МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Ломоносов»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Изиланов Илья Андреевич**

Класс: **11 класс**

Технический балл: **90**

Дата проведения: **13 марта 2022 г.**

Результаты проверки:

№	1	2	3	4	5	6	7
Оценка	15	15	15	15	15	15	0

Чистовик 1.

Задача 1.

$$B = \frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}; \quad 4-2\sqrt{3} = 3 - 2\sqrt{3} + 1 = (\sqrt{3}-1)^2$$

$$\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}} = \sqrt[3]{\sqrt{3}-1}$$

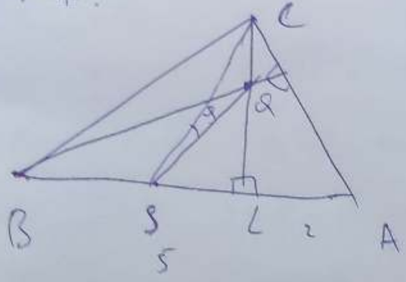
$$B = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = 1.$$

$$A = \sum_{n=1}^{49} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{49} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \cancel{\sum_{n=1}^{49}} \frac{1}{1} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} \dots - \frac{1}{50^2} =$$

$1 - \frac{1}{50^2} < 1$. Ответ: B.

Чистовик 10.

№1.



φ - max.

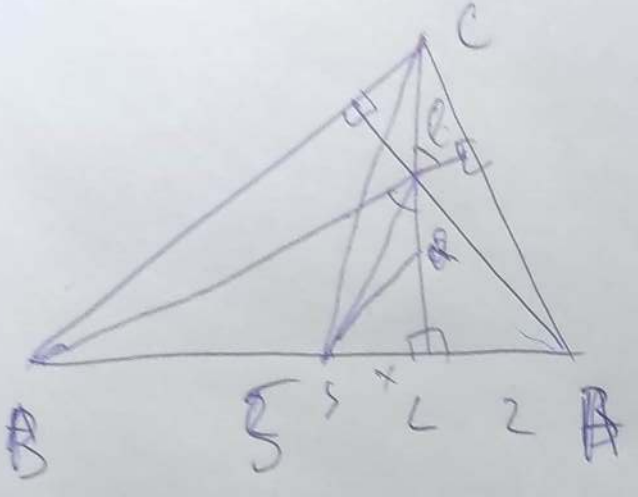
если S совпадает с L, то $\varphi = 0$

если S отдаляется от L, то $\varphi \uparrow$

максимальный угол достигается при $S = B \Rightarrow$

$SL = BL = 5$.

Черновик 1.



$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[9]{1-x^9}}$

$f(f(x)) = \dfrac{1}{\sqrt[9]{1-\left(\dfrac{1}{\sqrt[9]{1-x^9}}\right)^9}} = \dfrac{1}{\sqrt[9]{1-\dfrac{1}{1-x^9}}} = \dfrac{1}{\sqrt[9]{\dfrac{1-x^9-1}{1-x^9}}}$

$\dfrac{1}{\dfrac{x}{\sqrt[9]{1-x^9}}} = -\dfrac{\sqrt[9]{1-x^9}}{x}$

$f(f(f(x))) = -\dfrac{\sqrt[9]{1-}}{\dfrac{1}{\sqrt[9]{1-x^9}}}$

$\cancel{\sqrt[9]{\dfrac{\sqrt[9]{1-x^9}-1}{\sqrt[9]{1-x^9}}}}$

19 23
38 46
57 69
76 92
95

$\cancel{\dfrac{(n+1)^2}{n^2} + \dfrac{n^2}{(n+1)^2}}$

$\dfrac{(n+1)}{n(n+1)} - \dfrac{n}{(n+1)} = \dfrac{(n+1)^2 - n^2}{n(n+1)} = \dfrac{2n+1}{n(n+1)}$

$\dfrac{n}{(n+1)^2} - \dfrac{(n+1)}{n^2} = \cancel{\dfrac{n^3-(n+1)^3}{(n+1)^2 n^2}}$

$\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{(n+1)^2} =$

$\cancel{\dfrac{n+2}{(n\cdot(n+1))^4}}$ $\dfrac{n+2}{(n(n+1))^2} = \dfrac{n+2}{n^2(n+1)^2}$

$\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}} =$

$2020 : 4 = 505$
-20
$\ \ 20$

$\sqrt[6]{3-2\sqrt{3}+1} =$

$\sqrt[6]{(\sqrt{3}-1)^2} = \sqrt[3]{\sqrt{3}-1} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1} = \sqrt[3]{2}$

Чернови 2.

