	n mod 20	n mod 21	
k=0	2	2	Нет
k=1	4	3	
k=2	6	4	
k=3	8	5	
k=4	10	6	
=5	12	7	
=6	14	8	
=7	16	9	
=8	18	10	
=9	0	11	
=10	2	12	
=11	4	13	
=12	6	14	
=13	8	15	
=14	10	16	
=15	12	17	
=16	14	18	
=17	16	19	
=18	18	20	
=19	0	0	
=20	2	1	Нет
21	4	2	
22	6	3	
23	8	4	
24	10	5	
25	12	6	
26	14	7	
27	16	8	
28	18	9	
29	0	10	
30	2	11	
31	4	12	
32	6	13	
33	8	14	
34	10	15	
35	12	16	
36	14	17	
37	16	18	
38	18	19	ДА!!

Перебором мы показали, что 1-ое такое число будет, если $k=38$, т.е. $n = 22\cdot 38+2$

Давайте на всякий проверим: $22\cdot38+2 \underset{20}{\equiv} 2\cdot38+2 \underset{20}{\equiv} 2\cdot 39 \underset{20}{\equiv} -2 \underset{20}{\equiv} 18$

$22\cdot 38+2 \underset{21}{\equiv} 38+2 \underset{21}{\equiv} 17+2 \underset{21}{\equiv} 19$.

Итак мы показали, что до $n = 22\cdot38+2$ таких чисел нет (т.к. они должны иметь вид $22k+2$, а до $k=38$ под условие числа не подходили)

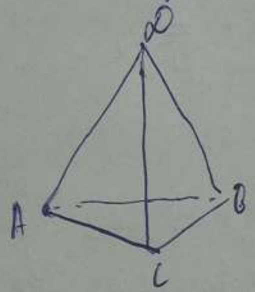
$\Longrightarrow N_{min}: 22\cdot38+2 = 2\cdot11\cdot38+2 = 2\cdot(11\cdot38+1) =$
$= 2\cdot(380+38+1) = 2\cdot 419 = 838$

Ответ: 838.

Чистовик.

№2. Пусть это вершина ~~[illegible]~~ $A \Longrightarrow$ изначально A принадлежало поверхности стола. Заметим, что перекатывание происходит только через рёбра смежные с A (их всего 3), иначе A оторвётся от поверхности. Т.к. через одно и то же ребро 2 раза подряд нельзя прокатиться, а в каждый момент до начала следующ. перекатыв. на столе лежит грань, у которой лишь 2 ребра смежны с A, а через одно уже произошло перекатывание (оно должно остаться на столе после его перекатыв.), то следующ. ребро, через которое мог перекатыв. заранее определено $\Longrightarrow$ двигаемся по какому-то циклу из этих рёбер.

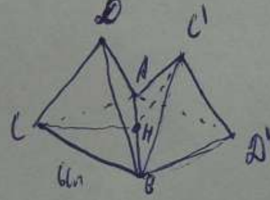
Пусть:



и перекатыв. через AB. Тогда потом: $AB \mapsto AD \to AC \to$
$AB \to AD - AC$.

Каждая из подвижн. вершин совершает одинаковый маршрут: поднялась $\to$ опустилась $\to$ через неё перекат.

Поэтому неважно, за какой следить.



$CH \perp AB$ и $C'H \perp AB$ поэтому

Заметим, что C двит. по окружности с ц. в середине AB и радиусом $R = \sin 60° \cdot BC = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 6 = 3\sqrt{3}$ см.

Найдем $\angle CHC'$; $\angle CHC' = 180° -$ ~~[illegible]~~ (плоскость стола; $(AC'B)$)

плоскость стола $= (ABC) = (ABD')$.