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[9]{1-x^9}}\ ; \quad f(f(x))=\frac{1}{\sqrt[9]{1-(f(x))^9}}=\frac{1}{\sqrt[9]{1-\frac{1}{1-x^9}}}=\frac{1}{\sqrt[9]{\frac{1-x^9-1}{1-x^9}}}=$$

$$=-\frac{1}{\frac{x}{\sqrt[9]{1-x^9}}}=-\frac{\sqrt[9]{1-x^9}}{x}$$

$$f(f(f(x)))=-\frac{\sqrt[9]{1-\left(\frac{1}{\sqrt[9]{1-x^9}}\right)^9}}{\frac{1}{\sqrt[9]{1-x^9}}}=-\frac{\sqrt[9]{1-\frac{1}{1-x^9}}\cdot\sqrt[9]{1-x^9}}{1}=$$

$$f^6(x)=\frac{1}{\frac{1}{\sqrt[9]{1-x^9}}\cdot\frac{-\cancel{x}}{\sqrt[9]{1-x^9}}}$$

$$+\ x\cdot\sqrt[9]{1-x^9}$$

$$f(f(f(f(x))))=\frac{1}{\sqrt[9]{1-x^9}}\cdot\sqrt[9]{1-\frac{1}{1-x^9}}=\frac{-x}{\sqrt[9]{1-x^9}}$$

$$f(f(f(f(f(x)))))=\frac{-\frac{1}{\sqrt[9]{1-x^9}}}{\sqrt[9]{1-\frac{1}{1-x^9}}}=\frac{\frac{1}{\sqrt[9]{1-x^9}}}{x}=\frac{1}{x\cdot\sqrt[9]{1-x^9}}$$

$$f^6(x)=$$

Чернова 3.

$\cancel{\ldots}$ $t(t-10)(t+10)$ $\underset{-10 \quad 0 \quad 10}{- \; + \; - \; +}$ $a(\operatorname{tg}x-1)\left(\operatorname{tg}^2x+\left(\frac{1}{a}-2a\right)\operatorname{tg}x-2\right)$

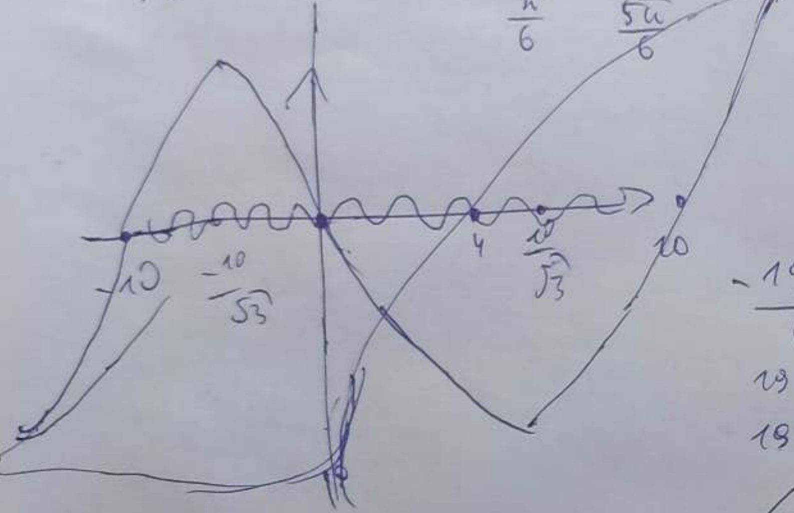
$(a\operatorname{tg}x-a)\ldots$

2^t-16 $\underset{4}{- \quad +}$

$f(t)=t^3-100t$ $4 \vee \frac{10}{\sqrt{3}}$

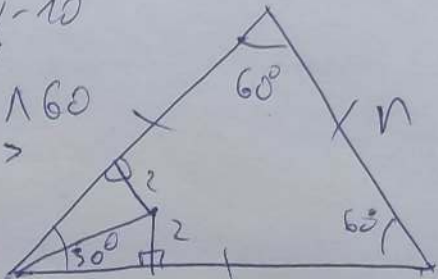
$f'(t)=3t^2-100$ $\underset{-\frac{10}{\sqrt{3}} \quad 0 \quad \frac{10}{\sqrt{3}}}{+ \quad - \quad +}$ $a\operatorname{tg}^3x-a\operatorname{tg}^2x+$