$((ABD'); (AC'B)) = \angle C'HD'$, т.к. $C'H \perp AB$ and $HD' \perp AB$.

$$\cos C'HD' = \frac{C'H^2 + HD'^2 - C'D'^2}{2 \cdot C'H \cdot HD'} = \frac{(3\sqrt{3})^2 + (3\sqrt{3})^2 - (6)^2}{2 \cdot (3\sqrt{3})^2} = \frac{27+27-36}{2 \cdot 27} = \frac{18}{2 \cdot 27} = \frac{1}{3}$$

$\angle C'HD' = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow \angle CHC' = 180° - \arccos\left(\frac{1}{3}\right) = \pi - \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$.

Так длина подъёма т. C – длина дуги $= \left(\pi - \arccos\frac{1}{3}\right) \cdot r = \left(\pi - \arccos\frac{1}{3}\right) \cdot 3\sqrt{3}$.

Подъём и спуск симм. $\Longrightarrow$ их длины одинаковы, всего подъёмов-спусков 4 $\Longrightarrow$

$L = 4 \times \left(\pi - \arccos\frac{1}{3}\right) \cdot 3\sqrt{3} = 12\sqrt{3} \cdot \left(\pi - \arccos\frac{1}{3}\right)$

2 из 10

Чистовик

Задача №3.

Заметим, что на последние 3 цифры влияет лишь 9^{2022}. Найдём их

Рассмотрим функцию Эйлера $\varphi(n)$

Найдём, при каком x $9^x \underset{1000}{\equiv} 1$ т.к. $(9;1000)=1$, то $9^{\varphi(1000)} \underset{1000}{\equiv} 1$.

$1000 = 2^3 \cdot 5^3$.

$\varphi(n)$ - кол-во чисел, взаимнопростых с n и $\leq n$.

Это все числа $\not\vdots\, 2$ ~~и~~ или $\vdots\, 5$.

$1000 - \frac{1000}{2} - \frac{1000}{5} + \gamma = 1000 - 500 - 200 + 100 = 400$

числа, учтённые дважды, т.е. и $\vdots\, 2$ и $\vdots\, 5$, их $\frac{1000}{2\cdot 5} = 100$

$\varphi(n) = 400 \Longrightarrow 9^{400} \underset{1000}{\equiv} 1 \Longrightarrow 9^{2022} \underset{1000}{\equiv} 9^{2000} \cdot 9^{22} \underset{1000}{\equiv} (9^{400})^5 \cdot 9^{22} \underset{1000}{\equiv} 1^5 \cdot 9^{22} \underset{1000}{\equiv} 9^{22}$.

Т.е. нужно найти 3 последние цифры 9^{22}

$9^1 = \ldots 009$

$9^2 = \ldots 081$

$9^3 = \ldots 729$

$9^4 = \ldots 561$

$9^5 = \ldots 049$

$9^6 = \ldots 441$

$9^7 = \ldots 969$

$9^8 = \ldots 721$

$9^9 = \ldots 489$

$9^{10} = \ldots 401$

$9^{11} = \ldots 609$

$9^{22} \underset{1000}{\equiv} 9^{11} \cdot 9^{11} \underset{1000}{\equiv} 609 \cdot 609 \underset{1000}{\equiv} 370881 \underset{1000}{\equiv} 881$

$9^{2022} \underset{1000}{\equiv} 881$

$\Downarrow$

$$10^{2022} - 9^{2022} = \begin{array}{r} 10\ldots00000 \\ -\ \ldots\ldots881 \\ \hline 119 \end{array}$$

$10^{2022} - 9^{2022} \underset{1000}{\equiv} 119$

Ответ: 119.

Чистовик.

Задача №5

$t^3+4t^2+4t+a=0$. Подставим x, y и z:

$$\begin{cases} x+y+z=-4 \\ xy+yz+xz=4 \\ xyz=-a \end{cases}$$

$x^3+4x^2+4x+a=0$

$y^3+4y^2+4y+a=0 \rightarrow y^3+a=-4y^2-4y$

$z^3+4z^2+4z+a=0$

$A=x^3+y^3+a+z^3+a+32=$

$=x^3+y^3+z^3+32+2a$

$$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+\ldots+xz)=16-2\cdot4=8$$

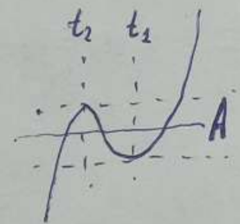
$$x^3+y^3+z^3=(x^2+y^2+z^2)(x+y+z)+3xyz-(x+y+z)(xy+yz+xz)=8\cdot(-4)-3a-(-4)\cdot(4)=$$

$$=-3a-32+16=-3a-16$$

$A=-3a-16+32+2a=16-a$

$t^3+4t^2+4t+a=(t^2+4)(t+4)-16+a=(t^2+4)(t+4)-A=0$

$(t^2+4)(t+4)=A$:



т.к. 3 различ. корня то A лежит в промежутке

$f'(t)=2t\cdot(t+4)+(t^2+4)\cdot1==3t^2+8t+4=0$

$D_1=64-4\cdot4\cdot3=64-48=16$

$t_{12}=\dfrac{-8\pm\sqrt{16}}{6}=\dfrac{-8\pm4}{6}$; $t_1=\dfrac{-8+4}{6}=-\dfrac{2}{3}$

$t_2=\dfrac{-8-4}{6}=-2$

$f(t_2)=((-2)^2+4)((-2)+4)=8\cdot2=16$

$f(t_1)=\left(\left(-\frac{2}{3}\right)^2+4\right)\left(\left(-\frac{2}{3}\right)+4\right)=\left(\frac{4}{9}+4\right)\left(-\frac{2}{3}+4\right)=\frac{40}{9}\cdot\frac{10}{3}=\frac{400}{27}$

Чтоб было 3 различных корня $\Longrightarrow A\in(f(t_1);\ f(t_2))\Longrightarrow A\in\left(\frac{400}{27};16\right)$.

Ответ: $A\in\left(\frac{400}{27};16\right)$

Чистовик.

Задача №7

Заметил, что есть общеизвестное понятие: числа Каталана, обозначаемые за C_i. C_n показывает кол-во способов расставить $2n$ скобочек так, чтоб не было нарушений (т.е. „(" от любой скобочки „)" слева их $\geq$ кол-ва „)" включая выбранную). Но нам нужно, чтоб был 1 конец пакетов поверх всех, но внутри могут как угодно, главное, чтоб не наруш. порядок. Т.е. 2 скобочки должны стоять. А следоват. для n пакетов подходящее число C_9.

n — кол-во пакетов, а $f(n)$ — кол-во способов

$f(1) = 1$

$f(2) = 1$

$f(3) = 2$

$((())) + (()())$

$\left(\underbrace{f(2)}_{2}\ \underbrace{f(1)}_{1}\right) + \left(f(1)\ f(1)\ f(1)\right) + \left(\underbrace{f(3)}_{3}\right)$

$f(4) = f(3) + \left(f(2) \cdot f(1)\right) + \left(f(1) \cdot f(1) \cdot f(1)\right) = 2 + 1 \cdot 1 \cdot 1 = 4$

$f(5) = f(4) + \underbrace{\left(f(3) \cdot f(1)\right) + \left(f(2) \cdot f(2)\right)}_{\text{на 2 пакета}} + \underbrace{f^2(1) \cdot f(2)}_{3\ \text{пакета}} + f^4(1) = 4 + 2 + 1 + 1 + 1 = 9$

$f(6) = f(5) + \left(f(4) \cdot f(1) + f(3) \cdot f(2)\right) + \left(f^3(2) + f(1) \cdot f(2) \cdot f(3)\right) + f^3(1) \cdot f(2) + f^5(1) = 9 + (4+2) + (1+2) + 1 + 1 = 20$

$f(7) = f(6) + \left(f(5) \cdot f(1) + f(4) \cdot f(2) + f^3(3)\right) + \left(f^2(1) \cdot f(4) + f(1) \cdot f(2) \cdot f(3)\right) + \left(f^2(1) \cdot f^2(2) + f(1) \cdot f(3)\right) + f^4(1) \cdot f(2) + f^6(1) = 20 + 9 + 4 + 4 + 4 + 2 + 1 + 2 + 1 + 1 =$