$\sin t-\frac{1}{2}$ $\underset{\frac{\pi}{6} \quad \frac{5\pi}{6}}{- \quad + \quad -}$ $a\operatorname{tg}^2x\left(\frac{1}{a}-2a\right)$



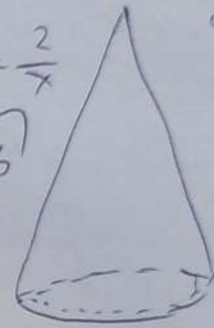
$-\frac{22\pi}{6} \vee -10$
$<$
$-22\pi \wedge 60$
$>$

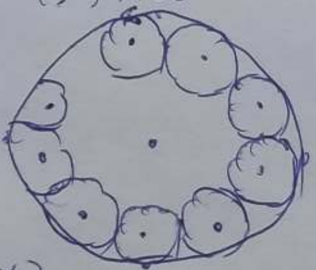
$-\frac{19\pi}{6} \vee -10$
$>$
$19\pi \wedge 60$
$19\cdot 3 \wedge 60$

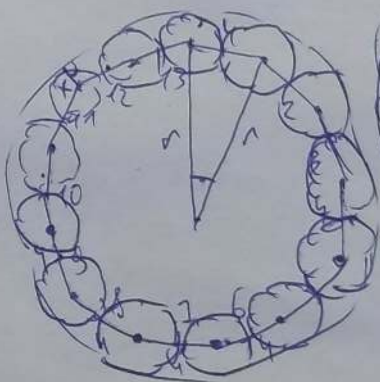


$\operatorname{tg}30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{2}{x}$

$x=2\sqrt{3}$







$\frac{5\pi}{6}-2\pi=$

$\frac{5\pi-12\pi}{6}=$

$-\frac{7\pi}{6}$

$180^\circ\cdot(11)\cdot\frac{360^\circ}{13}$

$\frac{180^\circ\cdot 11}{13}$

$a+(1-a-2a^2)+(2a^2-2a-1)+2a=0$

$\operatorname{tg}x=1$

$\underset{-\frac{19\pi}{6} \quad -\frac{11\pi}{6} \quad -\frac{7\pi}{6} \quad \frac{\pi}{6} \quad \frac{5\pi}{6}}{\longrightarrow}$

$t\frac{10}{\sqrt{3}}$ $\frac{1000}{3\sqrt{3}}-100\cdot\frac{10}{\sqrt{3}}=\frac{-2000}{3\sqrt{3}}$

$\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\frac{7\pi}{2}$

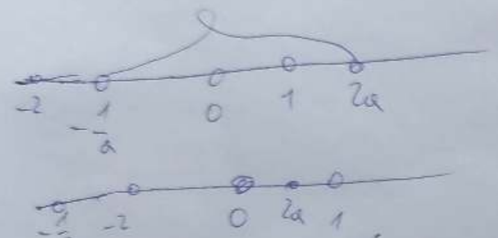
Черновик 4.

$a(\operatorname{tg} x - 1)\left(\operatorname{tg}^2 x + \left(\frac{1}{a} - 2a\right)\operatorname{tg} x - 2\right) =$

$(\operatorname{tg} x \cdot a - a) \ldots = \cancel{\frac{1}{a}}\operatorname{tg}^2 x \;\; \cancel{\operatorname{tg}^2 x} - a\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 x(1 - 2a^2) + (\cancel{-1} + 2a^2)\operatorname{tg} x$

$- 2a\operatorname{tg} x + 2a$

$a\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 x(1 - a - 2a^2) + \operatorname{tg} x(2a^2 + 2a - 1) + 2a$

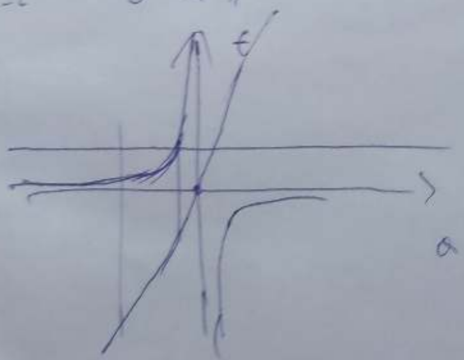


$2a \ne \frac{1}{a}$, $a \ge \frac{1}{2}$

$-\cancel{1}$

$\frac{1}{a} \le 2$

$-\frac{1}{a} \ge -2$



Чернови 5.

$$AS^2 = x^2 + a^2$$

$$CS^2 = (a+b)^2 + x^2$$

$$b^2 = x^2 + a^2 + (a+b)^2 + x^2 - 2\cos\varphi \cdot \sqrt{x^2+a^2} \cdot \sqrt{(a+b)^2+x^2}$$

$$\cos\varphi = \frac{x^2+a^2+(a+b)^2+x^2-b^2}{2\sqrt{x^2+a^2}\sqrt{(a+b)^2+x^2}} = \frac{\cancel{2}x^2+\cancel{2}a^2+\cancel{2}ab}{\sqrt{x^2+a^2}\sqrt{(a+b)^2+x^2}}$$

$$f^1(x) = \frac{1}{\sqrt[9]{1-x^9}}$$

$$f^2(x) = \frac{1}{\sqrt[9]{1-(f(x))^9}} = \frac{1}{\sqrt[9]{1-\frac{1}{1-x^9}}} = \frac{1}{\sqrt[9]{\frac{1-x^9-1}{1-x^9}}} = \frac{1}{\frac{-x}{\sqrt[9]{1-x^9}}} = -\frac{\sqrt[9]{1-x^9}}{x}$$

$$f^3(x) = -\frac{\cancel{1}}{\cancel{1-x^9}} \sqrt[9]{1-\frac{1}{1-x^9}} \cdot \sqrt[9]{1-x^9} = \cancel{x\sqrt[9]{1-x^9}} \quad +x$$

$$f^4(x) = \frac{1}{\sqrt[9]{1-x^9}} \cdot \sqrt[9]{1-\frac{1}{1-x^9}} = -x \cdot \frac{1}{\sqrt[9]{1-x^9}}; \quad f^5(x) = -\frac{1}{\sqrt[9]{1-x^9}} \cdot \frac{1}{-x}$$

Черновик 6.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[9]{1-x^9}}$$

$$f^2(x) = \frac{1}{\sqrt[9]{1-\frac{1}{1-x^9}}} = \frac{1}{\frac{-x}{\sqrt[9]{1-x^9}}} = -\frac{\sqrt[9]{1-x^9}}{x}$$

$$f^3(x) = -\sqrt[9]{1-\frac{1}{1-x^9}} \cdot \cancel{\sqrt[9]{\frac{1}{1-}}} \cdot \sqrt[9]{1-x^9} = +\frac{x}{\sqrt[9]{1-x^9}} \cdot \sqrt[9]{1-x^9} = \cancel{f(x)}\,x$$

$$f^4(x) = \frac{1.}{\sqrt[9]{1-x^9}}$$

$$f(x) = 2^x - 16$$

$$f'(x) = 2^x \cdot \ln 2 > 0$$

$\frac{13\pi}{6} \vee 4$
$>$

$13\pi \vee 24$
$>$

$\frac{25\pi}{6} \vee 10$
$>$

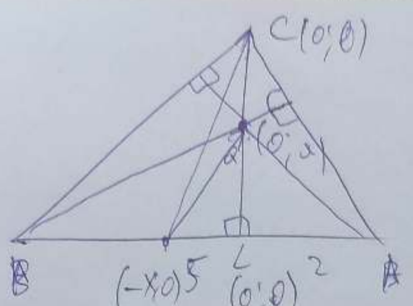
$\frac{5\pi}{6} \vee 2$

$5\pi \vee 12$
$>$

$\frac{17\pi}{6} \vee 10$

$\frac{17\pi}{3} \vee 5$
$<$

Черновик 7.