$= 20 + 10 + 10 + 8 = 48$

5 из 10

Чистовик

$$f(8) = f(7) + \left(f(1)\cdot f(6) + f(2)\cdot f(5) + f(3)\cdot f(4)\right) + \left(f^2(1)\cdot f(5) + f(1)\cdot f(2)\cdot f(4) + f(1)\cdot f^2(3) + \right.$$

$$\left. + f^2(2)\cdot f(3)\right) + \left(\cancel{f^3(2)\cdot f(1)}\ f(1)\cdot\left(f^2(2)\cdot f(1)\, f(2)\cdot f(3)\right)\right) + \left(f^2(1)\cdot \overset{f(1)\cdot f(2)}{\cancel{(f(1)\cdot f(2))}}\right) +$$

$$+ f^3(1).$$

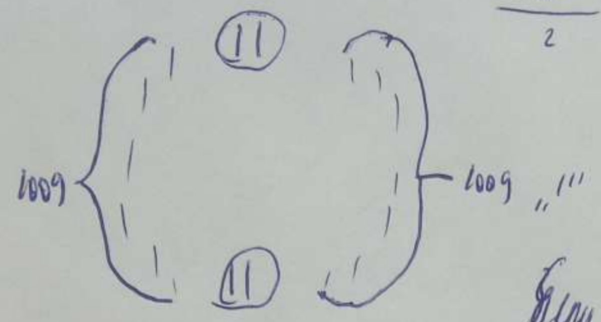
Ладно я устал считать, но там всё выводится спокойно

Шиповник

Задача №4.

Выиграет 2-ой игрок. Его стратегия:

Пусть 1-ый сделал ход, а мы сделаем 2-ой так, чтоб ~~двух~~ круг стал симм.



$\frac{2022-4}{2} = 1011 - \cancel{1009}\ 2 = 1009$

Дальше делаем симм. ходы, до тех пор пока он не ошибётся.

Если он сделал ход „1+1" и после его хода невозможно получить 4, то мы можем сделать симм. ход и нам ничего не угрожает.

Заметим, что после каждого хода рядом с каждой „2" стоят по 2 „1", иначе рассмотрим 1-ый раз когда возле какой-то двойки не то:

I ... 11 2 1. Тогда мы можем получить „4" и победа
2

II ... 1 2 1 2 1
3 у неё нарушилось
+ „4" и победа.

Т.е. что происходит дальше: симметричим и следим, чтоб не было „22" или не появилась цифра больше 2 (а это только 3, ведь у нас на кругу 1 и 2, а пар „22" нет). Если появляется пара „22" - победа, если появ. 3 - победа, т.к. рядом с ней будет 1 (по предположению, что „22" нет).

Ответ: 2-ой.

7 из 10

Исхович.

Задача №6. Заметим, что такая точка, если и есть, то только одна, т.к. являтся будет пересечением и сер.пер., ну т.е. будет центром окружности, на которой лежат четыре точки.

Почему 4?

Ну вершина 1-ой – $(0;-1)$

в т. 0 у 2-ой $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, а т.к. ее вершина в т. $(-2;0)$, то пересечений будет 4. (дополнительно $y(-2) = 7 > 0$, и тогда строится примерный график (с 4-мя пересечениями).

$y = 2x^2 - 1$ $\qquad$ $y = x \cdot z$

$x = 2(2y^2 - 1)$ $\qquad$ $\begin{cases} zx = 2x^2 - 1 \\ x = 4z^2x^2 - 2 \end{cases}$

$y_0 = 2x_0^2 - 1 \longrightarrow 2y_0 = 4x_0^2 - 2$

$x_0 = 4y_0^2 - 2 \qquad x_0 = 4y_0^2 - 2$

2y

$0 = 4x_0^2 - x_0 + \frac{1}{16} - \frac{1}{16} + 4y_0^2 - 2y_0 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 4 =$

$= \left(2x_0 - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(2y_0 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5 \cdot 64}{16} = 0$

Окружность с ц. $\left(\frac{1}{8}; \frac{1}{4}\right)$

8 из 10

Черновик.