$\vec{SC} = (+x; b)$

$\vec{SQ} = (x; a)$

$\vec{SC} \cdot \vec{SQ} = x^2 + ab = \sqrt{x^2+b^2} \cdot \sqrt{x^2+a^2} \cdot \cos\varphi$

$$\cos\varphi = \frac{x^2+ab}{\sqrt{x^2+b^2}\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{x^2+a^2u}{\sqrt{x^2+a^2u^2} \cdot \sqrt{x^2+a^2}} =$$

$$\frac{x^2+a^2u}{\sqrt{x^4+x^2(a^2+a^2u^2)+a^4u^2}}$$

Чистовик 2.

Задача 2.

$19 \cdot 1 = 19$	$23 \cdot 1 = 23$
$19 \cdot 2 = 38$	$23 \cdot 2 = 46$
$19 \cdot 3 = 57$	$23 \cdot 3 = 69$
$19 \cdot 4 = 76$	$23 \cdot 4 = 92.$
$19 \cdot 5 = 95$	

Т.е число начинается либо с 95 либо с 92. Пусть число начинается с 92, тогда следующая цифра — обязательно 3, т.к. 23 это ед. двуз. число, которое делится на 23 или 19 и нач. на 2. Продолжая такие рассуждения получаем цепочку: $92 \to 23 \to 38 \to ?$. У нас нет чисел, которые начинаются на 8, значит число обязано начинатьcя на 95. Разумеется, это не означает, что указанной цепочки не может быть внутри числа, но в таком случае 8 будет последней его цифрой. Напишем цепочку для 95: $95 \to 57 \to 76 \to 69$. Данная цепочка ~~снова разбивае~~ 9576 оканчивается на 9, так что следующая цифра 5 или 2. ~~И так, мы установили, что в нашем числе~~ Но если следующая цифра 2, то после окончания первой цепочки число нельзя будет восставить далее. Т.е. мы установили, что наше число

Итого вычислили 3.

Задача 2 прод.

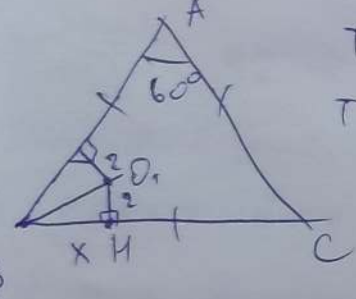
Выглядит так: $\underbrace{9576'9576'\ldots}_{505 \text{ цепочки } 9576}$ 9?, т.к. $2022 = 505\cdot 4 + 2$

Тогда на место последней, неполной цепочки подойдет любая из двух, поэтому последняя цифра либо 5 либо 2

Ответ: 5 или 2.

№4.

Посмотрим на осевое сечение, в котором есть центр хотя одного шара:



т.к. $AB = AC$ из свойств сечения конуса, а $\angle BAC = 60° \Rightarrow \triangle ABC$ - правильный.
Тогда $\angle ABC = 60°$.

Сечение одного шара будет окружность вписанной в угол ABC.
Тогда $\angle ABO_1 = \angle CBO_1 = 30°$, т.к. O_1 равноуд. от AB и BC, а значит лежит на биссектрисе. Пусть H - проекция центра окр на BC.

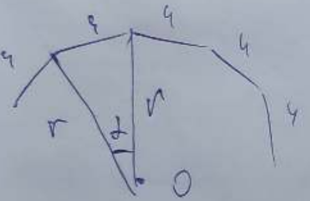
Тогда $BH = \frac{2}{tg\, 30°} = 2\sqrt{3}$.

Чистовик 4.

№4 (прод.)

Посмотрим на ~~сверху~~ основание из вершины:

Тогда проекции центров шаров образуют правильный 13угольник со стороной 4. Каждый центр находится на расстоянии $2\sqrt{3}$ от окружности основания $\Rightarrow$ если к радиусу описанной окружности 13 угольника добавить $2\sqrt{3}$, получим искомый радиус (или, что тоже самое, можно применить гомотетию из центра основания O)



$$\alpha = \frac{360^\circ}{13}$$

по т. косинусов: $16 = 2r^2 - 2r^2\cos\alpha$

$$r^2 = \frac{16}{2-2\cos\alpha} = \frac{8}{1-\cos\alpha}$$

$$r = \sqrt{\frac{8}{1-\cos\alpha}}$$

Тогда ответ: $2\sqrt{3} + \sqrt{\frac{8}{1-\cos\alpha}}$, где $\alpha = \frac{360^\circ}{13}$

Чистовик 5.

№6.

$$a\,tg^3x + (1-a-2a^2)\,tg^2x + (2a^2-2a-1)\,tg\,x + 2a = 0$$

Заметим $tg\,x = 1$ – решение

Тогда уравнение можно разложить: $a\,(tg\,x - 1)\left(tg^2x + \left(\frac{1}{a} - 2a\right)tg\,x - 2\right)$

По т. Виета вторая скобка: $tg^2x + \left(\frac{1}{a} - 2a\right)tg\,x - 2 = (tg\,x - 2a)\left(tg\,x + \frac{1}{a}\right)$

т.е. все уравнение: $a\,(tg\,x-1)(tg\,x - 2a)\left(tg\,x + \frac{1}{a}\right) = 0$.

~~Аффинно~~ Если $a=0$: $tg^2x - tg\,x = 0$

$tg\,x = 1$

$tg\,x = 0$ $\Rightarrow$ Расст. $= \frac{\pi}{4}$

Пусть $a \neq 0$:

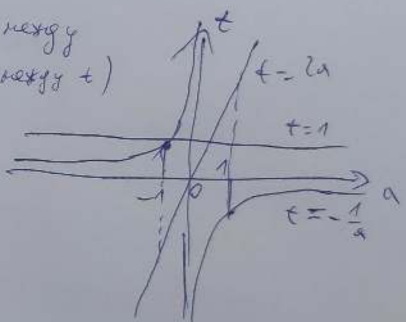
корни: $tg\,x = 1$

$tg\,x = 2a$

$tg\,x = -\frac{1}{a}$;

Пусть $tg\,x = t \in \mathbb{R}$ (чем больше расст. между $tg\,x$, тем больше между t)

$$\left[\begin{aligned} &t = 1 \\ &t = 2a \\ &t = -\frac{1}{a} \end{aligned}\right.$$



Тогда расстояние между корнями $\Leftrightarrow$ длина верт. отрезка, соед. точки графика.

Чистовик 6

№6 (прод.)

При $a < -1$ расстояние ~~вдоль~~ убывает с увел. a

При $a = -1$ $t_1 = 1$
$t_2 = -2$
$t_3 = 1$ $\Rightarrow$ расст. между $t = 3$

При $a \in (-1; 0)$ расстояние возраст. с увел. a

При $a \in (0; 1)$ расстояние убывает. с увел. a

При $a = 1$; $t_1 = 1$
$t_2 = 2$
$t_3 = -1$ $\Rightarrow$ расст. между $t = 3$

При $a \geq 1$ расст. увел. с ростом a.

При $a = 0$ расстояние между t было равно $1 < 3$

Тогда Ответ: $a = 3$, расст. $\frac{\pi}{4}$

Чистовик 7.

№3.

$$f^1(x) = \frac{1}{\sqrt[9]{1-x^9}}$$

$$f^2(x) = \frac{1}{\sqrt[9]{1-(f(x))^9}} = \frac{1}{\sqrt[9]{1-\frac{1}{1-x^9}}} = \frac{1}{\sqrt[9]{\frac{1-x^9-1}{1-x^9}}} = -\frac{\sqrt{1-x^9}}{x}$$

$$f^3(x) = -\sqrt{1-\frac{1}{1-x^9}} \cdot \sqrt[9]{1-x^9} = \frac{x}{\sqrt[9]{1-x^9}} \cdot \sqrt[9]{1-x^9} = x$$

$$f^4(x) = \frac{1}{\sqrt[9]{1-x^9}}$$

~~хзух~~ т.е. $f^{1305}(x) = f^3(x)$, (т.к. $1305 \equiv_3 3$)

Ответ: 2022.

Чистовик 8.