№1. $n \underset{20}{\equiv} x$ $\quad$ 2 4 6 8 10

$n \underset{21}{\equiv} x+1$

$n \underset{22}{\equiv} 2$ $\quad$ $22k+2 \underset{20}{\equiv} 2k+2$ $\quad$ $k \le 10$ $\quad$ $2k+2 \le 60$, $k \le 29$

$\underset{21}{\equiv} k+2$

$x \underset{20}{\equiv} n$ $\quad$ k - нечёт.

$\underset{21}{\equiv} n-1$

$2k+2-20_n = k+2-1$

$k = 20_n - 1 \ge 19$

$22 \cdot 18 + 2 \equiv 2 \cdot 19 \underset{20}{\equiv} 18$

$k=19$ $\quad n: 22 \cdot 19 + 2 \underset{20}{\equiv} 2 \cdot 19 + 2 = 0$

$22 \cdot 18 + 2 \equiv 18 + 2 \underset{21}{\equiv} 20$

~~$n = 22 \cdot 19 + 2 \equiv 19 + 2 = 21 = 0$~~

$22k+2 \equiv 2k+2$ $\quad$ $2k+2-40 = k+2-1$ $\quad$ $2k+2-40 = k+2-1-21$

$k = 39$ $\quad$ $k = 18$

4	6	8	20	2	4	18	20	21	2	4	20	2	18	20
3	4	5	11	12	13	20	21		1	2	10	11	19	20

1 2

$(21+19) \cdot 22 + 2$ ~~40~~ $22+2$

$38 \cdot 22 + 2 \equiv -2 \cdot 22 + 2 \equiv -42 \underset{20}{\equiv} 18$

$38 \cdot 22 + 2 \equiv 38 + 2 \equiv 40 \underset{21}{\equiv} 19$

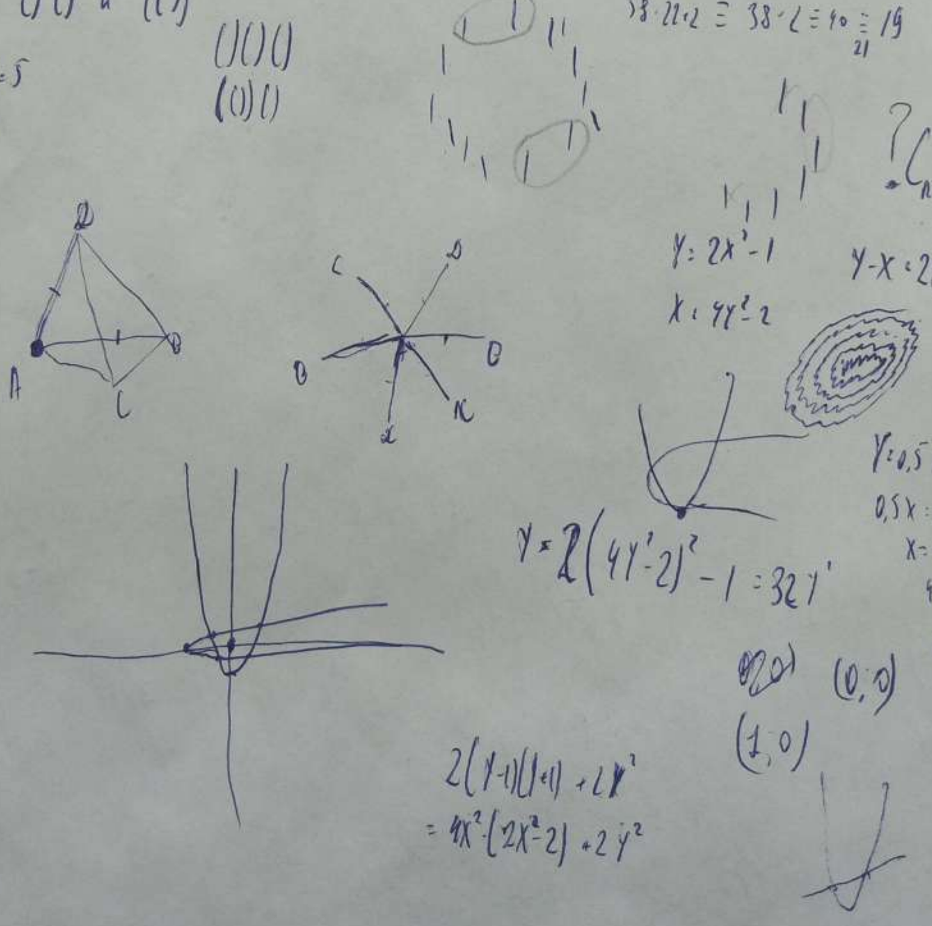
$C_1 = 1$ $\quad$ ()