№5. $a = t^3 - 100t$; $b = 2^t - 16$; $c = \sin t - \frac{1}{2}$

$t^3 - 100t = t(t^2 - 100) = t(t-10)(t+10)$

$-\quad +\quad -\quad +$

$-10 \quad 0 \quad 10$

$a' = 3t^2 - 100$; $t_0 = \pm\frac{10}{\sqrt{3}}$

$+\quad -\quad +$

$-\frac{10}{\sqrt{3}} \quad \frac{10}{\sqrt{3}}$

$b = 2^t - 16$

$-\quad +$

4

$b' = 2^t \cdot \ln 2 > 0$

$c = \sin t - \frac{1}{2}$:

$+\quad -\quad +\quad -$

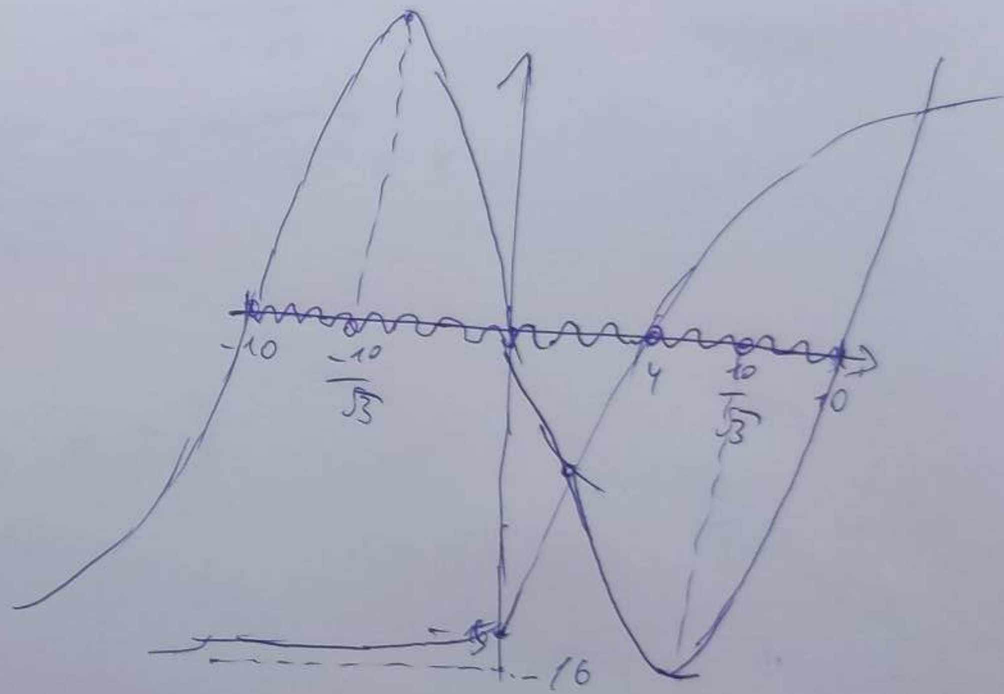
$-\frac{11}{6}\pi \quad -\frac{7}{6}\pi \quad \frac{\pi}{6} \quad \frac{5\pi}{6}$

$4 \vee \frac{10}{\sqrt{3}}$

$<$

$4\sqrt{3} \vee 10$

$<$



Чистовик 9.

№5 прод.

1) При $t > 10$ $a > 0$ и $b > 0$, значит сред. > 0.

2) При $t < -10$ $a < 0$ и $b < 0 \Rightarrow$ сред < 0.

3) При $t = 10$ $a = 0$; $b > 0$; $c = \sin 10 - \frac{1}{2}$

$10 > 3\pi$; $10 < 3\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin 10 < 0 \Rightarrow c < 0 \Rightarrow$ сред. $= 0$.

4) При $t = -10$ сред. также минимум 0, т.к. только c может быть больше 0.

5) При $t \in (-10; 0)$ $a > 0$, $b < 0$, c?. Если $c > 0$, то либо c либо a сред. ≥ 0.

Поэтому при $c > 0 \Leftrightarrow \sin t - \frac{1}{2} > 0$, $t \in (-10; 0) \Rightarrow t \in \left(-10; -\frac{19\pi}{6}\right) \cup \left(-\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}\right)$

6) При $t \in (0; 4)$ $a < 0$, $b < 0 \Rightarrow$ сред. < 0

7) $t = 4$; $a < 0$, $b = 0$; c? $\Rightarrow$ сред. максимум 0.

8) $t \in (4; 10)$; $a < 0$; $b > 0$; c? $\Rightarrow$ делаем по аналогии с 5) $c > 0$, $t \in (4; 10) \Rightarrow$
$t \in \left(\frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}\right)$

9) $t = 0$ $a = 0$; $b < 0$; $c < 0 \Rightarrow$ сред. < 0.