$C_2 = 2$ $\quad$ ()() и (())

$C_3 = 1+2+2 = 5$ $\quad$ ()()() $\quad$ (())()

№2. $C_4 =$

? $C_n = 2C_{n-1} + C_{n-2}$?



$y = 2x^2 - 1$ $\quad$ $y - x = 2(x^2 - y^2)$

$x = 4y^2 - 2$

$y = 0{,}5x$

$0{,}5x = 2x^2 - 1$

$x = 4x^2 - 2$

$4x^2 - x - 2 = 0$

$y = 2(4y^2 - 2)^2 - 1 = 32y^4$

$D = 1 + 32 = 33$

$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$

$(0,0)$ $\quad$ $(1,0)$

$2(y-1)(y+1) + 2x^2$

$= 4x^2 - (2x^2 - 2) + 2y^2$

9 из 10

Черновик.

№3. $10^{2022} \cdot 9^{2022}$

9^{2022}

1000

$9^x \underset{1000}{\equiv} 1$

$\varphi(1000)$

$1000 = 2^3 5^3$

$500 - 200 + 100 = 400$

$\varphi(1000) = 400$

$9^{400} \equiv 1$

$9^{100} \underset{1000}{\equiv} 1$

$9^{2000} \underset{1000}{\equiv} 1$

$9^{2022} \underset{1000}{\equiv} 9^{22}$

0009

81

729

1

6561

59049

531441

69689

721

6489

$4 \cdot 8 = 14$

489

481

721

6489

049

049

441

296

401

609

609

5481

36054

371 0881

№4.

2 2

3 1

11

21

23

33

2022 | 16

18 | 337

22

0|0|0|0000

0|0|0|0000

0|0|0|0000

$t(4) \cdot t(6)$

0 0 0000

(( )

(

№5. $t^3 + 4t^2 + 4t + 4a = 0$

$x < y < z$

$t^3 + 4t^2 + 4t + a$

$t^2(t+4) + 4(t+4) + a - 16 =$

$= (t^2+4)(t+4) - (16-a) = 0$

$(t^2+4)(t+4) = 16 - a = A$

$x + y + z = -4$

$xy + yz + xz = 4$

$xyz = a$

$x^2 + y^2 + z^2 = 16 - 2 \cdot 4 = 8$

$(x^2+y^2+z^2)(x+y+z)$

$x^3 + y^3 + z^3 = 8 \cdot (-4) - 4 \cdot (-4) + 3xyz =$

$= -32 + 16 - 3a =$

$= -16 - 3a$

$x^3 + 4x^2 + 4x + a = 0$

$y^3 + 4y^2 + 4y + a = 0$

$z^3 + 4z^2 + 4z + a = 0$

$A = x^3 + y^3 + z^3 + 2a + 32 = -16 - 3a + 2a + 32 =$

$= \boxed{16 - a}$

$+ xy^2 + xz^2 + yx^2 + yz^2 + zx^2 + zy^2 + 3xyz - 3xyz$

$zy(x+y+z) + xy(x+y+z) + xz(x+y+z) - 3xyz =$

$= (xy + xy + z)(x+y+z) - 3xyz$

$f(1)$

10 из 10